TD2
Numpy & Matplotlib

1 Quelques rappels

Les tuples. Les tuples correspondent aux listes à la différence qu'ils sont non modifiables. Une valeur de type tuple est délimitée par des parenthèses comme par exemple `(1,2,"a")`. Pour créer une variable `x` de type tuple, on écrit : `x=(1,2,"a")`. Pour accéder à un élément d'un tuple, on utilise les crochets comme pour les listes. On ne peut pas modifier une valeur de type tuple : on ne peut pas changer un élément du tuple, ni ajouter, ni retirer un élément.

Les dictionnaires. Un dictionnaire est un ensemble énumérable de couples *(clé, valeur)* mais, à la différence de la liste, un dictionnaire contient des éléments non ordonnées. Plus clairement, il n'y a pas d'indice et on accède aux valeurs d'un dictionnaire par les clés. On définit un dictionnaire vide, appelé `dico`, avec l'instruction : `dico={}`. Ensuite, on remplit le dictionnaire en définissant les différentes clés auxquelles on affecte des valeurs (une par clé) : `dico[cle]=valeur`. On peut ajouter autant de clés que nécessaire. On peut aussi initialiser toutes les clés d'un dictionnaire en une seule instruction :

```
dico={cle1 : valeur1, ..., clek : valeurk}
```

On accède à une valeur particulière du dictionnaire grâce à la clé associée : `dico[cle]`. Il est également possible de supprimer un élément d'un dictionnaire à l'aide de l'instruction : `del dico[cle]`.
La méthode `keys()` appliquée à un dictionnaire retourne toutes les clés contenues dans ce dictionnaire.
La méthode `values()` appliquée à un dictionnaire va retourner toutes les valeurs contenues dans ce dictionnaire.
La méthode `items()` fournit la liste des tuples `(cle, valeur)`.

Exercice 1

Soit le dictionnaire suivant :

```
d = {'nom'    : 'Dupuis',
     'prenom': 'Jacque',
     'age'    : 30}
```

Écrire en Python les instructions permettant de :

1. corriger l'erreur dans le prénom, la bonne valeur devant être `Jacques` ;
2. afficher la liste des clés du dictionnaire ;
3. afficher la liste des valeurs du dictionnaire ;
4. afficher la liste des paires clé/valeur du dictionnaire ;
5. écrire la phrase `"Jacques Dupuis a 30 ans"` à l'aide des éléments du dictionnaire.

Correction

1. `d['prenom'] = 'Jacques'`

2. `list(d.keys())`

3. `list(d.values())`

4. `list(d.items())`

5. `d['prenom']+' '+d['nom']+' a '+str(d['age'])+' ans'`

   Ici, l'usage de + sert à concaténer des chaînes de caractères. On n'oublie donc pas de convertir `d['age']` qui est de type `int` en chaine de caractères via `str(d['age'])`, sinon la concaténation ne fonctionne pas et le programme renvoie l'erreur:

   ```
   TypeError: can only concatenate str (not "int") to str
   ```

2 Le module `numpy`

Le module `numpy` permet de faire du calcul scientifique : représenter des vecteurs et matrices, effectuer du calcul matriciel, des calculs statistiques... Traditionnellement on importe `numpy` de la façon suivante :

```
import numpy as np
```

Le fonction `array` permet de former un tableau `numpy` (de type `ndarray`) à partir d'une liste, ou d'une liste de listes.

```
mat=np.array([[1,2],[6,3],[4,5]])
```

crée une matrice `mat` de 3 lignes et 2 colonnes contenant des entiers. Tous les éléments d'un tableau `numpy` sont de même type. Ainsi,

```
v=np.array([1,5.0,3])
```

crée un vecteur de 3 float.

La méthode `tolist` appliquée à un tableau `numpy` renvoie une liste, ou une liste de listes, à partir du tableau. Ainsi, l'instruction

```
l=mat.tolist()
```

affecte à la variable `l` la valeur `[[1,2],[6,3],[4,5]]`.

Quelques fonctions utiles :

- `np.shape(mat)` renvoie (3,2), c'est-à-dire un tuple qui indique le nombre d'éléments dans chaque dimension,
- `np.size(mat)` renvoie 6, c'est-à-dire le nombre total d'éléments,
- `np.ndim(mat)` renvoie 2, c'est-à-dire le nombre de dimension.

