绪论

测量的不确定度分析与计算

1.误差的概念和分类

1.1.绝对误差和相对误差

(1)**绝对误差（Absolute error）**定义为测量值 X 与被测对象真实值 X_0之差：$\Delta X = X - X_0$

(2)**相对误差（Relative error）**定义为绝对误差 ΔX 与真实值 X_0之比：$\varepsilon = \frac{\Delta X}{X_0} \times 100\%$

需要说明的是，由于被测对象的真实值是不可知的或未知的，人们通常使用被测对象的公认值或多次测量的平均值作为对真实值的最佳评估值来取代公式中的真实值。

1.2 系统误差和随机误差

误差通常包含系统误差和随机误差。

(1)系统误差(System error)：对同一个量进行重复测量时，保持不变或以可预测的方式变化的误差。产生系统误差的原因有：实验方法的缺陷（如理论公式的近似），测量仪器使用前未被校准（如计时用的秒表走时过快或过慢），仪器操作不当（如实验前未对仪器调零），实验者视差造成的估计值偏差，以及未被识别的原因等。当系统误差对测量结果的影响已知时，可通过校正来将系统误差最小化。

(2)随机误差（Random error)：在相同条件下对同一个量进行重复测量时，以不可预测的方式变化的误差。造成随机误差的原因有：测量仪器的热噪声，测试条件的不可察变化，测试对象性质的变化，测量仪器的有限精度，实验者的估读偏差等。可通过增加测量次数来减小随机误差。

2.不确定度的概念和分类

实际的测量会受到各种现实条件的限制，如测量对象未被严格定义，测量仪器的分辨率有限，测量的方法存在近似，测试流程的缺陷，测试环境条件的波动，仪器示数的随机波动，估读时的人为偏差等，此外，还存在不可察的影响测量结果的因素。所有这些引起误差的因素都会造成测量结果的发散或不确定性。一个严谨的科技工作者在报告实验结果时一定会给出结果的不确定度。事实上，对实验结果进行不确定度分析是一个合格的实验研究人员必须掌握的基本技能。

2.1. 不确定度的概念

测量的不确定度（Measurement uncertainty）是用来表征测量结果离散程度的参数，是测量结果不确定程度或不准确度的量度。因为无法准确地确定被测对象的真实值，我们只能声明被测对象的真实值以一定概率（置信概率）落在以真实值的最佳评估值为中心、以不确定度为半宽度的区间（置信区间）内。由上面的定义可知，不确定度始终为正值，它是置信区间的半宽度，且存在唯一的置信概率与之对应。置信概率越大，不确定度所定义的置信区间就越宽，测量结果的发散度就越大，测量结果就越不准确。

不确定度包括绝对不确定度和相对不确定度。如果测量结果被表示为 $X_{meas} = X_{best} \pm \delta X$，式中，$X_{meas}$表示测量值，$X_{best}$表示对被测对象真实值的最佳估计值，$\delta X$ 则表示测量的绝对不确定度（absolute uncertainty）。由上式可知，绝对不确定度δX具有与测量值相同的量纲，同时可知，被测对象的真实值以一定的概率落在置信区间 $[X_{best} - \delta X, X_{best} + \delta X]$中。根据国际标准组织的规定，当没有给出置信概率时，置信概率的默认值为 95%。因此，上式的具体含义是被测对象的真实值落在置信区间 $[X_{best} - \delta X, X_{best} + \delta X]$内的概率为 95%。相对不确定度（relative uncertainty）被定义为绝对不确定度与真实值的最佳评估值的绝对值之比，即$\delta X_{\mathrm{rel}} = \frac{\delta X}{|X_{best}|} \times 100\%$ 。由上式可知，相对不确定度始终为正值，且以百分号（%）为单位。与绝对不确定度相比，相对不确定度可以更准确地描述测量的精度。

2.2 测量误差和测量不确定度的区别和联系

由定义可知，测量误差和不确定度是两个不同的概念。误差是指测量值与被测对象的真实值之间的差值，而不确定度是指被测对象的真实值以一定的置信概率出现在以真实值的最佳评估值为中心的区间的单侧宽度。测量误差既可以取正号也可以取负号，且前面不能加“±”号，而不确定度只能取正值，且前面必须加“±”号。测量误差没有置信概率与之对应，而不确定度有唯一的置信概率与之对应。测量误差通过测量可以直接得到，而测量不确定度需要较繁琐的分析和计算才能得到。两者的联系在于，随机因素不但会造成随机误差也会造成由随机效应引起的不确定度，系统因素不但会造成系统误差也会造成由系统效应引起的不确定度。

2.3 测量不确定度的分类

(1)**标准不确定度（Standard uncertainty）**：以标准偏差（standard deviation）表示的测量结果的不确定度。

(2)**A 类标准不确定度（Type A standard uncertainty）**：采用统计学方法对相同条件下多次重复测量结果评估得到的标准不确定度分量。

(3)**B 类标准不确定度（Type B standard uncertainty）**：采用除 A 类评估方法以外的其它方法评估得到的标准不确定度分量。

(4)合成标准不确定度（Combined standard uncertainty）：当一个目标测量量是由多个量决定时，目标测量量的标准不确定度需要由所有相关量各自的标准不确定度采用方和根（先平方、再求和、最后开平方根）的形式求和得到的目标测量结果的标准不确定度就称为合成标准不确定度u_c。

(5)**扩展不确定度(Expanded uncertainty)：** 合成标准不确定度 u_c 与包含因子(coverage factor) k 的乘积被定义为扩展不确定度 U，即$U = k \cdot u_c$。扩展不确定度主要应用于涉及生命、安全和某些工业领域，它们希望测量对象的真实值落在扩展不确定度定义的区间内的概率接近100%。需要说明的是，与扩展不确定度对应的概率被称为包含概率（coverage probability）或置信水平(level of confidence)，与扩展不确定度对应的区间被称为包含区间(coverage interval)。此外，包含因子 k 的值是根据包含区间$[X_{best} - U, X_{best} + U]$和置信水平选择的， k 通常的取值区间为[2, 3]。

3. 与 A 类不确定度分量处理相关的统计学知识

不确定度有可以用统计学方法处理的 A 类不确定度分量，也有不能用统计学方法处理的 B 类不确定度分量。A 类不确定度分量主要是由随机波动引起的，可以用统计学理论进行分析和处理。下面对不确定度分析用到的相关统计学知识做一个简要的回顾。

3.1 相关基本概念

(1)概率密度函数（Probability density function）：描述随机变量取值与出现概率关系的函数，且对所有取值出现的概率求和等于 1。如果随机变量取值范围为（-∞, +∞），则概率密度函数 f(x)满足如下关系

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{1}$$

需要说明的是，上式适用于连续型随机变量。对于离散型随机变量，只需将上面的积分号变为求和符号。常用于不确定度分析的概率密度分布函数有正态分布（高斯分布），均匀分布（矩形分布），三角形分布，t-分布（学生分布）等。

(2)期望值（Expectation）：函数 $g(x)$的期望值 $E[g(x)]$为函数 $g(x)$与概率密度 $f(x)$的乘积在整个定义域上的积分，用公式表示为：

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx \tag{2}$$

可以证明，当测量次数$N \to +\infty$时，随机变量 x 的期望值等于其算术平均值（arithmetic mean or average），即

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \bar{x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{3}$$

(3)方差（Variance）：定义为随机变量 x 偏离其期望值（算术平均值）$\bar{x}$距离的平方的期望值。随机变量的方差通常用σ^2表示，用公式表示为：

$$\sigma^2 = E[(x-\bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 \cdot f(x) dx \tag{4}$$

需要说明的是，方差的量纲是随机变量量纲的平方，用起来不太方便，经常使用的是“标准偏差”这个概念，标准偏差是方差的正平方根。

(4)标准偏差（Standard deviation）:方差的正平方根定义为标准偏差，用来表征测量结果偏离期望值的程度（即测量结果的发散性），通常用 s 表示。标准偏差进一步可分为总体标准偏差（Population standard deviation），样本标准偏差（Sample standard deviation）和平均值的实验标准偏差（Standard deviation of the mean），后两种常常用于不确定度的分析和计算中。

<1>**总体标准偏差**（Population standard deviation）：当测量次数$N \to +\infty$时的标准偏差，用公式表示为

$$s_p = \lim_{N\to\infty} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \tag{5}$$

<2>**样本标准偏差**（Sample standard deviation）：当测量次数为有限次时的标准偏差，由贝塞尔公式（Bessel formula）求得

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \tag{6}$$

需要说明的是，式中的 N-1 是由于各测量值 x_i 受到了平均值（$\bar{x}$）的约束，只有 N-1 个量是独立的。此外，样本标准偏差有时也被称为实验标准偏差（Experimental standard deviation）。

<3>**平均值的标准偏差（Standard deviation of the mean）**：由实验结果的平均值作为随机变量引起的标准偏差，用公式表示为

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \tag{7}$$

需要说明的是，平均值的标准偏差有时也被称为平均值的实验标准偏差。由于多次重复测量值的算术平均值被视为被测对象真实值的最佳估计值，所以与算术平均值相对应的平均值的实验标准偏差通常用作实验结果的标准不确定度（Standard uncertainty），这也是(7)式在不确定分析和计算中被频繁使用的根本原因。

3.2 正态分布（高斯分布）

通过大量实践发现，在相同条件下以足够多的次数重复测量同一个量时，测量结果通常呈中心高两头低的对称型钟形分布，这种分布在统计学上被称为正态分布或高斯分布。人们进一步从理论上证明，如果 x 的测量受到许多独立的、相同程度的随机分量的影响，且每个随机分量的影响都很微小时，则最终结果为正态分布，而与每个随机分量的分布类型无关。这就是著名的中心极限定理。从该定理出发可以得出一个对不确定度分析非常有用的重要结论，即，当测量次数 N 足够大，样本平均值$\bar{x}$的分布就可视为正态分布，即使这些样本来自于非高斯分布。总之，高斯分布是随机变量最常见的一种分布，而且它在概率统计及其应用（譬如不确定度分析）中起着关键的基础性作用。基于以上原因，我们假定本书中对测量结果不确定度有贡献的随机变量均满足高斯分布。事实上，不是所有的随机变量均满足高斯分布，它们还可能满足其它分布，具体可参见有关概率统计的书籍。

高斯分布的概率密度函数可写作：

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\qquad x\in(-\infty,\ +\infty) \tag{8}$$

式中，μ 是随机变量 x 的期望值（真实值的最佳评估值，通常用算术平均值代替），σ是高斯分布的标准偏差，也被称为宽度参数。图 1 给出了不同 μ 和σ取值时的高斯分布曲线。由图可知，宽度参数σ越大，分布越宽，峰值越低。

