《材料科学基础实验》
绪论

艾斌 副教授

E-mail: stsab@mail.sysu.edu.cn

Mobile: 13650899150

材料科学与工程学院

主要内容

§ **1.1** 课程内容及上课安排

§ **1.2** 实验过程及要求

§ **1.3** 实验报告及评分标准

§ **1.4** 实验数据的处理

§ **1.4.1** 误差、不确定度、有效数字

§ **1.4.2** 列表、作图

§ **1.4.3** 数据拟合（最小二乘法）

§ 1.1 课程内容及上课安排

1. 实验课程内容（54学时）

实验1：铁碳合金平衡组织观察及性能分析
实验2：金相试样的制备
实验3：碳钢退火、正火后的组织观察与硬度分析
实验4：碳钢淬火 、回火后的组织观察与硬度分析
实验5：材料力学、热学性能参数测量
实验6：材料机械性能测量-拉伸和压缩
实验7：超声波的产生、传播及材料超声探伤
实验8：磁性材料基础测量
实验9：共晶合金相图测量
实验10：材料导热系数测试
实验11：四探针法测量半导体电阻率和薄层电阻
实验12：绝缘材料介电常数和介质损耗因数测试

2. 实验分组名单

组1（7人）
包雨凡、曾晓健、陈昊、陈景轩、邓宇轩、冯朗智、付嘉楷
组2（7人）
何毅一、胡慧、黄梓俊、姜雺庭、蒋知为、敬曦韬、李潼
组3（7人）
罗扬、罗正、彭锦烨、邱建树、任鹏丞、万宏钦、王俊杰
组4（6人）
翁浩然、谢悦鑫、杨亦秦、杨雨燃、周泽华、柯欣乐
组5（7人）
蒲君仪、段姣姣、段庆霖、方政、何嘉扬、黄俊澎、姜寰
组6（7人）
李泰锋、廖欣然、林芷珊、刘萱、刘镇熙、牛潇玲、秦立

组7（6人）

渠子慧、谭铭沛、万于庆、王佳雪、吴鹏炜、熊传怡

组8（6人）

许凯锐、张柔艺、张泽钒、张展铭、郑浩源、郑峻宏

组9（7人）

吴文怡、陈湃仑、陈霞、陈永强、丁思涵、方琳静、付雲飞

组10（7人）

古睿鑫、关炜君、何爽、刘泽源、柳璇璇、龙隆、阮志光

组11（7人）

苏建东、王慷、吴瑶瑶、肖曦悦、薛佳奇、杨越、蚁振楷

组12（6人）

张秀、张逸舟、张蕴东、郑思航、周鑫、庞嘉贝

3. 排课表

负责老师	杨玉华老师				李继玲老师				艾斌老师			
实验	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
实验名称	金相观察	金相制样	碳钢正火后观察	碳钢回火后观察	力热性能测试	材料拉伸测试	超声探伤	磁学性质测量	金属相图	导热系数测试	四探针测电阻率	介质损耗测试
第 1 教学周五下午	绪论课											
第 2 教学周五上午	组1	组2	组3	组4	组5	组6	组7	组8	组9	组10	组11	组12
第 2 教学周五下午	组2	组1	组4	组3	组6	组5	组8	组7	组10	组9	组12	组11
第 3 教学周五上午	组3	组4	组1	组2	组7	组8	组5	组6	组11	组12	组9	组10
第 3 教学周五下午	组4	组3	组2	组1	组8	组7	组6	组5	组12	组11	组10	组9
第 4 教学周五上午	组5	组6	组7	组8	组9	组10	组11	组12	组1	组2	组3	组4
第 4 教学周五下午	组6	组5	组8	组7	组10	组9	组12	组11	组2	组1	组4	组3
第 5 教学周五上午	组7	组8	组5	组6	组11	组12	组9	组10	组3	组4	组1	组2
第 5 教学周五下午	组8	组7	组6	组5	组12	组11	组10	组9	组4	组3	组2	组1
第 6 教学周五上午	组9	组10	组11	组12	组1	组2	组3	组4	组5	组6	组7	组8
第 6 教学周五下午	组10	组9	组12	组11	组2	组1	组4	组3	组6	组5	组8	组7
第 7 教学周五上午	组11	组12	组9	组10	组3	组4	组1	组2	组7	组8	组5	组6
第 7 教学周五下午	组12	组11	组10	组9	组4	组3	组2	组1	组8	组7	组6	组5
第 8 教学周五上午	期末点评，补做实验											