Pour créer des tableaux spécifiques, on peut utiliser les fonctions :

- `np.zeros` renvoie un tableau dont tous les coefficients sont nuls : par exemple `np.zeros(5)` renvoie un vecteur de longueur 5 et `np.zeros((10,3))` renvoie une matrice de 10 lignes et 3 colonnes,
- `np.ones` renvoie un tableau dont tous les coefficients sont égaux à 1,
- la méthode `fill` appliquée à un tableau numpy permet d'attribuer à tous les éléments de ce tableau une valeur constante donnée en argument : par exemple, après l'exécution des deux instructions suivantes

  ```
  mat=np.array([[1,2,3],[4,5,6]])
  mat.fill(1)
  ```

  `mat` vaut `[[1,1,1],[1,1,1]]`
- `np.identity(n)` renvoie la matrice identité d'ordre `n`
- `np.linspace(min,max,n)` renvoie un vecteur de `n` valeurs linéairement échelonnées dans le segment `[min, max]`
- `np.logspace(min,max,n)` renvoie un vecteur de `n` valeurs logarithmiquement échelonnées dans le segment `[min, max]`

Soient `a` et `b` deux tableaux `numpy`, l'expression `a+b` (resp. `a*b`) est valide et elle réalise l'addition (resp. la multiplication) terme à terme des éléments du tableau. On peut aussi écrire : `a*10` qui va alors multiplier chaque terme du tableau par 10. Pour calculer les 10 premières puissances de 2 on pourra exécuter l'instruction suivante :

```
2 ** np.array(range(10))
```

De façon générale, on peut appliquer des fonctions mathématiques usuelles `f` à chaque élément d'un tableau `a` avec la syntaxe `np.f(a)`. Par exemple, l'instruction

```
np.log(np.array(range(1,11))
```

va renvoyer :

```
array([ 0.        ,  0.69314718,  1.09861229,  1.38629436,  1.60943791,
        1.79175947,  1.94591015,  2.07944154,  2.19722458,  2.30258509])
```

Pour le calcul matriciel, on dispose des fonctions suivantes :

- `transpose(a)` qui renvoie la transposée d'une matrice `a`,
- `trace(a)` qui calcule la trace d'une matrice `a`,
- `dot(a,b)` qui effectue le produit matriciel de `a` par `b`,
- `linalg.matrix_power(a,n)` qui calcule la puissance nième de la matrice `a`,
- `linalg.inv(a)` qui calcule l'inverse de la matrice carrée `a`,
- `linalg.det(a)` qui calcule le déterminant de la matrice carrée `a`,
- `linalg.solve(a,b)` qui résout le système $ax = b$,
- `linalg.norm(x,`*`opt`*`)` qui calcule la norme du vecteur `x` : norme euclidienne par défaut, norme 1 si `opt=1`, norme infinie si `opt=np.inf`,
- `linalg.eigvals(a)` renvoie le vecteur des valeurs propres de `a`.

Exercice 2:

Soit un entier $n \geq 0$ et a un réel non nul. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & \frac{1}{a} & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \dots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

1. écrire une fonction qui étant donnés un entier $n \geq 0$ et un réel a non nul renvoie la matrice $A_{n,a}$,
2. pour $3 \leq n \leq 8$ et $a \in \{-2, -1, 1, 2, 3\}$, écrire une fonction qui renvoie un dictionnaire dont les clés sont les déterminants de $A_{n,a}$ et les valeurs la liste des couples `(n,a)` ayant leur déterminant égal à la clé,
3. écrire le programme qui affiche les différentes valeurs de déterminants obtenus et, pour chacune d'entre elle, les couples `(n,a)` correspondants.