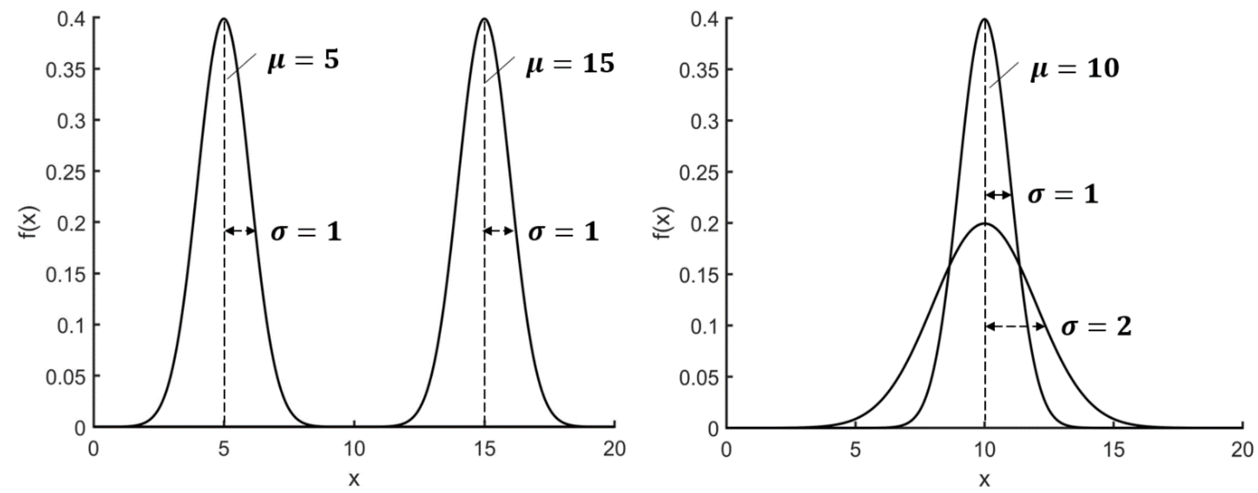

图 1. 正态分布：左侧为相同σ值和不同μ值，右侧为相同μ值和不同σ值

可以证明

$$\bar{x} = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \tag{9}$$

上式表明，当测量次数$N \to +\infty$时，满足高斯分布的随机变量 x 的期望值μ等于其算术平均值。

$$\sigma^2 = E[(x-\bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \tag{10}$$

上式表明，当测量次数$N \to +\infty$时，满足高斯分布的随机变量 x 的测量值的标准偏差s正好等于高斯函数的宽度参数σ，即$s = \sigma$。

为了计算积分，我们做如下变量替代，

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{11}$$

x的高斯分布的概率密度函数$f(x)$可变为z的标准正态分布的概率密度函数$g(z)$：

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \tag{12}$$

由上式可知，标准正态分布的概率密度曲线的算术平均值$\bar{z} = 0$，标准偏差 σ=1，如图2所示。

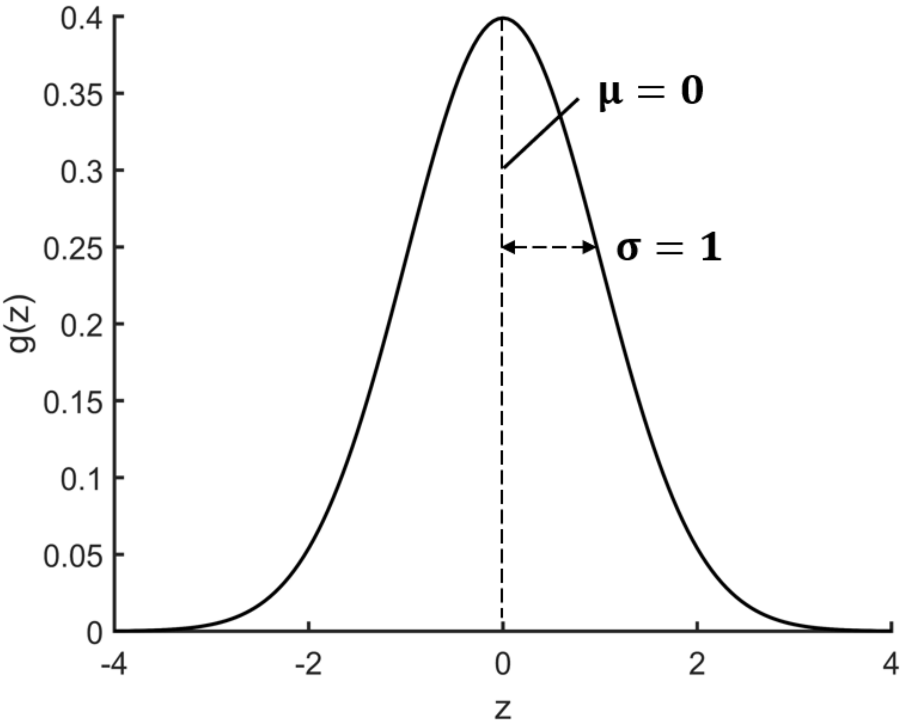

图2. 标准正态分布的概率密度函数曲线

利用标准正态密度函数积分表（附录 1），可以得到随机变量 x 包含在以期望值μ为中心、半宽度分别为σ、2σ和 3σ的区间内的概率，如图 3 所示：

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx = \int_{-1}^{1} g(z)dz = 0.6826 \tag{13}$$

$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)dx = \int_{-2}^{2} g(z)dz = 0.9544 \tag{14}$$

$$\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)dx = \int_{-3}^{3} g(z)dz = 0.9974 \tag{15}$$

上面的式子表明，满足正态分布的随机变量 x 的真实值落在置信区间$(\bar{x}-\sigma,\ \bar{x}+\sigma)$、$(\bar{x}-2\sigma,\ \bar{x}+2\sigma)$ 和 $(\bar{x}-3\sigma,\ \bar{x}+3\sigma)$ 的置信概率分别为 68.26%、95.44% 和 99.74%。

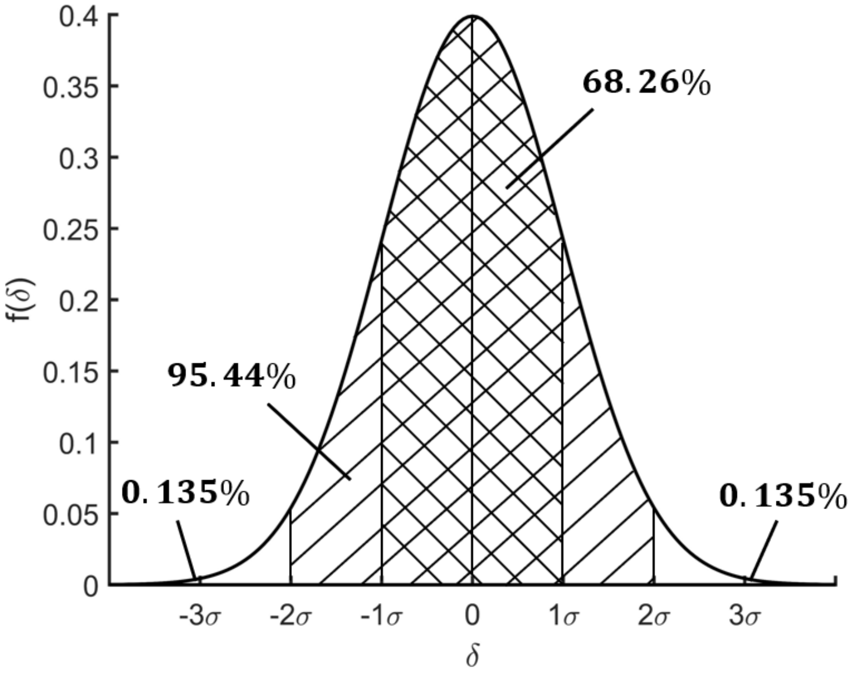

图 3. 标准正态分布的概率密度函数曲线上不同置信区间对应的置信概率

3.3 t-分布（学生分布）

对于具有高斯分布的随机变量 x，重复多次测量得到的算术平均值$\bar{x}$是其真实值μ的最佳估计值，而算术平均值$\bar{x}$的不确定度由其标准偏差$s(\bar{x})$表示。$\bar{x}$和$s(\bar{x})$的取值均与测量的次数 N 有关，且$\bar{x}$的不确定度$s(\bar{x})$随着测量次数 N 的减小而增大。为了准确评估有限次测量结果的不确定度（给定置信概率下的置信区间），需要引入一个新的随机变量

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s(\bar{x})} \tag{16}$$

式中$\bar{x}$是随机变量 x 的算术平均值，μ是随机变量 x 的期望值，$s(\bar{x})$是算术平均值$\bar{x}$的标准偏差。对于有限的 N 次测量，具有自由度数为$v = N - 1$的随机变量 t 满足 t-分布（也被称为学生分布），其概率密度函数为

$$f(t, v) = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2} \tag{17}$$

当$v \to +\infty$时，t-分布的概率密度函数将转变为 t 的标准正态分布的概率密度函数，即

$$\lim_{v\to\infty} f(t, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \tag{18}$$

图 4 给出了自由度v=1 和v=3 时的 t-分布概率密度曲线，作为比较，同时给出了标准正态分布的概率密度曲线。由图可知，与标准正态分布相比，t-分布的峰值高度降低，曲线的宽度变宽，这意味着对应于同一置信概率，由 t-分布确定的置信区间的宽度更宽，这与人们的常

识（测量次数减小，不确定度变大）是一致的。另外，由(16)式可知，t 是一个无量纲的数，只要将(16)式稍加变形就可以了解 t 的物理意义，

$$\bar{x} = \mu + t \cdot s(\bar{x}) \tag{19}$$

因为$\bar{x}$有可能大于μ，也有可能小于μ，而$s(\bar{x})$恒大于零，如果取$t_p = |t|$，则上式可写为

$$\bar{x} = \mu \pm t_p \cdot s(\bar{x}) \tag{20}$$

上式中的t_p正是我们之前给出的包含因子（coverage factor）k。由于 t-分布的形式复杂，不方便积分，为此，人们根据 t-分布计算了对应于不同置信概率 P 和自由度v的t_p值，并将其制成了表格，见附录 2。根据所要求的置信概率（默认值为 95%）和所计算出的自由度数v，通过查 t-分布表，就可得到包含因子 k 的值。由 t-分布表可知，当$v \to +\infty$时，置信概率为 90%，95%和 99%对应的 k 值分别等于 1.64，1.96 和 2.576，该值与正态分布的值完全一样。