4. 上课时间、地点、任课老师及讲义

上课时间及地点：

实验组1—12：周五下午5-8节提前一小时（13:20--17:00），在化学材料综合楼 C221，C223，C225，C248，C250，C252上课；第2周至第7周为实验教学周（共计6周），第8周为补做实验周。

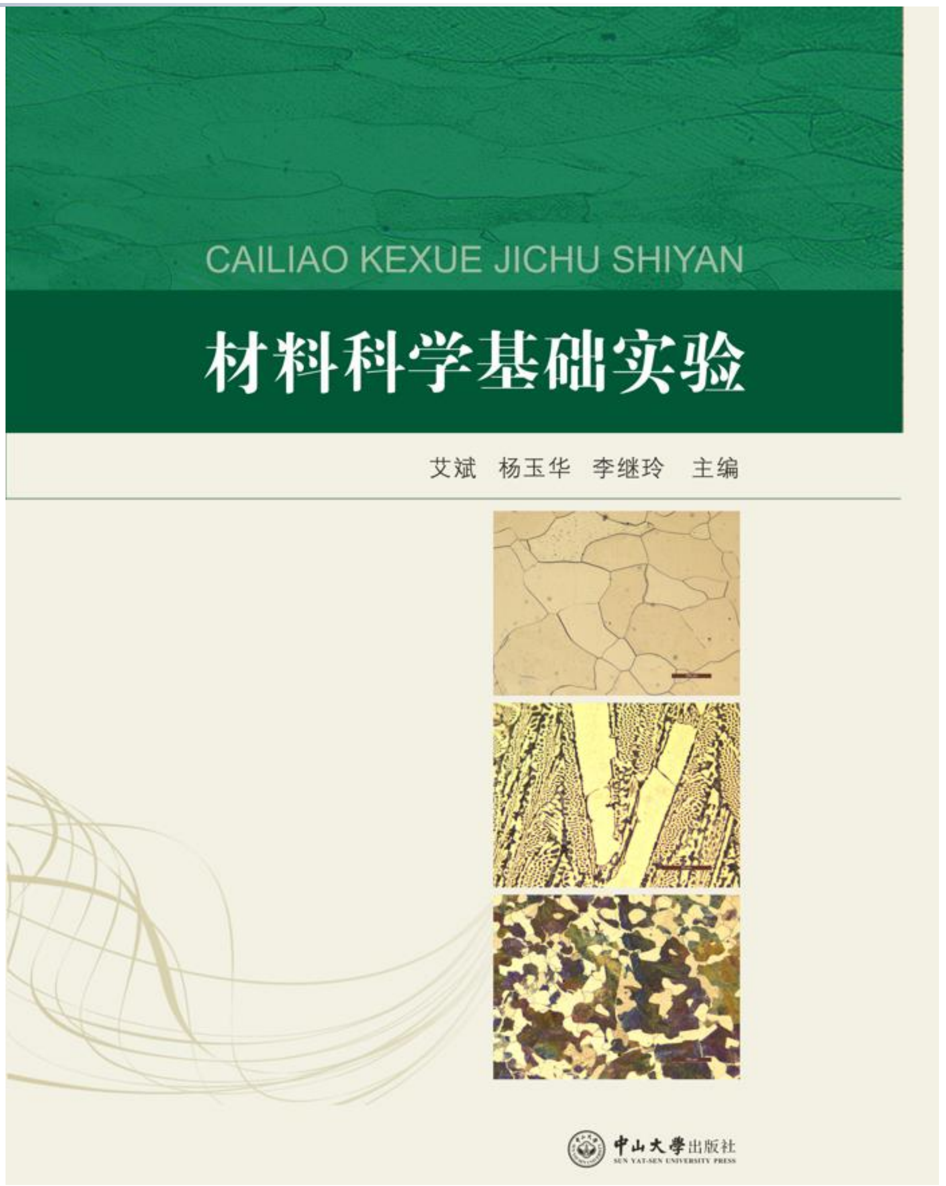
任课老师：

艾斌老师，负责实验项目9—12， C223，C250房间；
李继玲老师，负责实验项目5—8， C221，C248房间；
杨玉华老师，负责实验项目1—4， C225，C252房间。

实验讲义

实验讲义电子版：
下载链接为：
https://pan.baidu.com/s/1MkruJ5_4DmI_ALAJ5hH6Og
提取码为：p9a5

提示：从上面的链接还可以下载到实验报告模板以及本实验课的评分标准。



§1.2 实验过程及要求

§1.2.1 预习要求;
§1.2.2 实验前要求;
§1.2.3 实验过程要求（约3 hour）;
§1.2.4 实验报告撰写要求。

§1.2.1 预习要求

1. 熟读实验教材，在此基础上，撰写实验预习报告，内容涵盖实验目的、实验器具、实验原理、实验内容和步骤；如果需要，画出实验记录表格。预习报告是实验报告的浓缩版，篇幅最好不要超过3页。