Correction

```
import numpy as np
```

1.
```
def A(n, a):
    mat = np.zeros((n,n))
    for i in range(n-1):
        mat[i][i+1] = 1/a
    for i in range(1, n):
        mat[i][i-1] = a
    return mat
```

- Il faut bien mettre une double parenthèse dans `np.zeros((n,n))`, sinon on reçoit l'erreur:

  `TypeError: data type not understood`

  Les parenthèses extérieures encadrent l'argument de la fonction, cet argument étant la taille du tableau `numpy` que l'on veut créer et que la fonction attend sous forme d'un tuple. Ici, le tuple `(n,n)` précise qu'on veut une matrice en 2 dimensions de taille (n, n). On pourrait passer l'argument `(n,n,n)` pour une matrice en 3 dimensions de taille (n, n, n). On peut omettre les parenthèses du tuple seulement si l'on veut créer un vecteur (tableau à 1 dimension), par exemple : `np.zeros(n)`.
- On aurait aussi pu remplir la sur-diagonale et la sous-diagonale dans la même boucle comme suit :

  ```
  for i in range(n-1):
      mat[i][i+1]=1/a
      mat[i+1][i]=a
  ```

  Il faut simplement faire bien attention aux indices !

On a une autre solution plus condensée faisant appel à la fonction `diag` de `numpy` :

```
def A(n, a):
    return np.diag([1/a]*n, 1) + np.diag([a]*n, -1)
```

Voir la documentation de `np.diag()` à l'adresse :

https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.diag.html

En fait, cette fonction réalise exactement ce qu'il nous faut : `np.diag(v,k)` rend une matrice carrée remplie de zéros, avec le vecteur `v` placé le long de la diagonale d'indice `k` ($k = 0$ est la vraie diagonale, $k = 1$ la sur-diagonale, $k = -1$ la sous-diagonale).

2.
```
def detDict(n_array, a_array):
    dico = {}
    for n in n_array:
        for a in a_array:
            det = np.round(np.linalg.det(A(n,a)), 3)
            if det not in dico:
                dico[det] = []
            dico[det].append((n,a))
    return dico
n_array, a_array = np.arange(3, 9), [-2, -1, 1, 2, 3]
dico = detDict(n_array, a_array)
```

- Chaque couple du dictionnaire est bien constitué de deux éléments seulement : *(clé, valeur)*. Mais ici, la valeur est créée sous forme de liste. On peut donc ajouter dans cette liste progressivement les couples (n, a) donnant le bon déterminant. Un dictionnaire n'est en effet pas défini de manière statique comme un tuple ; on peut modifier ses clés et ses valeurs, notamment comme ici en utilisant `append` sur `dico[det]` qui renvoie la liste associée au déterminant `det`.

  Si on écrit `dico[det] = (n,a)`, on voit qu'à la clé `det` est associé l'unique couple `(n,a)`. On ne peut pas ainsi lui associer **tous** les couples donnant le déterminant `det`.
- Avec l'instruction "`for det in dico:`", on peut itérer sur les **clés** du dictionnaire `dico`. Avec "`if det in dico:`", on vérifie si la clé `det` se trouve bien dans le dictionnaire, et avec "`if det not in dico:`", si elle ne s'y trouve pas. Dans ce dernier cas, il faut la créer, ce que l'on fait avec "`dico[det] = []`", pour ensuite pouvoir travailler avec.

3.
```
def printDet(dico):
    for pair in dico.items():
        print('  ', pair[0], pair[1])
printDet(dico)
```

3 Le module `matplotlib`

Pour le simple tracé de courbes, nous n'utiliserons que le sous-module `pyplot` importé, avec alias, à l'aide de la commande :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

La documentation est disponible à `http://www.matplotlib.org/`.

Les fonctions essentielles de `pyplot` sont :

- `plt.plot()` pour le tracé de points, de courbes ; le premier argument de `plot` est la liste des abscisses, le deuxième la liste des ordonnées et le troisième (optionnel) le motif des points :

  '.' pour un petit point,

'o' pour un gros point,

'+' pour une croix,

'*' pour une étoile,

'-' points reliés par des segments,

'–' points reliés par des segments en pointillés,

'-o' gros points reliés par des segments (on peut combiner les options),

'b', 'r', 'g', 'y' pour de la couleur (bleu, rouge, vert, jaune, etc.).

- `plt.show()` pour afficher le graphique créé.

Voici deux exemples d'utilisation :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.array([1,3,4,6])
y=np.array([2,3,5,1])
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(0,2*np.pi,30)
y=np.cos(x)
plt.figure('Fonction cosinus')
plt.plot(x,y,label="cos(x)")
plt.title('Fonction cosinus')
plt.show()
```

En effet, on peut améliorer le tracé en remplissant quelques options avant de le sauvegarder (au format .png dans le répertoire utilisateur).