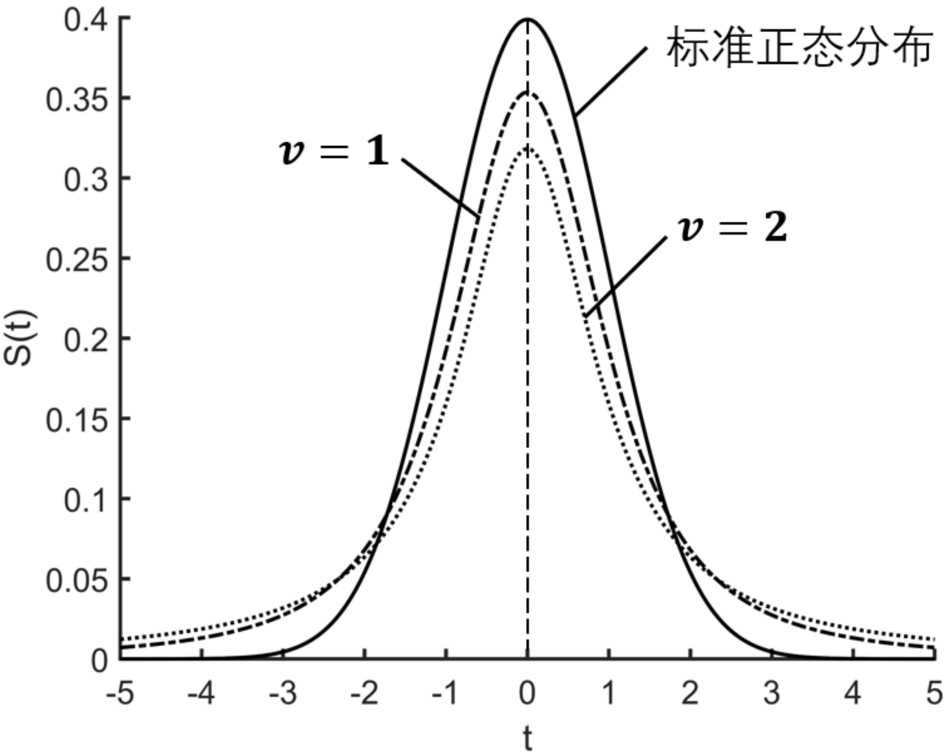

图 4. 自由度取不同值时的 t-分布和标准正态分布的概率密度函数的比较

3.4 自由度

自由度是指在一个系统中独立变化的变量的个数。以 A 类不确定度的评估为例，如果对一个量 x 重复测量了 N次，且已知测量量的平均值为 $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$，则系统有 N-1 个自由度，因为系统中只有 N-1 个量是独立的。

当我们由 t-分布确定给定置信水平下的包含因子 k 时，会发现自由度v越大，包含因子越小，这意味着用来表征扩展不确定度的置信区间的半宽度越窄，测量结果的不确定度越小。因此，自由度v与测量结果的平均值的标准偏差$s(\bar{x})$是相关的。假定平均值$\bar{x}$满足正态分布，用$s(\bar{x})$的方差$\sigma^2[s(\bar{x})]$来表示$s(\bar{x})$的不确定度，则$\sigma^2[s(\bar{x})]$ 可以近似表示为$s(\bar{x})$和自由度v的函数：

$$\sigma^2[s(\bar{x})] \approx \frac{[s(\bar{x})]^2}{2v} \tag{21}$$

对上式进一步变形，可给出自由度v的表达式

$$v \approx \frac{[s(\bar{x})]^2}{2\sigma^2[s(\bar{x})]} = \frac{1}{2\left\{\frac{\sigma[s(\bar{x})]}{s(\bar{x})}\right\}^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sigma[s(\bar{x})]}{s(\bar{x})}\right\}^{-2} \tag{22}$$

上式大括号中的项表示$s(\bar{x})$的相对标准偏差，用来表征$s(\bar{x})$的相对不确定度。根据(22)式，$s(\bar{x})$的相对标准偏差可以用自由度v表示为

$$\frac{\sigma[s(\bar{x})]}{s(\bar{x})} = \frac{1}{\sqrt{2v}} \tag{23}$$

如果对一个满足正态分布的随机变量 x 进行 N 次独立测量，自由度为$v = N - 1$, 则$s(\bar{x})$的相对标准偏差可表示为

$$\frac{\sigma[s(\bar{x})]}{s(\bar{x})} = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} \tag{24}$$

事实上，不仅是平均值的标准偏差$s(\bar{x})$的相对标准偏差（相对不确定度）等于$1/\sqrt{2(N-1)}$，由贝塞尔公式计算的样本标准偏差（或实验标准偏差）$s(x_i)$的相对标准偏差（相对不确定度）也等于$1/\sqrt{2(N-1)}$。根据(24)式，我们可以对不同测量次数得到的测量结果的标准不确定度的相对不确定度做一个估计：若进行 3 次测量，所得结果的标准不确定度的相对不确定度为 50%；若进行 5 次测量，$s(\bar{x})$的相对不确定度降为 35%；若进行 7 次测量，其降为 29%；若进行 10 次测量，其降为 24%；若进行 20 次测量，其降为 16%。

4. 与 B 类不确定度分量处理相关的知识

不论是 A 类不确定度分量的评估还是 B 类不确定度分量的评估，两者都是基于概率分布的思想，使用方差（variance）或标准偏差（standard deviation）来表征不确定度的分量。只是 A 类不确定度分量是以被测量满足的概率分布为基础进行评估的，而 B 类不确定度分量是评估者根据已有信息人为假设测量值具有某种分布进行评估的。假设被测量 x 的值处于[x_{min}, x_{max}]的区间内，区间的半宽度为$a = (x_{max} - x_{min})/2$，根据假设的被测量在区间内的概率密度分布函数，可获得标准偏差 $u(x_i)$，即为 B 类不确定度分量。对标准偏差 $u(x_i)$求平方可得到 B 类

方差 $u^2(x_i)$。为了与 A 类标准偏差和方差的表示方法有所区别，B 类标准偏差和方差通常用 $u(x_i)$和 $u^2(x_i)$来表示。

常用于评估 B 类不确定度分量的概率分布有矩形分布（均匀分布）和三角形分布。

4.1 矩形分布（均匀分布）

图 5 给出了矩形分布的概率密度曲线。由图可知，被测值在区间$[\mu-a,\ \mu+a]$内的概率处处相等，都等于 $1/2a$，而在区间外的概率为零。

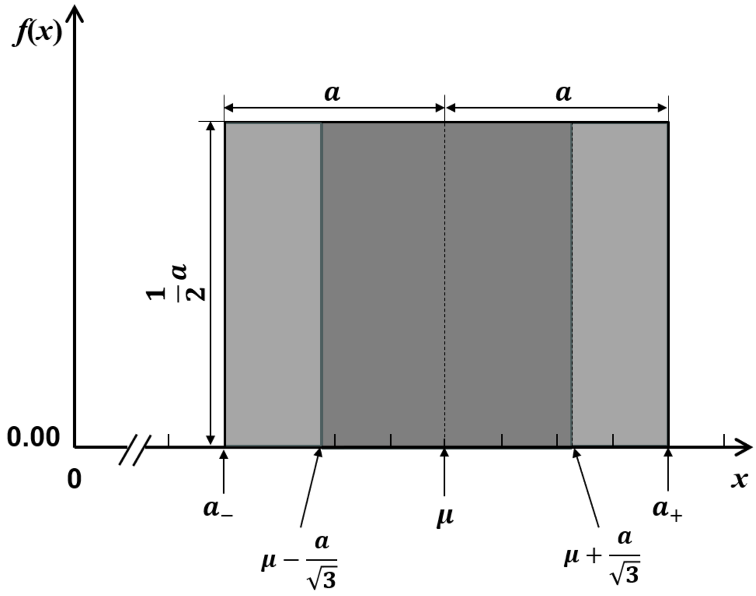

图 5. 矩形分布的概率密度曲线

由图不难看出，矩形分布的概率密度分布函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a},\ \mu-a\ \le\ x\le\mu+a\\ 0,\ x<\mu-a\ \text{or}\ x>\mu+a\end{cases} \tag{25}$$

被测量 x 的方差为：

$$u^2(x)=E[(x-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)dx=\int_{\mu-a}^{\mu+a}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{2a}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}t^2\,dt=\frac{a^2}{3}$$

所以，对于区间半宽度为 a 的矩形分布，被测量 x 的标准偏差为

$$u(x)=\frac{a}{\sqrt{3}} \tag{26}$$

需要说明的是，区间半宽度 a 对应于置信概率为 100%的扩展不确定度 U_{100}，$u(x)$为标准偏差，即标准不确定度，因此，$\sqrt{3}$ 实际对应于置信概率为 100%的包含因子 k。对于矩形分布，当置信概率为 95%时，此时的区间半宽度为 0.95a，对应于置信概率为 95%的包含因子 k_{95} 为

$$k_{95}=\frac{0.95a}{u(x)}=\frac{0.95a}{a/\sqrt{3}}=0.95\cdot\sqrt{3}=1.65 \tag{27}$$

同理可得，置信概率为 99%的包含因子$k_{99}=0.99\cdot\sqrt{3}=1.71$。

4.2 三角形分布

在许多情况下，测量值出现在区间中心附近的概率比出现在边界附近的概率更高。对于这种情况，应假设测量值呈三角形分布。图 6 给出了三角形分布的概率密度曲线。由图可知，底边为区间$[\mu-a,\ \mu+a]$，其宽度等于 2a，两个边界点的概率为零，区间中心的概率最高，等于三角形的高度 $1/a$，而在区间外的概率为零。

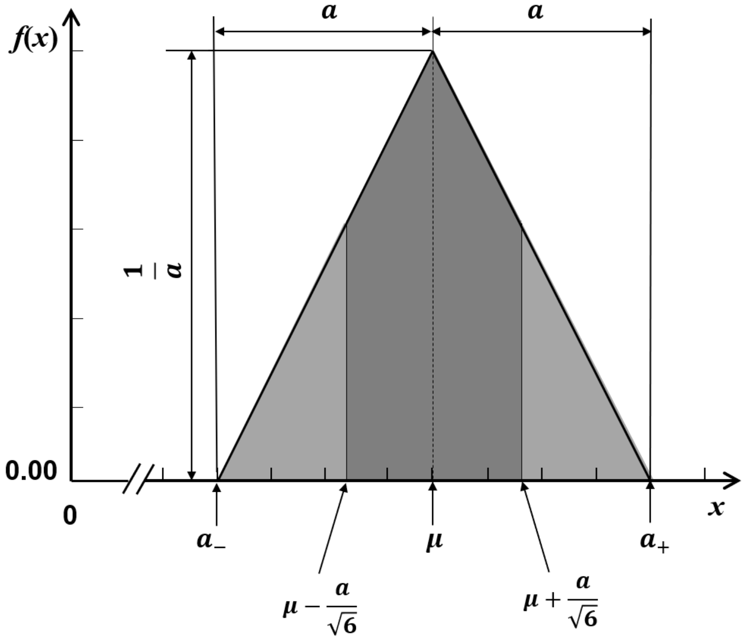

图 6. 三角形分布的概率密度曲线

由图不难看出，三角形分布的概率密度分布函数为：

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<\mu+a\\ \frac{x-(\mu-a)}{a^2}, & \mu-a\le x\le\mu\\ \frac{-x+(\mu+a)}{a^2}, & \mu< x\le\mu+a\\ 0, & x>\mu+a\end{cases} \tag{28}$$