2. 没有预习实验报告，原则上不准做实验！！！

§ 1.2.2 实验前要求

1. 学生至少提前5min到实验室。交报告、签到，阅读实验讲义中的实验设备介绍、实验内容和步骤，熟悉实验设备和实验内容。

2. 迟到30min且无正当理由按旷课论，且该实验成绩按零分计算，不得补做！！！

3. 迟到30min若有正当理由（需辅导员或本科教务员签字的请假条），则经教师确认后择日补做。

§ 1.2.3 实验过程要求

1. 教师简单讲解操作方法、要求、及安全注意事项。

2. 学生进行实验：观察现象、进行测量、记录数据。发现伪造数据按零分计。

3. 实验过程中教师经常巡视，及时纠正学生操作中的错误，回答学生的问题。

4.实验时间为4个学时（含教师讲解实验的时间），学生须加快实验进度，务必在规定的时间内完成实验。如果学生在下课前仍未完成实验，不但要补做实验，而且还会影响成绩，因此需认真预习实验。

5. 实验完毕后，(1)先自行检查和核对数据，自认无误后交任课教师检查、签名；(2)学生拿到教师签名的实验数据后，须整理好实验仪器和桌椅，经教师核实仪器无缺漏、无损坏之后方可离开实验室。

§ 1.2.4 实验报告撰写要求

1. 实验报告封面统一采用教师提供的实验报告模板，打印后填写；

2. 实验报告应该是一个独立完整的文件，须包含实验目的、实验器具、实验原理、实验内容和步骤、实验数据记录、实验数据处理（最重要）、思考题的回答（第二重要）等部分；此外，学生还可以增加自己认为重要的内容，譬如实验结果讨论和实验总结等内容（更高要求）；

3. 手工画图和计算机画图都可以，图表要规范和清楚；

4. 有教师签名的实验数据必须与实验报告一起上交。无教师签名的原始数据，该实验报告记零分！！！

§1.3 实验报告及评分标准

1. 预习（约5%）
2. 实验操作与记录（约15%）
3. 实验报告（约80%）
4. 每个实验都相当于一次测验

Ⅰ．预习报告评分标准（占总成绩的5%）：

1．预习报告完全符合要求。预习报告的篇幅限制在3页以内。字迹工整，表述清楚，自成一体；内容完整，涵盖实验目的、实验器具、实验原理、实验内容和步骤；如果需要，画出实验记录表格（实验记录表格页不计算在篇幅内）。（90-100分）

2．预习报告基本符合要求。字迹相对工整，内容相对完整，对各部分的叙述相对清楚，各部分的衔接（整体性）相对较好；（70-89分）

3．预习报告不符合要求。字迹潦草，内容不完整，各部分衔接突兀，叙述过于简单，篇幅过少，或者将打印出的实验讲义直接用作预习报告。（69分以下）

Ⅱ．实验操作评分标准（占总成绩的15%）：

1.严格按规程操作仪器。实验态度认真，动手能力强，能迅速准确地按要求完成实验。实验结束后，将实验台还原，及时清理实验垃圾。（90-100分）

2.基本上按规程操作仪器。实验态度较认真，动手能力较强，能较迅速准确地完成实验。实验结束后，将实验台还原，及时清理实验垃圾。（80-89分）

3.基本上按规程操作仪器。动手能力较弱，完成实验的时间过长。实验结束后，未按要求将实验台还原，未清理实验垃圾。（60-79分）

4.预习不充分或没有认真听老师讲解，违规操作仪器，造成仪器或样品损坏。实验结束后，未按要求将实验台还原，未清理实验垃圾。（60分以下）

Ⅲ. 实验报告评分标准（占总成绩的80%）：

1.实验报告书写规范，内容完整，包含实验目的、实验器具、实验原理、实验内容和步骤、实验数据记录、实验数据处理与结果分析（最重要）、思考题的回答（第二重要）等部分。实验数据处理过程详细清楚，实验结果以及不确定度计算过程正确，结果可信。思考题回答正确、全面，而且有自己独到的见解。除此以外，实验报告中还增加了对实验结果的分析讨论以及对实验的总结和反思，且有自己的创见（该内容为加分项）。及时上交实验报告。（90-100分）