```
>>> plt.grid(True) # Affiche la grille
>>> plt.legend('cos', 'upper right', shadow = True) # Légende
>>> plt.xlabel('axe des x') # Label de l'axe des abscisses
>>> plt.ylabel('axe des y') # Label de l'axe des ordonnées
>>> plt.title('Fonction cosinus') # Titre
>>> plt.savefig('figCos') # sauvegarde du fichier figCos.png
```

Exercice 3

1. Tester les deux exemples.

   Correction

   ```
   import matplotlib.pyplot as plt
   ```

   Ensuite recopier le code de l'énoncé.

   - `plt.figure()` indique à python que tout le code qui suit jusqu'à éventuellement un prochain `plt.figure()` consiste en une seule figure. Son argument est une chaîne de caractères donnant un nom à la figure. Lorsqu'on appelle `plt.show()`, ce nom est le titre de la fenêtre dans laquelle la figure s'affiche.

Lorsqu'on ne veut faire qu'une figure, cette commande paraît inutile. Mais lorsqu'on en fait plusieurs, il est utile de les séparer pour qu'elles soient tracées séparément. Il est aussi possible de créer une figure constituée de plusieurs plus petites sous-figures, il est alors pratique de préciser que les sous-figures doivent aller ensemble.

Dans Pyzo, si l'on veut afficher plusieurs figures dans différentes fenêtres, il est nécessaire d'utiliser `plt.figure()` avant chacune d'entre elles. Sinon, toutes vont s'afficher dans la même fenêtre en écrasant les précédentes, et on ne verra que la figure associée au dernier appel de `plt.show()`.

- L'argument `label` dans `plt.plot(x,y,label="cos(x)")` permet de donner un nom à la courbe que l'on trace. C'est particulièrement utile lorsqu'on trace plusieurs courbes sur une même figure. On peut alors afficher une légende qui utilise les arguments `label` qu'on a définis en utilisant la commande `plt.legend()`.
- `np.linspace(0,2*np.pi,30)` rend une liste de 30 éléments commençant en 0 et finissant en 2π. Avec `np.linspace` on ne donne donc pas l'écart entre les différents éléments, mais le nombre total de points que l'on veut.
  Inversement, `np.arange(0,2*np.pi,0.1)` va rendre une liste de valeurs commençant par 0, puis s'échelonnant tous les 0.1 jusqu'à la plus grande valeur possible inférieure ou égale à 2π.

2. Représenter la fonction $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 12$ pour x variant de -10 à 15 à l'aide des modules `numpy` et `matplotlib`.

   Correction

```
def plotFunction(x):
    y = x**3 - 3*x**2 + 2*x + 12
    plt.figure('Fonction personnalisee')
    plt.plot(x, y)
    plt.show()