被测量 x 的方差为：

$$u^2(x)=E[(x-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)dx=\int_{\mu-a}^{\mu}(x-\mu)^2\cdot\frac{x-(\mu-a)}{a^2}dx+\int_{\mu}^{\mu+a}(x-\mu)^2\cdot\frac{-x+(\mu+a)}{a^2}dx=\int_{-a}^{0}t^2\cdot\frac{t+a}{a^2}dt+\int_{0}^{a}t^2\cdot\frac{a-t}{a^2}dt=\frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{12}=\frac{a^2}{6}$$

所以，对于区间半宽度为 a 的三角形分布，被测量 x 的标准偏差为

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{6}} \tag{29}$$

同样地，区间半宽度 a 对应于置信概率为 100%的扩展不确定度 U_{100}，$u(x)$为标准偏差或标准不确定度，$\sqrt{6}$对应于置信概率为 100%的包含因子 k。进一步，可利用两个相似三角形的面积比等于概率比求出置信概率为 95%对应的区间半宽度为$\left(1-\sqrt{5}/10\right)a = 0.7764a$，进而可求出对应于置信概率为 95%的包含因子 k_{95} 为

$$k_{95} = \frac{0.7764a}{u(x)} = \frac{0.7764a}{a/\sqrt{6}} = 0.7764 \cdot \sqrt{6} = 1.90 \tag{30}$$

同理，可求出置信概率为 99%对应的区间半宽度为 9a/10，对应的包含因子 k_{99} 为 2.20。

5. 直接测量量的不确定度分量以及合成不确定度和扩展不确定度的评估

5.1 A 类不确定度分量的评估

假设对一个随机变量 x 进行了 N 次重复测量，其算术平均值作为对被测量 x 的最佳统计评估值，平均值的标准偏差$s(\bar{x})$作为实验结果的标准不确定度，自由度数$v = N - 1$。经常使用的两个公式是：

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{31}$$

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \tag{32}$$

实验结果记为：$x = \bar{x} + s(\bar{x})$，其中自由度数为$v = N - 1$。 (33)

【例 1】使用介质损耗测试仪对一块印刷电路板样品的相对介电常数进行了 10 次重复测量，测量结果如下：5.61, 5.64, 5.59, 5.72, 5.41, 5.45, 5.49, 5.55, 5.64, 5.68，试给出实验结果以及标准不确定度。

解：$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{10}(5.61 + 5.64 + \cdots + 5.64 + 5.68) = 5.578$

$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{10\times 9}\left[(5.61 - 5.578)^2 + \cdots + (5.61 - 5.578)^2\right]} = 0.032$

实验结果记为：$x = \bar{x} \pm s(\bar{x}) = 5.578 \pm 0.032$，其中自由度数为$v = N - 1 = 9$。

5.2 B 类不确定度分量的评估

对一个非重复测量得到的量 x 进行不确定度分析时，评估者需根据已获得的信息人为假定其服从某种概率分布来评估其方差 $u^2(x)$或标准不确定度 u(x)。具体步骤是，首先根据量 x 的变化范围确定其半宽度 a，然后根据假定的概率分布计算标准不确定度

$$u(x) = \frac{a}{k} \tag{34}$$

在 100%和 95%置信概率下，矩形分布时的包含因子 k 值分别为$\sqrt{3}$和 1.65，三角形分布时的包含因子 k 值分别为$\sqrt{6}$和 1.90，正态分布时的包含因子 k 值分别为 3 和 1.96。

通常认为 B 类评估方法确定的不确定度是精确已知的，因此，其自由度通常取 $v \rightarrow +\infty$。否则，利用类似于（22）式的下式来估计自由度

$$v \approx \frac{[u(x)]^2}{2\sigma^2[u(x)]} = \frac{1}{2\left[\frac{\Delta u(x)}{u(x)}\right]^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x)}{u(x)}\right]^{-2} \tag{35}$$

【例 2】使用精度为 0.02mm 的游标卡尺测量一铝合金样品的厚度，测量值为 65.78mm。试给出实验结果以及标准不确定度。

解：假设被测量在游标卡尺最小刻度以下的值呈矩形分布，由游标卡尺分辨率引起的 B 类不确定度为

$$u(x) = \frac{a}{k} = \frac{0.02}{2\sqrt{3}} = \frac{0.02}{\sqrt{12}} = 0.0058\ \mathrm{mm}$$

实验结果记为：$x = \mu \pm u(x) = 65.780 \pm 0.006$，其中自由度数为 $v \rightarrow +\infty$。

【例 3】手册中给出的室温下石英玻璃的热导率 $k = 1.46\ \mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$，并声明这个值的误差不会超过$0.04\ \mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$。试给出室温下石英玻璃的热导率的标准不确定度。

解：假定室温下石英玻璃的热导率在[1.42, 1.50]区间内矩形分布，区间半宽度$a = 0.04\ \mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$，标准不确定度为

$$u(\lambda) = \frac{a}{k} = \frac{0.04}{\sqrt{3}} = 0.023\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$$

室温下石英玻璃的热导率应记为：$k = \mu \pm u(\lambda) = 1.46 \pm 0.02\ \mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$，其中自由度数为 $v \rightarrow +\infty$。

5.3 直接测量量的合成标准不确定度以及扩展不确定度的评估

直接测量量的合成标准不确定度$u_c(x)$由其 A 类标准不确定度分量$s(\bar{x})$与其 B 类标准不确定度分量$u(x)$采用方和根法合成，即

$$u_c(x)=\sqrt{s^2(\bar{x})+u^2(x)}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N-1}+\left(\frac{a}{k}\right)^2} \tag{36}$$

合成标准不确定度u_c的自由度称为有效自由度，用v_{eff}表示。当各分量间相互独立且合成量接近正态分布或 t 分布时，有效自由度v_{eff}可以由下面的韦尔奇-萨特韦特（Welch-Satterthwaite）公式计算：

$$v_{eff}=\frac{u_c^4(x)}{\frac{s^4(\bar{x})}{v_A}+\frac{u^4(x)}{v_B}} \tag{37}$$

式中v_A和v_B分别是 A 类和 B 类标准不确定度分量对应的自由度数。由上式可以看出，当一个具有较大自由度的不确定度分量与一个具有较小自由度的不确定度分量合成时，合成的标准不确定度的有效自由度主要受较小自由度的限制。当需要评定扩展不确定度 U 时，可根据合成标准不确定度的有效自由度v_{eff}和给定的置信概率（譬如 95%），通过查 t-分布表得出包含因子 k，进而给出扩展不确定度$U=k\cdot u_c$。

【例 4】使用精度为 0.02mm 的游标卡尺测量一铝合金样品的厚度，一共进行了 10 次测量，测量结果为 65.78mm，65.76mm，65.74mm，65.76mm，65.80mm，65.78mm，65.76mm，65.74mm，65.78mm，65.80mm。试给出实验结果的合成标准不确定度以及 95%置信概率下的扩展不确定度。

解：(1)先计算算术平均值和 A 类标准不确定度分量

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i=\frac{1}{10}(65.78+65.76+\cdots+65.78+65.8)=65.77\ \mathrm{mm}$$

$$s(\bar{x})=\sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{10\times 9}[(65.78-65.77)^2+\cdots+(65.8-65.77)^2]}=0.0068\ \mathrm{mm}$$

实验结果记为：$x=\bar{x}\pm s(\bar{x})=65.770\pm 0.007\ \mathrm{mm}$，其中自由度数为$v=N-1=9$。

(2)计算因游标卡尺分辨率有限引起的 B 类不确定度（假定矩形分布）为

$$u(x)=\frac{a}{k}=\frac{0.02}{2\sqrt{3}}=\frac{0.02}{\sqrt{12}}=0.0058\ \mathrm{mm}$$

该不确定度对应的自由度数为 $v\to+\infty$。

(3)计算合成标准不确定度以及对应的有效自由度数

$$u_c(x)=\sqrt{s^2(\bar{x})+u^2(x)}=\sqrt{(0.0068)^2+(0.0058)^2}=0.0089\ \mathrm{mm}$$

合成标准不确定度对应的有效自由度为

$$v_{eff}=\frac{u_c^4(x)}{\frac{s^4(\bar{x})}{v_A}+\frac{u^4(x)}{v_B}}=\frac{(0.0089)^4}{\frac{(0.0068)^4}{9}+\frac{(0.0058)^4}{\infty}}=\frac{(0.0089)^4}{\frac{(0.0068)^4}{9}}=9\times\left(\frac{89}{68}\right)^4=26.4$$

为了不夸大测量的精度，有效自由度取小于计算值的整数，即$v_{eff}=26$。

(4)计算扩展不确定度。根据$v_{eff}=26$和置信概率 P=95%，查 t-分布表，可得包含因子 k=2.06，所以扩展不确定度为

$$U=k\cdot u_c=2.06\times 0.0089=0.018\ \mathrm{mm}$$

所以在95%的置信概率下，$x=\bar{x}\pm U=\bar{x}\pm k\cdot u_c=65.77\pm 0.02\ \mathrm{mm}$，其中包含因子 k=2.06。

6. 间接测量量的合成不确定度以及扩展不确定度的评估

6.1 标准不确定的传播规律

标准不确定度传播规律的数学基础是全微分。假设间接测量量 F 与直接测量量 x, y, z, ⋯满足函数关系 $F=f(x,y,z,\cdots)$，且各个直接测量量 x, y, z, ⋯是相互独立的。当各个直接测量量的不确定度分别为$\Delta x,\Delta y,\Delta z,\cdots$时，间接测量量 F 的不确定度$\Delta F$可以表示为：

$$\Delta F=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z+\cdots \tag{38}$$

考虑最坏的情况，间接测量量 F 的不确定度ΔF可以表示为：

$$|\Delta F|=\left|\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\right|+\left|\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z\right|+\cdots \tag{39}$$

对于以标准偏差表示的标准不确定度，需以方和根的形式求和，因此，当各个直接测量量依次有$s(\bar{x}),s(\bar{y}),s(\bar{z}),\cdots$的标准不确定度时，间接测量量 F 的标准不确定度$s(\bar{F})$可以表示为

$$s(\bar{F})=\sqrt{\left[\frac{\partial F}{\partial x}s(\bar{x})\right]^2+\left[\frac{\partial F}{\partial y}s(\bar{y})\right]^2+\left[\frac{\partial F}{\partial z}s(\bar{z})\right]^2+\cdots}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2s^2(\bar{x})+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2s^2(\bar{y})+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2s^2(\bar{z})+\cdots} \tag{40}$$