2. 实验报告基本符合要求，各部分内容基本完整。有实验数据处理过程，但不够详细清楚。缺少对实验结果不确定度的计算或不确定度的计算过程存在明显的错误。对思考题的回答不够详细和全面。及时上交实验报告。（80-89分）

3. 实验报告基本符合规范，各部分内容大体完整。缺少实验数据处理过程。对思考题的回答过于简单。未能及时上交实验报告。（70-79分）

4. 实验报告不符合规范，内容不完整。缺少实验数据处理过程或缺少对思考题的回答。报告中存在明显的低级错误。长时间拖欠实验报告。（60-69分）

5. 实验报告存在抄袭现象。（60分以下）

§ 1.4 实验数据的处理

§ 1.4.1 误差、不确定度、有效数字
§ 1.4.2 列表、作图
§ 1.4.3 数据拟合（最小二乘法）

§ 1.4.1 误差、不确定度、有效数字

§ 1.4.1. 1 仪器读数

1. 模拟式仪表

(1)估读：最小分度后再估读一位。

(2)满偏档：多量程表，用读数接近满偏的档。

2. 数字式仪表

(1)显示的数字不变，记录全部数字。

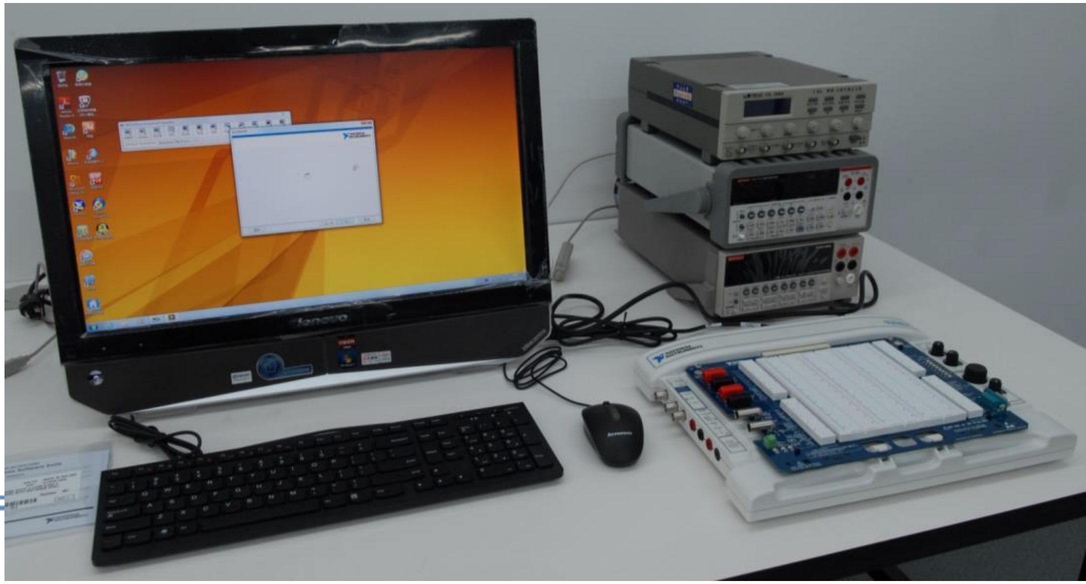
(2) 末几位不断变化，则记录到第一位变化的数字，之后省略。

8 7 5 . 9 6

平均，或大几率

3. 计算机采集数据

(1) 记录全部数字。



§ 1.4.1.2 误差

1. 误差的概念及分类

1.1 绝对误差和相对误差

(1)绝对误差（absolute error）定义为： $\Delta X = |X - A|$

(2)相对误差（relative error）定义为： $E = \Delta X / A$

式中，X 为实测值，A 为真实值。

1.2 系统误差、偶然误差、失误误差

(1)系统误差(system error)定义为：在测量过程中，某些因素始终以确定的规律影响测量结果而形成的误差。

系统误差的来源：理论公式的近似，实验方法的不完善，仪器本身的不准确，实验条件与仪器校准条件不一致产生的误差，操作者未按操作规程使用仪器，操作者不良习惯造成的人为误差等。

(2)偶然误差（occasional error)定义为：在相同实验条件下，多次测量同一物理量，所得误差的大小、符号随机变化，不可预知。

偶然误差的来源： 操作者本身的原因（譬如操作者对仪器最小分度值以下的估计值在多次重复实验中产生的差异），测试过程中起伏条件的干扰（譬如测试环境或者测量对象本身性质发生变化），加工技术的限制造成测量对象本身不精确等。