x = np.linspace(-10, 15, 300)
plotFunction(x)
```

   - `x` est un tableau `numpy` : l'opération `x**3` renvoie un nouveau tableau `numpy` composé des éléments de `x` mis au cube ; l'opération `-3*x**2` renvoie un nouveau tableau `numpy` composé des éléments de `x` mis au carré et multiplié par -3.

3. Soit un cercle de rayon $r = 1$ inscrit dans un carré de coté $l = 2$. L'aire du carré vaut 4 et l'aire du cercle vaut π. En choisissant N points aléatoires (à l'aide d'une distribution uniforme) à l'intérieur du carré, la probabilité que chacun de ces points se trouvent aussi dans le cercle est

$$p = \frac{\text{aire du cercle}}{\text{aire du carré}} = \frac{\pi}{4}$$

   Soit n, le nombre de points tirés aléatoirement se trouvant effectivement dans le cercle, on a :

$$p = \frac{n}{N} = \frac{\pi}{4}$$

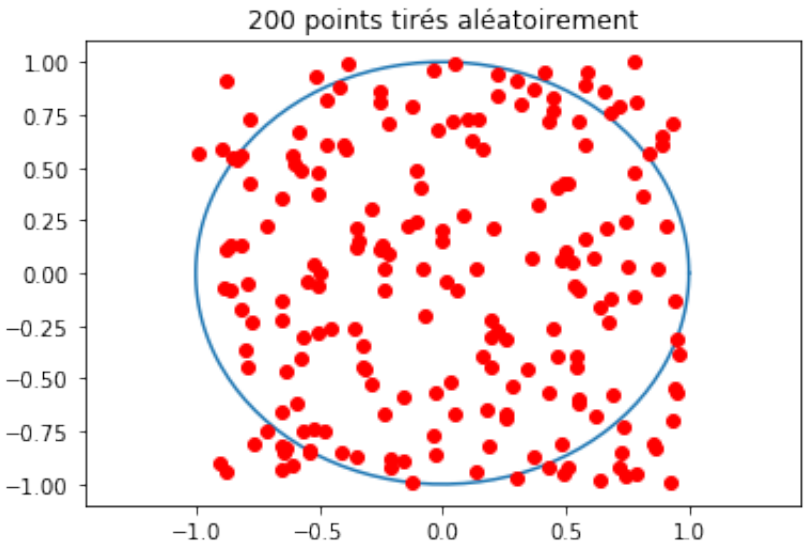
   d'où

$$\pi = 4 \times \frac{n}{N}$$

   Ecrire une fonction python qui prend comme argument N, et qui retourne une approximation de π par la méthode suivante : procéder en N itérations et, à chaque itération, choisir aléatoirement les coordonnées d'un point entre -1 et 1 (fonction `uniform` du module `random`), calculer la

distance entre ce point et le centre du cercle, déterminer si cette distance est inférieure au rayon du cercle égal à 1, et si c'est le cas, incrémenter le compteur n de 1.

Représenter graphiquement la liste des N points tirés aléatoirement sous le format suivant :



Correction

```
import random as rd

def piApprox(N):
    x, y = [], []
    n = 0
    for k in range(N):
        x.append(rd.uniform(-1,1))
        y.append(rd.uniform(-1,1))
        if x[-1]**2 + y[-1]**2 <= 1:
            n += 1
    print("Approximation de pi :", 4*n/N)

    plt.figure('Approximation de pi')
    thetas = np.linspace(0,2*np.pi,200)
    plt.plot(np.cos(thetas), np.sin(thetas), 'b-')
    plt.plot(x, y, 'ro')
    plt.title(str(N)+' points tires aleatoirement')
    plt.xlim((-1.45,1.45))
    plt.show()

N = 200
piApprox(N)
```

- Pour tracer le cercle, on a utilisé le fait que les coordonnées de ses points correspondent aux couples $(\cos\theta, \sin\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. On aurait aussi pu utiliser son équation cartésienne et tracer le demi cercle-du haut, dont les points ont pour coordonnées $(x, \sqrt{1-x^2})$ pour $x \in [-1, 1]$, puis le demi-cercle du bas dont les points ont pour coordonnées $(x, -\sqrt{1-x^2})$. Il aurait fallu plus de points pour avoir un rendu visuel suffisamment lisse au niveau du recollement des deux demi-cercles. On remplace alors :

```
    thetas = np.linspace(0,2*np.pi,200)
    plt.plot(np.cos(thetas), np.sin(thetas))
```

par :

```
x_cercle = np.linspace(-1,1,1000)
y_cercle = np.sqrt(1-x_cercle**2)
plt.plot(x_cercle, y_cercle, 'b-')
plt.plot(x_cercle, -y_cercle, 'b-')
```

Le premier appel à `plt.plot()` trace le demi-cercle supérieur, le second appel trace le demi-cercle inférieur.

On a utilisé la fonction `np.sqrt()` pour la racine carrée, qui est la même fonction que `math.sqrt()` mais applicable à un tableau `numpy` au lieu d'un simple scalaire. Ecrire `math.sqrt(1-x**2)` au lieu de `np.sqrt(1-x**2)` renvoie l'erreur :