上式就是标准不确定度传播的一般公式。事实上，A 类标准不确定度和 B 类标准不确定度都是用方差或标准偏差来表征的，并无本质上的区别。因此，上式同样适用于评估 B 类标准不确定度对间接测量量不确定度的贡献。若无需对 A 类和 B 类标准不确定度进行区分，可统一用$u(x_i)$表示它们。当有 N个相互独立的量$x_1,x_2,x_3,\cdots$对间接测量量 F的不确定度有贡献时，则(40)式可写成更简洁的形式

$$u_c(F)=\sqrt{\sum_{i=1}^N\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}u(x_i)\right]^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2u^2(x_i)}=\sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2u^2(x_i)} \tag{41}$$

【例 5】假设$F=f(x_1,x_2,x_3,\cdots x_N)=A\cdot x_1^{p_1}\cdot x_2^{p_2}\cdot x_3^{p_3}\cdot\cdots\cdot x_N^{p_N}$，试证明相对标准不确定度满足如下关系：

$$u_{c,rel}(F)=\frac{u_c(F)}{|F|}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{p_i\cdot u(x_i)}{x_i}\right]^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}[p_i\cdot u_{rel}(x_i)]^2} \tag{42}$$

证明：对等式$F=A\cdot x_1^{p_1}\cdot x_2^{p_2}\cdot x_3^{p_3}\cdot\cdots\cdot x_N^{p_N}$两边取常用对数可得

$$\ln F=\ln A+p_1\cdot\ln x_1+p_2\cdot\ln x_2+\cdots+p_N\cdot\ln x_N$$

然后再对两边取微分，可得

$$\frac{\Delta F}{F}=p_1\cdot\frac{\Delta x_1}{x_1}+p_2\cdot\frac{\Delta x_2}{x_2}+\cdots+p_1\cdot\frac{\Delta x_N}{x_N}$$

考虑最坏的情况，间接测量量 F的相对不确定度可以表示为：

$$\left|\frac{\Delta F}{F}\right|=\left|p_1\cdot\frac{\Delta x_1}{x_1}\right|+\left|p_2\cdot\frac{\Delta x_2}{x_2}\right|+\cdots+\left|p_1\cdot\frac{\Delta x_N}{x_N}\right|$$

如果各相对不确定度都以相对标准不确定度表示，求和以方和根的形式进行，所以

$$u_{c,rel}(F)=\frac{u_c(F)}{|F|}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{p_i\cdot u(x_i)}{x_i}\right]^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}[p_i\cdot u_{rel}(x_i)]^2}$$

上式说明，当间接测量量是若干个量的乘积或商时，使用相对标准不确定度进行不确定度的合成，计算起来更加简便。

6.2 间接测量量的合成标准不确定度以及扩展不确定度的评估

当间接测量量 F与 K个相互独立的直接测量量$x_1,x_2,\cdots x_K$以函数关系$F=f(x_1,x_2,\cdots,x_K)$联系时，其合成标准不确定度或相对不确定度可由如下步骤评估。

(1)计算各直接测量量x_i的平均值$\bar{x}_i$，以及平均值的实验标准偏差$s(\bar{x}_i)$（A 类标准不确定度）及其对应的自由度v_i。

(2)计算因仪器分辨率有限引入的 B 类不确定度分量的标准偏差（标准不确定度）u_j以及自由度v_j。

(3)计算各直接测量量的合成标准不确定度和有效自由度。其中有效自由度使用下式计算

$$v_{eff,x_i}=\frac{u_c^4(x_i)}{\frac{s^4(\bar{x}_i)}{v_{i,A}}+\frac{u_B^4(x_i)}{v_{i,B}}} \tag{43}$$

(4)将各直接测量量写成$x_i=\bar{x}_i\pm u_c(\bar{x}_i)$的形式，并给出对应的有效自由度。

(5)计算间接测量量的平均值（最佳评估值）$\bar{F}=f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_K)$，并利用公式(41)计算间接测量量 F的合成标准不确定度。

(6)使用下面的韦尔奇-萨特韦特公式计算合成标准不确定度对应的有效自由度v_{eff}，即：

$$v_{eff}=\frac{u_c^4(F)}{\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i^4u^4(x_i)}{v_i}} \tag{44}$$

如果 v_{eff} 不是整数，则去掉小数部分取整，即将 v_{eff} 取为一个不大于 v_{eff} 本身的整数。

(7)根据置信概率 P（通常取 95%）和有效自由度v_{eff}，查 t-分布表可得到置信系数 k，然后计算扩展不确定度 $U=k\cdot u_c$

【例 6】用精度为 0.01mm 的千分尺测量了铜导线的直径 10 次。测量结果分别为 0.251mm，0.252mm，0.250mm，0.249mm，0.251mm，0.252mm，0.253mm,0.251mm，0.252mm，0.250mm，请给出铜导线的横截面积以及在 95%置信概率下的扩展不确定度。

解：导线的横截面积 A 与导线直径 D 的关系为：

$$A=\frac{\pi}{4}D^2$$

(1)先计算直接测量量（直径 D）的平均值和 A 类标准不确定度分量

$$\overline{D}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}D_i=\frac{1}{10}(0.251+0.252+\cdots+0.252+0.25)=0.2511\text{ mm}$$

$$s(\overline{D})=\sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(D_i-\overline{D})^2}=\sqrt{\frac{1}{10\times 9}[(0.251-0.2511)^2+\cdots+(0.25-0.2511)^2]}=$$

$$0.00038\text{ mm}$$

该 A 类标准不确定度对应的自由度数为$v=N-1=9$。

(2)计算因千分尺分辨率有限引起的 B 类不确定度（假定矩形分布）为

$$u(D)=\frac{a}{k}=\frac{0.01}{2\sqrt{3}}=\frac{0.01}{\sqrt{12}}=0.0029\text{ mm}$$

该 B 类标准不确定度对应的自由度数为 $v\rightarrow+\infty$。

(3)计算直接测量量（直径 D）的合成标准不确定度以及有效自由度

$$u_c(D)=\sqrt{s^2(\overline{D})+u^2(D)}=\sqrt{(0.00038)^2+(0.0029)^2}=0.0029\text{ mm}$$

合成标准不确定度对应的有效自由度为

$$v_{eff}=\frac{u_c^4(x)}{\frac{s^4(\bar{x})}{v_A}+\frac{u^4(x)}{v_B}}=\frac{(0.0029)^4}{\frac{(0.00038)^4}{9}+\frac{(0.0029)^4}{\infty}}=\frac{(0.0029)^4}{\frac{(0.00038)^4}{9}}=9\times\left(\frac{29}{3.8}\right)^4=30528.12$$

为了不夸大测量的精度，有效自由度取小于计算值的整数，即$v_{eff}=30528$。

(4)计算间接测量量（面积 A）的平均值、合成标准不确定度以及有效自由度

$$\bar{A}=\frac{\pi}{4}\overline{D}^2=\frac{\pi}{4}\times 0.2511^2=0.04952\ mm^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial D}=\frac{\pi}{2}D=\frac{\pi}{2}\times 0.2511=0.3944\ mm$$

$u_c(A) = \frac{\partial A}{\partial D} u_c(D) = 0.3944 \times 0.0029 = 0.0011\, mm^2$

面积的有效自由度与直径的有效自由度$v_{eff} = 30528$一致。

(5)计算扩展不确定度。根据$v_{eff} = 30528$和置信概率 P=95%，查 t-分布表，可得包含因子 k=1.96，所以扩展不确定度为

$U = k \cdot u_c = 1.96 \times 0.0011 = 0.0022\,\text{mm}$

所以在 95%的置信概率下，$A = \bar{A} \pm U = \bar{A} \pm k \cdot u_c = 0.0495 \pm 0.0022\,\text{mm}$，其中包含因子 k=1.96。

【例 7】用精度为 0.02mm 的游标卡尺测量了一圆柱形金属棒的直径 D 和高度 H，对直径 D 的 10 次测量结果分别为 50.40mm，50.42mm，50.42mm，50.44mm，50.46mm，50.44mm，50.42mm，50.40mm，50.40mm，50.42mm，对高度 H 的 10 次测量结果分别为 65.50mm，65.52mm，65.54mm，65.52mm，65.54mm，65.54mm，65.52mm，65.52mm，65.50mm，65.54mm，请给出圆柱体金属棒的体积以及在 95%置信概率下的扩展不确定度（假设直径和高度的测量结果没有相关性）。

解：圆柱形金属棒体积 V 与直径 D 和高度 H 的关系为：

$V = \frac{\pi}{4} D^2 H$

(1)先分别计算直接测量量（直径 D 和高度 H）的平均值和 A 类标准不确定度分量

$$\bar{D} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} D_i = \frac{1}{10}(50.4 + 50.42 + \cdots + 50.4 + 50.42) = 50.422\,\text{mm}$$

$s(\bar{D}) = \sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(D_i - \bar{D})^2} = \sqrt{\frac{1}{10\times 9}[(50.4 - 50.422)^2 + \cdots + (50.42 - 50.422)^2]} =$ $0.0063\,\text{mm}$

直径测量对应的 A 类标准不确定度的自由度数为$v = N - 1 = 9$。

$$\bar{H} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H_i = \frac{1}{10}(65.5 + 65.52 + \cdots + 65.5 + 65.54) = 65.524\,\text{mm}$$

$s(\bar{H}) = \sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(H_i - \bar{H})^2} = \sqrt{\frac{1}{10\times 9}[(65.5 - 65.524)^2 + \cdots + (65.54 - 65.524)^2]} =$ $0.005\,\text{mm}$

高度测量对应的 A 类标准不确定度的自由度数为$v = N - 1 = 9$。

(2)再计算游标卡尺分辨率有限引入的 B 类标准不确定度分量，假定矩形分布

$u_B = \frac{a}{k} = \frac{0.02}{2\sqrt{3}} = \frac{0.02}{\sqrt{12}} = 0.0058\,\text{mm}$

直径和高度测量对应的 B 类标准不确定度均为该值，该 B 类标准不确定度对应的自由度数为 $v \to +\infty$。

(3)分别计算直接测量量（直径 D 和高度 H）的合成标准不确定度和有效自由度

$$u_c(\bar{D}) = \sqrt{s^2(\bar{D}) + u_B^2} = \sqrt{(0.0063)^2 + (0.0058)^2} = 0.0086\,mm$$

直径的合成标准不确定度对应的有效自由度为

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(D)}{\frac{s^4(D)}{v_A} + \frac{u_B^2}{v_B}} = \frac{(0.0086)^4}{\frac{(0.0063)^4}{9} + \frac{(0.0058)^4}{\infty}} = \frac{(0.0086)^4}{\frac{(0.0063)^4}{9}} = 9 \times \left(\frac{86}{63}\right)^4 = 31.25$$