(3)过失误差或者失误误差定义为：实验中由操作失误或者实验条件突变造成的个别实验数据失实引起的误差。

过失误差的来源：操作者读错、记错或算错实验数据，实验条件发生突变等。

2. 偶然误差的分布规律及处理

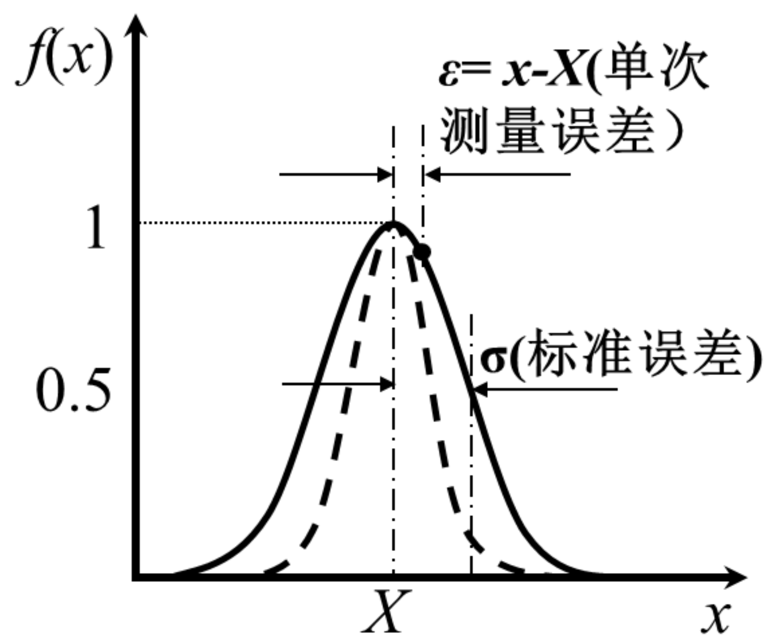
2.1偶然误差的分布规律

理论分析和实验证明，在相同条件下对一个物理量进行n次测量，当n→∞时，偶然误差呈现高斯分布（或正态分布）的特征。

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-X)^2}$$

σ 称为标准偏差，它是衡量测量值离散程度的参数。σ 越小，曲线越尖锐，数据离散度越小，测量的精密度越高。



2.2 标准偏差的三种表示方式

n趋近无穷大时，测量值对真值的偏离程度

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-X)^2}{n}}$$

总体标准偏差

当测量次数为有限次时，描述有限次测量值偏离算术平均值的程度

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}$$

样本标准偏差

当测量次数为有限次时，描述算术平均值偏离真值的程度

$$\sigma_{\overline{x}}=\frac{S}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

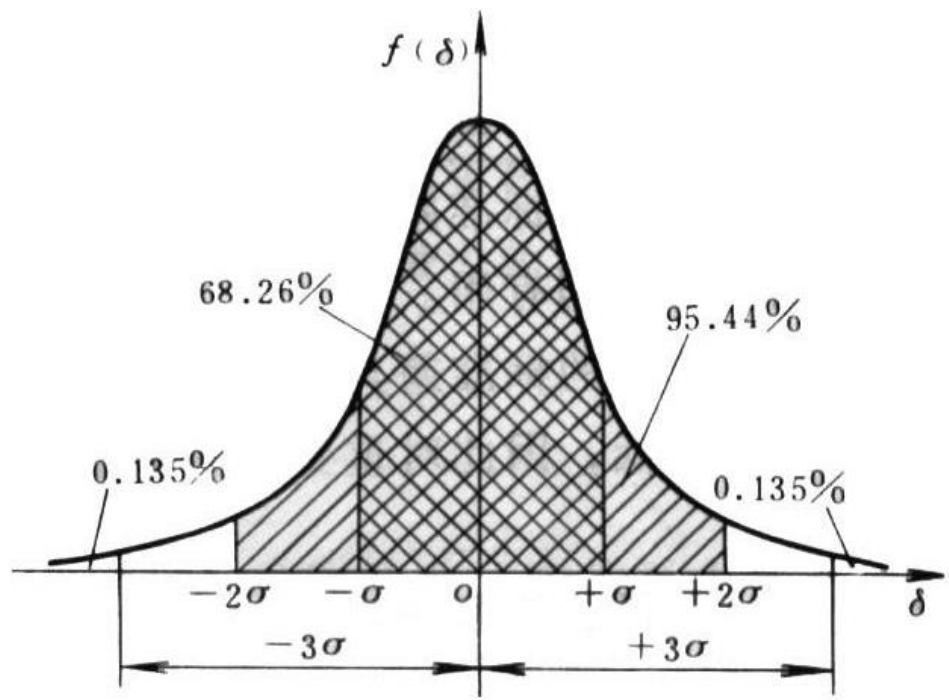
算术平均值的标准偏差

2.3 标准偏差的具体含义

$$P=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\varepsilon^{2}}{2\sigma^{2}}\right]d\varepsilon$$