```
TypeError: only size-1 arrays can be converted to Python
                            scalars
```

signifiant que la fonction `math.sqrt()` attendait un scalaire et non un tableau `numpy`. On se souviendra que pour utiliser des fonctions sur des tableaux, `numpy` contient beaucoup de fonctions standards utiles : `np.cos()`, `np.sin()`, `np.tan()`, `np.exp()`, `np.log()`...

- Pour tracer les points aléatoires comme des ronds rouges, on a utilisé dans la commande `plt.plot(x, y, 'ro')` l'argument supplémentaire de formatage rapide `'ro'`, placé après les abscisses `x` et les ordonnées `y`. Ces deux lettres signifient à la fonction qu'il faut tracer en rouge ('r') et des ronds ('o'). Idem pour le cercle, où on a utilisé 'b-', c'est-à-dire une ligne ('-') bleue ('b'). Pour plus d'informations sur les formatages possibles, voir la documentation de la fonction `plot` à l'adresse :

  https://matplotlib.org/3.1.1/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.plot.html

  en bas de la page avant les exemples, dans la partie 'Notes'.

4. On s'intéresse aux densités de probabilité impliquées dans la procédure précédente. Ecrire une fonction qui, comme dans la question précédente, tire N coordonnées (X, Y) avec X, Y uniformes dans $[-1; 1]$. On prendra ici N beaucoup plus grand (~ 50000). Vérifier que la distribution de X et Y est bien uniforme en comparant l'histogramme des valeurs prises par X et Y avec la densité $\rho_X(x) = \rho_Y(x) = 1/2$. On utilisera pour cela la fonction `hist` du module `matplotlib` avec 30 bandes :

   ```
   plt.hist(x, bins=30, density=True)
   ```

   Correction

   ```
   import math

   def densitiesXY(N):
       x, y = [], []
       for k in range(N):
           x.append(rd.uniform(-1,1))
           y.append(rd.uniform(-1,1))

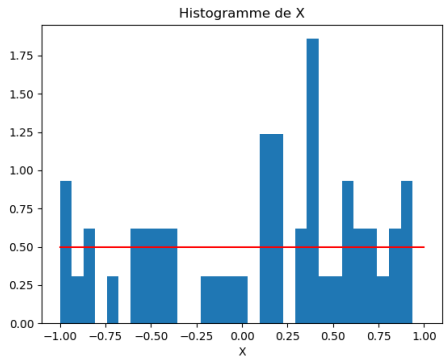
       plt.figure('Histogramme de X')
       plt.hist(x, bins=30, density=True)
       plt.plot([-1,1], [.5, .5], 'r')
       plt.show()

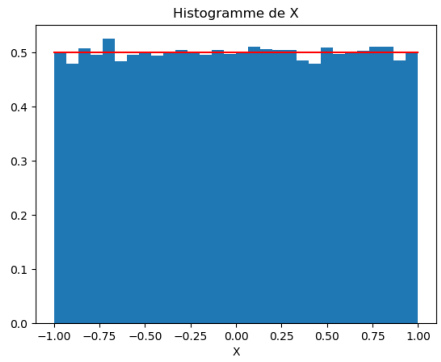
       plt.figure('Histogramme de Y')
   ```

```
    plt.hist(y, bins=30, density=True)
    plt.plot([-1,1], [.5, .5], 'r')
    plt.show()