为了不夸大测量的精度，有效自由度取小于计算值的整数，即$v_{eff,D} = 31$。

$$u_c(\bar{H}) = \sqrt{s^2(\bar{H}) + u_B^2} = \sqrt{(0.005)^2 + (0.0058)^2} = 0.0077\,mm$$

直径的合成标准不确定度对应的有效自由度为

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(H)}{\frac{s^4(H)}{v_A} + \frac{u_B^2}{v_B}} = \frac{(0.0077)^4}{\frac{(0.005)^4}{9} + \frac{(0.0058)^4}{\infty}} = \frac{(0.0077)^4}{\frac{(0.005)^4}{9}} = 9 \times \left(\frac{77}{50}\right)^4 = 50.6$$

为了不夸大测量的精度，有效自由度取小于计算值的整数，即$v_{eff,H} = 50$。

(4)两直接测量量的结果可表示为：

$D = \bar{D} \pm u_c(\bar{D}) = 50.422 \pm 0.009\,mm$，对应的有效自由度$v_{eff,D} = 31$。

$H = \bar{H} \pm u_c(\bar{H}) = 65.524 \pm 0.008\,mm$，对应的有效自由度$v_{eff,H} = 50$。

(5)以下计算间接测量量的平均值、合成标准不确定度和有效自由度

圆柱形金属棒体积 V 的最佳评估值为：

$$\bar{V} = \frac{\pi}{4}\bar{D}^2\bar{H} = \frac{\pi}{4} \times 50.422^2 \times 65.524 = 130836.9523\,mm^3 \approx 130.837\,cm^3$$

圆柱形金属棒体积 V 的合成标准不确定度为：

$$u_c(\bar{V}) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 u_c^2(\bar{D}) + \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)^2 u_c^2(\bar{H})}$$

其中，式中的灵敏度系数

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D}\left(\frac{\pi}{4}D^2H\right) = \frac{\pi}{2}DH = \frac{\pi}{2} \times 50.422 \times 65.524 = 5189.677\,mm^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{\pi}{4}D^2H\right) = \frac{\pi}{4}D^2 = \frac{\pi}{4} \times (50.422)^2 = 1996.779\,mm^2$$

因此，

$$u_c(\bar{V}) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 u_c^2(\bar{D}) + \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)^2 u_c^2(\bar{H})} = \sqrt{(5189.677 \times 0.009)^2 + (1996.779 \times 0.008)^2}$$

$$= \sqrt{2181.5525 + 255.1761} = 49.36\,mm^3$$

体积的合成标准不确定度对应的有效自由度为

$$v_{eff,V}=\frac{u_c^4(V)}{\frac{c_{i,D}^4u_c^4(D)}{v_{eff,D}}+\frac{c_{i,D}^4u_c^4(H)}{v_{eff,H}}}=\frac{(49.36)^4}{\frac{(5189.677\times0.009)^4}{31}+\frac{(1996.779\times0.008)^4}{50}}=\frac{(49.36)^4}{\frac{(2181.55)^2}{31}+\frac{(255.176)^2}{50}}=$$

$$\frac{5.936\times10^6}{1.53521\times10^5+0.01302\times10^5}=38.34$$

(6)计算扩展不确定度。根据$v_{eff}=38$和置信概率 P=95%，查 t-分布表，可得包含因子 k=2.02，所以扩展不确定度为

$$U=k\cdot u_c=2.02\times49.36=99.707\,mm^3\approx0.1\,cm^3$$

所以在 95%的置信概率下，$A=\bar{A}\pm U=\bar{A}\pm k\cdot u_c=130.8\pm0.1\ cm^3$，其中包含因子 k=2.02。

【例 8】 使用分辨率为 1mg 的电子天平对钢球进行了称重，10 次重复测量的结果依次为 8.3484g，8.3521g，8.3497g，8.3502g，8.3487g，8.3493g，8.3485g，8.3507g，8.3504g，8.3491g。使用分辨率为 0.01mm 的千分尺对钢球的直径进行了 10 次重复测量，测量的结果依次为 12.690mm，12.685mm，12.683mm，12.680mm，12.687mm，12.693mm，12.695mm，12.692mm，12.681mm，12.687mm。请给出钢球的密度以及在 95%置信概率下的扩展不确定度。

解：钢球的密度ρ与钢球的质量 M 和直径 D 的关系为：

$$\rho=\frac{M}{\frac{\pi}{6}D^3}=\frac{6M}{\pi D^3}$$

(1)先分别计算直接测量量（质量 M 和直径 D）的平均值和 A 类标准不确定度分量

$$\bar{M}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}M_i=\frac{1}{10}(8.3484+8.3521+\cdots+8.3504+8.3491)=8.3497\text{ g}$$

$$s(\bar{M})=\sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(M_i-\bar{M})^2}=\sqrt{\frac{1}{10\times9}[(8.3484-8.3497)^2+\cdots+(8.3491-8.3497)^2]}=$$

$$0.00037\text{ g}$$

质量测量对应的 A 类标准不确定度的自由度数为$v=N-1=9$。

$$\bar{D}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}D_i=\frac{1}{10}(12.69+12.685+\cdots+12.681+12.687)=12.687\text{ mm}$$

$$s(\bar{D})=\sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(D_i-\bar{D})^2}=\sqrt{\frac{1}{10\times9}[(12.69-12.687)^2+\cdots+(12.687-12.687)^2]}=$$

$$0.0016\text{ mm}$$

直径测量对应的 A 类标准不确定度的自由度数为$v=N-1=9$。

(2)再分别计算电子天平和千分尺分辨率有限引入的 B 类标准不确定度分量，假定矩形分布

$$u_{B,M}=\frac{a}{k}=\frac{0.001}{2\sqrt{3}}=\frac{0.001}{\sqrt{12}}=2.89\times10^{-4}\text{ g}$$

$u_{B,D}=\frac{a}{k}=\frac{0.01}{2\sqrt{3}}=\frac{0.01}{\sqrt{12}}=2.89\times10^{-3}\ \mathrm{mm}$

这两个 B 类标准不确定度对应的自由度数均为 $v\to+\infty$。

(3)分别计算直接测量量（质量 M 和直径 D）的合成标准不确定度和有效自由度

$$u_c(\bar{M})=\sqrt{s^2(\bar{M})+u_{B,M}^2}=\sqrt{(3.7\times10^{-4})^2+(2.89\times10^{-4})^2}=4.695\times10^{-4}\ g$$

质量的合成标准不确定度对应的有效自由度为

$$v_{eff,M}=\frac{u_c^4(M)}{\frac{s^4(M)}{v_A}+\frac{u_{B,M}^2}{v_B}}=\frac{\left(4.695\times10^{-4}\right)^4}{\frac{(3.7\times10^{-4})^4}{9}+\frac{(2.89\times10^{-4})^4}{\infty}}=\frac{\left(4.695\times10^{-4}\right)^4}{\frac{(3.7\times10^{-4})^4}{9}}=9\times\left(\frac{4.695}{3.7}\right)^4=23.3$$

为了不夸大测量的精度，有效自由度取小于计算值的整数，即$v_{eff,M}=23$。

$$u_c(\bar{D})=\sqrt{s^2(\bar{D})+u_{B,D}^2}=\sqrt{(1.6\times10^{-3})^2+(2.89\times10^{-3})^2}=3.303\times10^{-3}\ mm$$

直径的合成标准不确定度对应的有效自由度为

$$v_{eff,D}=\frac{u_c^4(D)}{\frac{s^4(D)}{v_A}+\frac{u_{B,D}^2}{v_B}}=\frac{\left(3.303\times10^{-3}\right)^4}{\frac{(1.6\times10^{-3})^4}{9}+\frac{(2.89\times10^{-3})^4}{\infty}}=\frac{\left(3.303\times10^{-3}\right)^4}{\frac{(1.6\times10^{-3})^4}{9}}=9\times\left(\frac{3.303}{1.6}\right)^4=163.45$$

为了不夸大测量的精度，有效自由度取小于计算值的整数，即$v_{eff,D}=163$。

(4)两直接测量量的结果可表示为：

$M=\bar{M}\pm u_c(\bar{M})=8.3497\pm0.0005\ g$，对应的有效自由度$v_{eff,M}=23$。

$D=\bar{D}\pm u_c(\bar{D})=12.687\pm0.003\ mm$，对应的有效自由度$v_{eff,D}=163$。

(5)以下计算间接测量量（密度ρ）的平均值、合成标准不确定度和有效自由度

钢球的密度ρ的最佳评估值为：

$$\bar{\rho}=\frac{6\bar{M}}{\pi\bar{D}^3}=\frac{6\times8.3497}{\pi\times(12.687)^3}=\frac{6\times8.3497}{6415.4436}=7.809\times10^{-3}\ \ g/mm^3=7.809\ \ g/cm^3$$

钢球的密度ρ的合成标准不确定度为：

$$u_c(\bar{\rho})=\sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial M}\right)^2u_c^2(\bar{M})+\left(\frac{\partial\rho}{\partial D}\right)^2u_c^2(\bar{D})}$$

其中，式中的灵敏度系数

$$\frac{\partial\rho}{\partial M}=\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{6M}{\pi D^3}\right)=\frac{6}{\pi D^3}=\frac{6}{\pi\times(12.687)^3}=\frac{6}{6415.4436}=9.3524\times10^{-4}\ mm^{-3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial D}=\frac{\partial}{\partial D}\left(\frac{6M}{\pi D^3}\right)=-\frac{18M}{\pi D^4}=-\frac{18\times8.3497}{\pi\times(12.687)^4}=1.846\times10^{-3}\ g/mm^4$$

因此，

$$u_c(\bar{\rho})=\sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial M}\right)^2u_c^2(\bar{M})+\left(\frac{\partial\rho}{\partial D}\right)^2u_c^2(\bar{D})}$$

$= \sqrt{(9.3524 \times 10^{-4} \times 0.0005)^2 + (1.846 \times 10^{-3} \times 0.003)^2}$

$= \sqrt{(9.3524 \times 0.05 + 1.846 \times 3)^2 \times 10^{-12}} = 6.0 \times 10^{-6}\ g/mm^3$

密度的合成标准不确定度对应的有效自由度为

$$v_{eff,\rho} = \frac{u_c^4(\rho)}{\frac{c_{i,M}^4 u_c^4(M)}{v_{eff,M}} + \frac{c_{i,D}^4 u_c^4(D)}{v_{eff,D}}} = \frac{(6.0 \times 10^{-6})^4}{\frac{(9.3524 \times 10^{-4} \times 0.0005)^4}{23} + \frac{(1.846 \times 10^{-3} \times 0.003)^4}{163}} =$$

$$\frac{(6.0)^4}{\frac{(9.3524 \times 0.05)^4}{23} + \frac{(1.846 \times 3)^4}{163}} = \frac{1296}{0.0203 + 5.7706} = 223.8$$