上式表示测量值落在$(\bar{x}-\varepsilon,\bar{x}+\varepsilon)$之间的概率。

如果我们用 $x=\bar{x}\pm\sigma$ 表示实验结果，则测量结果的可信度为68.3%；如果用 $x=\bar{x}\pm 2\sigma$ 表示实验结果，则测量结果的可信度为95.4%；如果用 $x=\bar{x}\pm 3\sigma$ 表示实验结果，则测量结果的可信度为99.7%。



2.4 实验测量时偶然误差的计算

(1) 平均值： $\overline{x}=\sum_{1}^{n} x_i / n$

(2) *n* =1~5时，采用算术平均误差表示偶然误差

$$\eta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\overline{x}| \quad , \quad \eta_{\overline{x}}=\frac{\eta}{\sqrt{n}} \quad , \quad x=\overline{x}\pm\eta_{\overline{x}}$$

(3) *n*≥6时，采用算术平均值的标准偏差表示偶然误差

$$\sigma_{\overline{x}}=S/\sqrt{n}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\approx 1.25\eta_{\overline{x}} \quad , \quad x=\overline{x}\pm\sigma_{\overline{x}}$$

结果：误差只取1位，小数点后位数需对齐。例：234.56±0.02m（结果有5位有效数字）

[例] 用最小分度为毫米的米尺测量某物体的长度 l，5次测量值分别为62.58cm，62.54cm，62.56cm，62.54cm，62.52cm。求测量结果，采用标准误差表示测量的偶然误差。

解：(1)求算术平均值：

$$\bar{l}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}l_i=\frac{1}{5}\left(62.58+62.54+62.56+62.54+62.52\right)=62.55\ (\mathrm{cm})$$

(2)计算平均值的标准误差：

$$\sigma_{\bar{l}}=\sqrt{\frac{1}{5(5-1)}\sum_{i=1}^{5}\left(l_i-\bar{l}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{20}\left(0.03^2+0.01^2+0.01^2+0.01^2+0.03^2\right)}$$

$$=0.01\ (\mathrm{cm})$$

备注：标准偏差按只入不舍的原则，保留一位有效数字。

写出测量结果：$l = \bar{l} \pm \sigma_{\bar{l}} = 62.55 \pm 0.01\ (\text{cm})$

[例] 用螺旋测微器测量一金属片的厚度 b，测量了5次，测量值分别为3.612mm，3.650mm，3.618mm，3.608mm，3.655mm。求测量结果，采用算术平均误差表示测量的偶然误差。

解：(1)求算术平均值：

$$\bar{b} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} b_i = \frac{1}{5}\left(3.612 + 3.650 + 3.618 + 3.608 + 3.655\right) = 3.628\ (\text{mm})$$

(2)求算术平均绝对误差：

$$\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{5}\left(0.016 + 0.022 + 0.010 + 0.022 + 0.027\right)$$

$$= 0.02\ (\text{mm})$$

(3)求算术平均误差： $\eta_{\bar{b}} = \dfrac{\eta}{\sqrt{n}} = \dfrac{\eta}{\sqrt{5}} = \dfrac{0.02}{\sqrt{5}} = 0.009$

写出测量结果： $b = \bar{b} \pm \eta_{\bar{b}} = 3.628 \pm 0.009\ (\mathrm{mm})$

补充

间接测量量的偶然误差的计算

间接测量量偶然误差计算的基础是误差传递公式，误差传递公式的数学基础是全微分。假设 $u=f(x,y)$，则

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

因为各项误差分量的大小和符号是不确定的，考虑最不利的情况，

$$\Delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right| \qquad (1)$$

上式就是误差传递公式，Δx 和 Δy 既可以是算术平均绝对误差，也可以是算术平均误差。

可以证明，当采用标准偏差来表示偶然误差时，相应的公式可写成：

$$\sigma_u = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2} \qquad (2)$$

备注：(1)式和(2)式可以推广到间接测量量依赖3个或3个以上直接测量量的情形。

[例] 设 $u=x^m y^n$，推导误差传递公式。

解：对等式两边取对数，有 $\ln u = m\ln x + n\ln y$

然后两边求微分：$\dfrac{\Delta u}{u} = m\dfrac{\Delta x}{x} + n\dfrac{\Delta y}{y}$

考虑最不利的情况，各相对误差分量应取绝对值，

$$\frac{\Delta u}{u} = \left|m\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|n\frac{\Delta y}{y}\right|$$