N = 50000
densitiesXY(N)
```

- L'idée de cette question est de vérifier que l'histogramme des tirages aléatoires de X et Y, normalisé grâce à l'argument `density=True`, converge pour N grand vers ce qu'on appelle les densités de probabilité de X et Y, qui pour des variables uniformes sur $[-1;1]$ vaut $\rho_X = \rho_Y = 1/2$. Ceux qui feront des statistiques comprendront ce résultat grâce à la loi des grands nombres. Ici, on trace donc l'histogramme normalisé et la densité de probabilité constante égale à $1/2$ pour X et Y, et on choisit un histogramme à 30 colonnes avec l'argument `bins=30`. On vérifie ensuite que la droite s'aligne bien, à quelques faibles fluctuations près, au sommet de l'histogramme. Pour N faible, ça ne marche pas (premier plot), et pour N grand, ça marche (second plot) :





- Pour tracer en rouge le segment d'ordonnée constante égale à $1/2$ s'étirant de -1 à 1 il nous suffit d'utiliser `plt.plot()` pour tracer la droite reliant les deux points $(-1, 1/2)$ et $(1, 1/2)$, c'est-à-dire avec les abscisses `x=[-1,1]` et les ordonnées `y=[.5,.5]`.

5. On note $R^2 = X^2 + Y^2$ et $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Vérifier graphiquement que sur $[0;1]$, on a pour les densités ρ_{R^2} et ρ_R de R^2 et R :

$$\begin{aligned} \rho_{R^2}(0 \leq r \leq 1) &= \frac{\pi}{4} \\ \rho_R(0 \leq r \leq 1) &= \frac{\pi r}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Correction

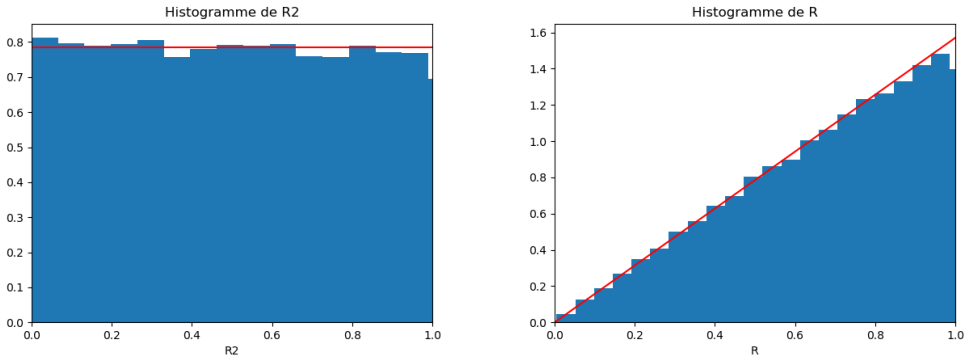
```
def densitiesR(N):
    r2, r = [], []
    for k in range(N):
        x, y = rd.uniform(-1,1), rd.uniform(-1,1)
        r2.append(x**2+y**2)
        r.append(math.sqrt(r2[-1]))

    plt.figure('Histogramme de R2')
    plt.hist(r2, bins=30, density=True)
    plt.plot([0,1], [math.pi/4, math.pi/4], 'r')
    plt.xlim((0,1))
    plt.show()
```

```
    plt.figure('Histogramme de R')
    plt.hist(r, bins=30, density=True)
    plt.plot([0,1], [0, math.pi/2], 'r')
    plt.xlim((0,1))
    plt.show()

N = 50000
densitiesR(N)
```

- On applique exactement le même principe de tracer sur la même figure l'histogramme normalisé et la densité de probabilité donnée dans l'énoncé :



6. *Bonus :* On veut nous-mêmes construire un histogramme sans utiliser la fonction `hist`. Nous allons le faire pour la distribution $Z \sim \mathcal{N}(0, 0.25)$. Pour cela, on partitionne $[-1; 1]$ en un ensemble de $2/b$ bandes de largeur b : $[-1; -1+b], [-1+b; -1+2b], [-1+2b; -1+3b], \ldots, [1-2b; 1-b], [1-b; 1]$ (on prend b tel que $2/b$ soit entier).

   Ecrire une fonction qui prend un argument un entier N et une largeur b et qui crée l'histogramme des tirages de Z. Pour cela, générer N tirages de Z en utilisant la fonction `gauss(`μ`, `σ`)` du module `random` avec $\mu = 0$, $\sigma = 0.25$. Utiliser un dictionnaire dont les clés sont les bords gauches des bandes $-1, -1+b, \ldots, 1-2b, 1-b$ et les valeurs associées sont les nombre de tirages compris dans les bandes correspondantes aux clés. Enfin, utiliser la fonction `bar` de `matplotlib` sur la liste des bords gauches des bandes (liste des clés `edges`) et sur la liste des nombres de tirages associés (liste des valeurs `vals`) pour tracer l'histogramme :

```
plt.bar(edges, vals, width=b, align='edge')
```

Correction

```
def selfHistogram(N, b):
    mu, sigma = 0, 0.25
    dico = {}
    edges = np.arange(-1, 1, b)
    for band in edges:
        dico[band] = 0

    for k in range(N):
        z = rd.gauss(mu,sigma)
        if z < -1 or z > 1:
            continue
        for band in edges[1:-1]:
            if z < band+b:
                dico[band] += 1
                break
```

```
    plt.figure('Histogramme a la main')
    plt.bar(edges, np.array(list(dico.values()))/N/b, width=b, align='edge')
    x = np.linspace(-1, 1, 200)
    y = np.exp(-(x-mu)**2/(2*sigma**2))/(math.sqrt(2*math.pi)*sigma)
    plt.plot(x, y, 'r')
    plt.show()