(6)计算扩展不确定度。根据$v_{eff,\rho} = 223$和置信概率P=95%，查t-分布表，可得包含因子k=1.96，所以扩展不确定度为

$U = k \cdot u_c = 1.96 \times 6.0 \times 10^{-6}\ g/mm^3 = 1.176 \times 10^{-5} g/mm^3 \approx 0.012\ g/cm^3$

所以在 95%的置信概率下，$\rho = \bar{\rho} \pm U = \bar{\rho} \pm k \cdot u_c = 7.81 \pm 0.12\ \ g/mm^3$，其中包含因子$k$=1.96。

6.3 不需要考虑自由度时的合成标准不确定度以及扩展不确定度的评估

在某些情况下，只需要对测量结果的不确定度进行粗略的评估。此时，可以忽略有限次测量对不确定度评估的影响，即将有限次测量结果视为符合测量次数趋近于无穷大的高斯分布，大大地简化了不确定度的评估过程。当置信概率为 95%时，包含因子直接取 k=2；当置信概率为 99%时，包含因子直接取 k=3。

【例 9】材料的抗拉强度定义为材料拉伸断裂前的最大载荷 F 与试样原始横截面积 A 的比值，即 $\sigma_b = \frac{F}{A}$。使用最大允许误差为$\pm 5\mu m$的千分尺测量圆柱形金属试样的直径。已知试样直径的算术平均值为$\bar{D}$=10.000mm，平均值的实验标准偏差为$s(\bar{D}) = 0.012$mm。使用最大测量误差为$\pm 0.05\%$的指针式拉力计测量拉力，测得的试样断裂前的最大载荷为 F=45kN。试给出实验测得的抗拉强度在置信概率为 95%时的扩展不确定度。

解：

方法一（采用绝对不确定度计算）：

材料的抗拉强度σ_b与材料拉伸断裂前的最大载荷 F 和试样原始直径 D 满足如下关系：

$\sigma_b = \frac{4F}{\pi D^2}$

(1)先计算出试样抗拉强度σ_b的最佳评估值

$\sigma_b = \frac{4F}{\pi D^2} = \frac{4 \times 45 \times 10^3}{\pi \times 10^2} = 572.96\ \mathrm{N/mm^2}$

(2)计算直径测量的合成标准不确定度

千分尺因分辨率有限引入的 B 类不确定度

$u(D)=\frac{5}{\sqrt{3}}=2.8868\ \mu m$

$u_c(D)=\sqrt{u^2(D)+s^2(\bar{D})}=\sqrt{2.8868^2+12^2}=$ 12.34μm=0.01234 mm

(3)计算拉力测量的标准不确定度

拉力计因分辨率有限引入的 B 类不确定度

$u(F)=\frac{45\times10^3\times0.05\%}{\sqrt{3}}=12.99\ \mathrm{N}$

(4)计算抗拉强度σ_b的合成标准不确定度

$$u_c(\sigma_b)=\sqrt{\left(\frac{\partial\sigma_b}{\partial D}\right)^2 u_c^2(D)+\left(\frac{\partial\sigma_b}{\partial F}\right)^2 u^2(F)}$$

其中，式中的灵敏度系数

$\frac{\partial\sigma_b}{\partial D}=\frac{\partial}{\partial D}\left(\frac{4F}{\pi D^2}\right)=-\frac{8F}{\pi D^3}=-\frac{8\times45\times10^3}{\pi\times(10)^3}=-114.59\ N/mm^3$

$\frac{\partial\sigma_b}{\partial F}=\frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{4F}{\pi D^2}\right)=\frac{4}{\pi D^2}=\frac{4}{\pi\times(10)^2}=1.2732\times10^{-2}\ mm^{-2}$

因此，

$$u_c(\sigma_b)=\sqrt{\left(\frac{\partial\sigma_b}{\partial D}\right)^2 u_c^2(D)+\left(\frac{\partial\sigma_b}{\partial F}\right)^2 u^2(F)}$$

$=\sqrt{(114.59\times0.01234)^2+(1.2732\times10^{-2}\times12.99)^2}$

$=\sqrt{(19995.1082+273.5341)\times10^{-4}}=1.42\ N/mm^2$

(5)计算扩展不确定度。取包含因子 k=2，扩展不确定度 $U=k\cdot u_c=2.82\ N/mm^2$，所以实验结果为：

抗拉强度 $\sigma_b=573.0\pm2.8\ \ \mathrm{N/mm^2}$。

方法二（采用相对不确定度计算）：

材料的抗拉强度σ_b与材料拉伸断裂前的最大载荷 F 和试样原始直径 D 满足如下关系：

$\sigma_b=\frac{4F}{\pi D^2}=\frac{4}{\pi}F\cdot D^{-2}$

所以，抗拉强度σ_b的合成相对不确定度可表示为

$u_{c,rel}(\sigma_b)=\frac{u_c(\sigma_b)}{|\sigma_b|}=\sqrt{\left[\frac{u(F)}{F}\right]^2+\left[\frac{2u(D)}{D}\right]^2}$

由方法一可知， $u(F)=\frac{45\times10^3\times0.05\%}{\sqrt{3}}=12.99\ \mathrm{N}$，$F=45\times10^3\ \mathrm{N}$

$u_c(D) = \sqrt{u^2(D) + s^2(\bar{D})} = \sqrt{2.8868^2 + 12^2} = 12.34\mu m = 0.01234$ mm，$\bar{D}$=10.000mm

所以

$$\frac{u(F)}{F} = \frac{12.99}{45 \times 10^3} \times 100\% = \frac{0.05\%}{\sqrt{3}} = 0.028868\%$$

$$\frac{u(D)}{D} = \frac{0.01234}{10} \times 100\% = 0.1234\%$$

所以

$$u_{c,rel}(\sigma_b) = \frac{u_c(\sigma_b)}{|\sigma_b|} = \sqrt{[0.028868\%]^2 + [2 \times 0.1234\%]^2} = \sqrt{\frac{0.00083336 + 0.06091}{10000}} = 0.24848\%$$

由方法一可知，$\sigma_b = \frac{4F}{\pi D^2} = \frac{4 \times 45 \times 10^3}{\pi \times 10^2} = 572.96\ \mathrm{N/mm^2}$

所以，抗拉强度σ_b的合成标准不确定度

$$u_c(\sigma_b) = \sigma_b \cdot u_{c,rel}(\sigma_b) = 572.96 \times 0.24848\% = 1.42\ N/mm^2$$

该结果与方法一的结果完全一致，但计算过程得到了极大地简化。因此，对于形如$F = f(x_1, x_2, x_3, \cdots x_N) = A \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3} \cdot \cdots \cdot x_N^{p_N}$的问题，建议优先使用相对不确定度进行计算，最后再将相对不确定度转变为绝对不确定度。

【例 10】采用四探针测试仪测量一块 180μm 厚、156mm×156 mm 的方形 p 型硅片的电阻率。使用最大允许误差为±0.5μm 的千分尺测量了硅片的厚度，测量值分别为 178.0μm，178.5μm，179.5μm，180.5μm，181.5μm，182.0μm。以 0.08mA 的测试电流测量了硅片表面上 6 个不同位置的 V_{23} 分别为 2.17mV，2.19mV，2.21mV，2.18mV，2.16mV,2.15mV。假设硅片的电阻率分布均匀，6 次测量可看作是对样品在相同条件下的重复测量。样品的电阻率采用下面的公式计算

$$\rho = \frac{V_{23}}{I} \cdot d \cdot F_{sp} \cdot F(d/S) \cdot F(S/D)$$

式中 I 是通过 1、4 探针的测试电流，V_{23} 是 2、3 探针上的测试电压，d 是样品厚度，D 是样品的直径或边长，探针的间距 S=1mm，探针间距修正 F_{sp}=1。通过查表可得，样品厚度的修正因子 F(d/S)=1，样品直径的修正因子 F(S/D)=4.5306。

根据纳伏表说明书，采用 10mV 量程时，纳伏表的最大允许误差为±0.00054mV。根据恒流源的说明书，采用 0.1mA 量程，恒流源最大允许误差为±0.0015mA。对于给定的样品，修正因子可视为常数，无需考虑其不确定度。试估算 95%置信概率下电阻率测量的扩展不确定度。

解：

方法一（采用绝对不确定度计算）：

(1) 先分别计算直接测量量（V_{23}，厚度 d）的平均值和 A 类标准不确定度分量

$$\bar{V}_{23} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{6}(2.17 + 2.19 + \cdots + 2.16 + 2.15) = 2.177\ \text{mV}$$

$$s(\bar{V}) = \sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(V_i - \bar{V})^2} = \sqrt{\frac{1}{6\times 5}[(2.17 - 2.177)^2 + \cdots + (2.15 - 2.177)^2]} = 0.0088\ \text{mV}$$

$$\bar{d} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i = \frac{1}{6}(178 + 178.5 + \cdots + 181.5 + 182) = 180\ \mu\text{m}$$

$$s(\bar{d}) = \sqrt{\frac{1}{N\cdot(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - \bar{d}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6\times 5}[(178 - 180)^2 + \cdots + (182 - 180)^2]} = 0.6583\ \mu\text{m}$$

(2) 再分别计算纳伏表、恒流源和千分尺分辨率有限引入的 B 类标准不确定度分量，假定矩形分布

$$u_{B,V} = \frac{a}{k} = \frac{0.00054}{\sqrt{3}} = 3.118 \times 10^{-4}\ \text{mV}$$

$$u_{B,I} = \frac{0.0015}{k} = \frac{0.0015}{\sqrt{3}} = 8.66 \times 10^{-4}\ \text{mA}$$

$$u_{B,d} = \frac{0.5}{k} = \frac{0.5}{\sqrt{3}} = 0.2887\ \mu\text{m}$$

这三个 B 类标准不确定度对应的自由度数均为 $\nu \to +\infty$。

(3) 分别计算各直接测量量（V_{23}，厚度 d）的合成标准不确定度

$$u_c(\bar{V}_{23}) = \sqrt{s^2(\bar{V}) + u_{B,V}^2} = \sqrt{(0.0088)^2 + (3.118 \times 10^{-4})^2} = 8.8055 \times 10^{-3}\ mV$$

$$u_c\left(\bar{d}\right) = \sqrt{s^2\left(\bar{d}\right) + u_{B,d}^2} = \sqrt{(0.6583)^2 + (0.2887)^2} = 0.7188\ \mu m$$