上式便是以算术平均误差 Δx 和 Δy 表示的误差传递公式。

如果用标准偏差表示偶然误差，相应的误差传递公式可表示为：

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{u} = \sqrt{\left(m\frac{\sigma_{\bar{x}}}{x}\right)^2 + \left(n\frac{\sigma_{\bar{y}}}{y}\right)^2}$$

[例] 通过测量单摆的摆长和周期来计算重力加速度。用算术平均误差描述偶然误差。计算公式为 $g=4\pi^2\dfrac{l}{T^2}$

已知 $l=\bar{l}\pm\Delta l=98.94\pm0.05\ \text{(cm)},\ T=\bar{T}\pm\Delta T=1.9933\pm0.0006\ \text{(s)}$ 。

解：(1)由摆长和周期的算术平均值计算重力加速度的平均值

$$\bar{g}=4\pi^2\frac{\bar{l}}{\bar{T}^2}=4\times3.1416^2\times\frac{98.94}{1.9933^2}=983.1\ (\text{cm/s}^2)$$

(2)推导算术平均误差的计算公式并计算误差

$$\Delta g=\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\Delta l+\left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\Delta T=4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}\Delta l+\frac{2l}{T^3}\Delta T\right)=g\left(\frac{\Delta l}{l}+\frac{2\Delta T}{T}\right)$$

$$=983.1\times\left(\frac{0.05}{98.94}+2\times\frac{0.0006}{1.9933}\right)=1\ (\text{cm/s}^2)$$

写出测量结果： $g=\bar{g}\pm\Delta g=983\pm 1\ (\text{cm/s}^2)$

[例] 通过测量单摆的摆长和周期来计算重力加速度。用标准偏差描述偶然误差。计算公式为 $g=4\pi^2\dfrac{l}{T^2}$

已知 $l=\bar{l}\pm\sigma_l=98.94\pm 0.06\ (\text{cm}),\ T=\bar{T}\pm\sigma_T=1.9933\pm 0.0007\ (\text{s})$ 。

解：(1)由上题推导出的用算术平均误差表示偶然误差的公式为：

$$\Delta g=\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\Delta l+\left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\Delta T=4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}\Delta l+\frac{2l}{T^3}\Delta T\right)=g\left(\frac{\Delta l}{l}+\frac{2\Delta T}{T}\right)$$

相应地，用标准偏差表示偶然误差的公式及结果为：

$$\sigma_g=\bar{g}\sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2+4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2}=983.1\times\sqrt{\left(\frac{0.06}{98.94}\right)^2+4\times\left(\frac{0.0007}{1.9933}\right)^2}=0.9\ (\text{cm/s}^2)$$

写出测量结果：$g=\bar{g}\pm\sigma_g=983.1\pm0.9\ (\mathrm{cm/s^2})$

3. 处理系统误差的一般原则

(1) 采用更加精确的方法和理论去代替原先不甚精确的方法和理论

单摆周期的计算公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 仅在初始摆角 $\theta\to0$ 时是精确的，若用此公式计算重力加速度会造成所算出的重力加速度偏小的系统误差。可使用更精确的公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)$ 计算重力加速度来减小由于 θ 较大时引起的系统误差。