N = 50000
b = .05
selfHistogram(N, b)
```

4 Le module `numpy.random`

`numpy` vient avec son propre module `random`. Les fonctions de ce module sont sensiblement les mêmes que celles du module `random` de Python (`uniform`, `binomial`, `exponential`...), à l'exception de quelques-unes comme la loi normale/Gaussienne (`random` utilise `gauss` tandis que `numpy.random` utilise `normal`). On pourra les comparer dans leurs documentations respectives :

https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.17.0/reference/random/index.html

https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.17.0/reference/random/generator.html#numpy.random.Generator

De manière générale, les arguments des fonctions de `numpy.random` sont les mêmes que ceux de `random`, avec cependant l'argument supplémentaire `size`. Celui-ci permet de directement générer des valeurs aléatoires issues d'une distribution donnée dans un tableau `numpy` de taille désirée (type `numpy.ndarray`). Par exemple, pour la distribution uniforme :

- `random.uniform(0, 1)` retourne une unique valeur uniformément tirée entre 0 et 1.
- `np.random.uniform(0, 1, size=10000)` retourne un tableau de taille 10000 rempli de valeurs uniformément tirées entre 0 et 1.
- `np.random.uniform(0, 1, size=((10,3)))` retourne un tableau de taille 10x3 rempli de valeurs uniformément tirées entre 0 et 1.

L'avantage de `numpy.random` est donc de pouvoir générer d'un coup un grand nombre de données aléatoires dans un `numpy.ndarray` de taille choisie. En plus d'être souvent plus rapide que de générer 1 à 1 des valeurs avec `random`, on peut directement utiliser toutes les opérations de `numpy` sur les matrices obtenues. Par exemple, si on veut mettre au carré 1000 tirages d'une distribution uniforme sur [0;1], on écrit avec `random` :

```
x = []
for k in range(1000):
    x.append(random.uniform(0,1)**2)
```

Tandis qu'avec `numpy.random` :

```
x = np.random.uniform(0, 1, size=1000)**2
```

Exercice 4

Réécrire les programmes des questions 3, 4 et 5 de l'exercice 3 en utilisant le module `numpy.random`.

Correction

- ```
  import numpy as np

  def piApproxNP(N):
      r2 = np.random.uniform(-1, 1, size=N)**2 + np.random.uniform(-1, 1, size=N)
      **2
      n = len(r2[r2<=1])
      print("Approximation de pi :", 4*n/N)

      plt.figure('Approximation de pi')
      plt.plot(np.cos(np.linspace(0,2*np.pi,200)), np.sin(np.linspace(0,2*np.pi
      ,200)))
      plt.plot(x, y, 'ro')
      plt.title(str(N)+' points tires aleatoirement')
      plt.xlim((-1.45,1.45))
      plt.show()

  N = 200
  piApproxNP(N)
  ```

- ```
  import math

  def densitiesXYNP(N):
      x, y = np.random.uniform(-1, 1, size=N), np.random.uniform(-1, 1, size=N)

      plt.figure('Histogramme de X')
      plt.hist(x, bins=30, density=True)
      plt.plot([-1,1], [.5, .5], 'r')
      plt.show()

      plt.figure('Histogramme de Y')
      plt.hist(y, bins=30, density=True)
      plt.plot([-1,1], [.5, .5], 'r')
      plt.show()

  N = 50000
  densitiesXYNP(N)
  ```

- ```
  def densitiesRNP(N):
      r2 = np.random.uniform(-1, 1, size=N)**2 + np.random.uniform(-1, 1, size=N)
      **2
      r = np.sqrt(r2)

      plt.figure('Histogramme de R2')
      plt.hist(r2, bins=30, density=True)
      plt.plot([0,1], [math.pi/4, math.pi/4], 'r')
      plt.xlim((0,1))
      plt.show()

      plt.figure('Histogramme de R')
      plt.hist(r, bins=30, density=True)
      plt.plot([0,1], [0, math.pi/2], 'r')
      plt.xlim((0,1))
      plt.show()

  N = 50000
  densitiesRNP(N)
  ```
  ```