(4) 三个直接测量量的结果可表示为：

$V_{23} = \bar{V}_{23} \pm u_c(\bar{V}_{23}) = 2.177 \pm 0.009\ mV$。

$I = \bar{I} \pm u_{B,I} = 0.0800 \pm 0.0009\text{mA}$。

$d = \bar{d} \pm u_c\left(\bar{d}\right) = 180.0 \pm 0.7\ \mu m$。

(5) 以下计算间接测量量（电阻率ρ）的平均值和合成标准不确定度

硅片的电阻率ρ的最佳评估值为：

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{V}_{23}}{I}\cdot \bar{d}\cdot F_{sp}\cdot F(d/S)\cdot F(S/D) = \frac{2.177}{0.08} \times 180 \times 10^{-4} \times 1 \times 1 \times 4.5306$$

$$\frac{2.177}{0.08} \times 180 \times 10^{-4} \times 4.5306 = 2.2192\ \Omega\cdot\text{cm}$$

电阻率ρ的合成标准不确定度为：

$$u_c(\bar{\rho}) = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial V_{23}}\right)^2 u_c^2(\bar{V}_{23}) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial I}\right)^2 u_B^2(I) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\right)^2 u_c^2\left(\bar{d}\right)}$$

其中，式中的灵敏度系数

$\frac{\partial\rho}{\partial V_{23}}=\frac{\partial}{\partial V_{23}}\left[\frac{V_{23}}{I}\cdot d\cdot F_{sp}\cdot F(d/S)\cdot F(S/D)\right]=\frac{\bar{d}\cdot F_{sp}\cdot F(d/S)\cdot F(S/D)}{I}=\frac{\bar{\rho}}{\bar{V}_{23}}=$

$\frac{2.2192}{2.177}=1.0194\ \Omega\cdot\mathrm{cm}\cdot\mathrm{mV}^{-1}$

$\frac{\partial\rho}{\partial I}=\frac{\partial}{\partial I}\left[\frac{V_{23}}{I}\cdot d\cdot F_{sp}\cdot F(d/S)\cdot F(S/D)\right]=-\frac{\bar{V}_{23}}{I^2}\cdot\bar{d}\cdot F_{sp}\cdot F(d/S)\cdot F(S/D)=-\frac{\bar{\rho}}{I}=$

$-\frac{2.2192}{0.08}=-27.74\ \ \Omega\cdot\mathrm{cm}\cdot\mathrm{mA}^{-1}$

$\frac{\partial\rho}{\partial d}=\frac{\partial}{\partial d}\left[\frac{V_{23}}{I}\cdot d\cdot F_{sp}\cdot F(d/S)\cdot F(S/D)\right]=\frac{V_{23}}{I}\cdot F_{sp}\cdot F(d/S)\cdot F(S/D)\ =\frac{\bar{\rho}}{d}=$

$\frac{2.2192}{180\times10^{-4}}=\frac{2.2192}{0.0180}=123.29\ \Omega$

因此，

$$u_c(\bar{\rho})=\sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial V_{23}}\right)^2u_c^2(\bar{V}_{23})+\left(\frac{\partial\rho}{\partial I}\right)^2u_B^2(I)+\left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\right)^2u_c^2(\bar{d})}$$

$$=\sqrt{(1.0194\times8.8055\times10^{-3})^2+(27.74\times8.66\times10^{-4})^2+(123.29\times0.7188\times10^{-4})^2}$$

$$=\sqrt{(89.7633^2+240.2284^2+88.6208^2)\times10^{-8}}=0.027\ \Omega\cdot\mathrm{cm}$$

(6) 计算扩展不确定度。取包含因子 k=2，扩展不确定度 $U=k\cdot u_c=0.054\ \Omega\cdot\mathrm{cm}$，所以实验结果为：

硅片的电阻率 $\rho=2.219\pm0.054\ \ \Omega\cdot\mathrm{cm}$。

方法二（采用相对不确定度计算）：

样品的电阻率ρ与 V_{23} 和 I 满足如下关系

$$\rho=\frac{V_{23}}{I}\cdot d\cdot F_{sp}\cdot F(d/S)\cdot F(S/D)=V_{23}\cdot I^{-1}\cdot d\cdot F_{sp}\cdot F(d/S)\cdot F(S/D)$$

所以，样品的电阻率ρ的合成相对不确定度可表示为

$$u_{c,rel}(\rho)=\frac{u_c(\rho)}{|\rho|}=\sqrt{\left[\frac{u(V_{23})}{V_{23}}\right]^2+\left[\frac{-u(I)}{I}\right]^2+\left[\frac{u(d)}{d}\right]^2}$$

由方法一可知， $u_c(V_{23})=8.8055\times10^{-3}\ mV$，$\bar{V}_{23}=2.177\ mV$

$u(I)=8.66\times10^{-4}$ mA，$\bar{I}$=0.08 mA

$u(d)=0.7188\ \mu m$，$\bar{d}=180\ \mu m$

所以

$$\frac{u(V_{23})}{\bar{V}_{23}}=\frac{8.8055\times10^{-3}}{2.177}\times100\%=0.4045\%$$

$$\frac{u(I)}{I}=\frac{8.66\times10^{-4}}{0.08}\times100\%=1.0825\%$$

$$\frac{u(d)}{d}=\frac{0.7188}{180}\times 100\%=0.3993\%$$

所以

$$u_{c,rel}(\rho)=\frac{u_c(\rho)}{|\rho|}=\sqrt{[0.4045\%]^2+[1.0825\%]^2+[0.3993\%]^2}=$$

$$\sqrt{\frac{0.1636+1.1718+0.1594}{10000}}=1.2226\%$$

由方法一可知，硅片的电阻率ρ的最佳评估值为：

$$\bar{\rho}=\frac{\bar{V}_{23}}{I}\cdot\bar{d}\cdot F_{sp}\cdot F(d/S)\cdot F(S/D)=\frac{2.177}{0.08}\times 180\times 10^{-4}\times 1\times 1\times 4.5306=2.2192\ \Omega\cdot\text{cm}$$

所以，电阻率ρ的合成标准不确定度

$$u_c(\rho)=\bar{\rho}\cdot u_{c,rel}(\sigma_b)=2.2192\times 1.2226\%=0.027\ \ \Omega\cdot\text{cm}$$

同样地，该结果与方法一的结果完全一致，但计算过程被极大地简化了。因此，对于形如$F=f(x_1,x_2,x_3,\cdots x_N)=A\cdot x_1^{p_1}\cdot x_2^{p_2}\cdot x_3^{p_3}\cdot\cdots\cdot x_N^{p_N}$的问题，应优先使用相对不确定度进行计算，最后再将相对不确定度转变为绝对不确定度。

【参考文献】

1. 沈韩. 基础物理实验. 北京：科学出版社，2015.2

2. 《物理学实验教程》编写组. 物理学实验教程（基础物理实验）. 广州：中山大学出版社 2004.1

3. 倪育才. 实用测量不确定度评定（第 6 版）. 北京：中国质量标准出版传媒有限公司. 2020.4

4. 叶德培，赵峰，施昌彦，等. 中华人民共和国国家计量技术规范——JJF1059.1—2012 测量不确定度评定与表示，北京：国家质量监督检验检疫总局发布，中国质检出版社出版发行，2013 年 10 月第二版

5. BIPM, JCGM 100: 2008 edtion of the GUM. Evaluation of Measurement Data — Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. 下载自 www.bipm.org 网站

6. John R. Taylor. An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements, 2nd Edtion, University Science Books, Sausalito, California, 1997

7. Semyon G. Rabinovich. Measurement Errors and Uncertainties: Theory and Practice, 3rd Edition. New York: Springer. 2005

8. Herman J. C. Berendsen. A Student's Guide to Data and Error Analysis, Cambridge: Cambridge University Press, 2011
9. Paolo Fornasini. The Uncertainty in Physical Measurements: An Introduction to Data Analysis in the Physics Laboratory. New York: Springer, 2008
10. L. Kirkup and R. B. Frenkel. Introduction to Uncertainty in Measurement Using the GUM. Cambridge: Cambridge University Press, 2006

附录 A：标准正态积分表

$$P(\alpha < x < \beta) = P\left(z_\alpha < z < z_\beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_\alpha}^{z_\beta} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \tag{A.1}$$

为计算(A.1)中的积分，可使用

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} exp\left[-\frac{z'^2}{2}\right] dz'$$

的列表值（表 A.1）,以及

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z} exp\left[-\frac{z'^2}{2}\right] dz'$$

的列表值（表 A.2）。在这两个表中，第一列给出 z 的前两位有效数字，而第一行给出z 的第三位有效数字。表格的主体部分给出了相应的概率值。

表 A.1 积分 $\boldsymbol{\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\Phi(z')dz'}$ 的值

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.8	0.0001									
-3.6	0.0002									
-3.4	0.0003									
-3.2	0.0007									
-3.0	0.0014									
-2.9	0.0019									
-2.8	0.0026									
-2.7	0.0035									
-2.6	0.0047									
-2.5	0.0062									
-2.4	0.0082									
-2.3	0.0107									
-2.2	0.0139									
-2.1	0.0179									
-2.0	0.0228									
-1.9	0.0288	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233

−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1563	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148

（续上表）

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2276
−0.4	0.3646	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
+0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
+0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
+0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
+0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
+0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
+0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
+0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
+0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
+0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
+0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
+1.0	0.8413	0.8437	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
+1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
+1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
+1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
+1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
+1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
+1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
+1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
+1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9930	0.9699	0.9706
+1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
+2.0	0.9772									
+2.1	0.9821									

+2.2	0.9861
+2.3	0.9893
+2.4	0.9918
+2.5	0.9938
+2.6	0.9953
+2.7	0.9965
+2.8	0.9974
+2.9	0.9981
+3.0	0.9986
+3.2	0.9993
+3.4	0.9997
+3.6	0.9998
+3.8	0.9999

表 A.2　积分 $\boldsymbol{\Phi}^*(z) = \int_0^z \boldsymbol{\Phi}(z')dz'$ 的值

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964

2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987									
3.5	0.4998									
4.0	0.4999									

附录 B：t-分布表

表 B.1　对应于不同自由度 v 和不同置信概率 p 的 t 分布的 t_p(v)值（对应于 $-t_p$(v)到 $+t_p$(v)区间半宽度）表

自由度 v	以百分比为单位的概率 p					
	68.27[a)]	90	95	95.45[a)]	99	99.73[a)]
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.80
2	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
4	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
8	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
11	1.05	1.80	2.20	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.76
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.54
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.51
18	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.48
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.01	1.70	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.660	1.984	2.025	2.626	3.077
∞	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

a)对于期望值μ_z和标准差为σ的正态分布所描述的量 z，区间 $\mu_z \pm k\sigma$分别包含$k = 1$、2 和 3时 $p = 68.27\%$、95.45%和 99.73%的分布。