(2)采用适当的测量方法来减弱或消除系统误差对结果的影响

为了消除天平不等臂误差，可先把待测物体放在左盘，在右盘用质量m_1的砝码与之平衡；然后把待测

物体放在右盘，在左盘用质量为m_2的砝码与之平衡，可以证明待测物体的质量为 $m=\sqrt{m_1 m_2}$ ，与天平是否等臂无关。

(3)用数据处理的方法判断是否存在系统误差

要判断测量数据中是否存在累积性系统误差，可使用马利科夫判据。假设一共进行了2n次等精度测量，先求出全部2n次测量结果的平均值

$$\overline{x}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}x_i$$

接着，求出前n次测量值与平均值的偏差之和 M_1

$$M_1=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)$$

然后，再求出后n次测量值与平均值的偏差之和 M_2

$$M_2 = \sum_{i=n+1}^{2n} \left(x_i - \overline{x} \right)$$

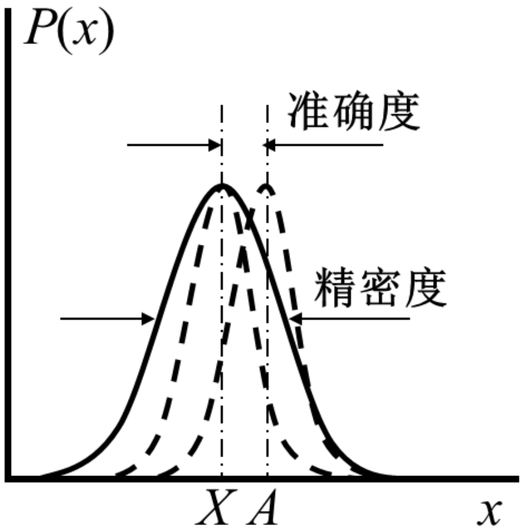
如果 $\Delta M = M_1 - M_2$ 近似等于零，则证明测量结果中不存在累积性误差，否则说明存在累积性误差。

(4)在设计实验时应考虑可能存在的系统误差，并采取措施避免或减小

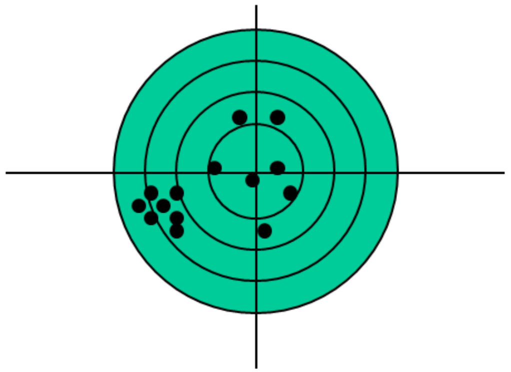
例如，在进行微弱电信号的精密测量时，要考虑外界电磁场的影响，可采取电磁屏蔽的方法去解决。

补充 准确度、精密度和精确度

测量的**准确度**（**accuracy**）是指测量数据的平均值偏离真值小，即系统误差小；



测量的**精密度**（**precision**）用来表征测量数据的分散性，精密度高是指数据分散程度小，即偶然误差小。



准确度高，精密度也高，精确度才可能高。

4. 误差计算几个要注意的问题

位数： 误差最终结果只取一位，中间计算过程可任意取多位。

进位： 只入不舍，1－9均进位。例如 2.0 → 2，2.1~2.9 → 3

偶然误差可能出现很小甚至等于零的情况，或只作一次测量，无法用上述方法评估误差大小，必须考虑不确定度。

§ 1.4.1.3 不确定度

1. 不确定度的概念及分类

1.1 不确定度的概念

不确定度是测量值不确定程度的量度，即对待测量物理量真值的估计。若 N 是待测物理量的测量值，ΔN 是不确定度，则待测物理量的真值将以置信概率 P 落在置信区间 $[N-\Delta N, N+\Delta N]$ 内。

备注：不确定度和误差是两个不同的概念。误差是指测量值与真值之差，而不确定度是表示真值以一定的置信概率出现在以测量值为中心的区间的单侧宽度。

1.2 不确定度的分类（可分为两类）

(1)A类不确定度分量：在同一条件下多次测量，用统计学方法计算的分量，用 U_A 表示。

$$U_A = \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) S \quad , \qquad (P = 0.95) \tag{3}$$

式中，S 为样本标准偏差，t 为分布因子，n 为测量次数。如果实验中测量次数5<n≤10，且置信概率 P>0.94时，A类不确定度 U_A 可近似取样本标准偏差 S 的值，即

$$U_A = \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) S \approx S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad , \qquad (5 < n \le 10) \tag{4}$$

(2)B类不确定度分量：用非统计学方法确定的不确定度分量，用 U_B 表示。例如，由测量仪器本身的不准确性带来的不确定度分量。这里，我们只要求掌握由测量仪器误差引起的不确定度 U_B 分量的估计方法。

$$U_B = \Delta_{inst} \tag{5}$$

式中，Δ_{inst} 是指仪器误差，是指在正确使用仪器的条件下，测量值与真值之间可能产生的最大误差。

2. 仪器误差的确定方法

(1) **由仪器的说明书中给出**；

(2) 电表类仪器误差：**由电表的等级和量程算出**；

(3) 估计：

刻度类仪器误差：**取最小刻度的一半**。

显示类仪器误差：**取显示的最小数字**。

精密类仪器误差：**卡尺和千分尺都取精度**。

扩大的仪器误差：**视实际误差的大小来定**。

补充

电工仪表的仪器误差

按照国家标准，电工仪表的准确度等级分为0.1，0.2，0.5，1.0，1.5，2.5和5.0七个等级。电表的准确度等级是用电表的额定相对误差来表示的。例如一个0.5等级的电表，其额定相对误差为±0.5%。用电表的准确度等级乘以电表的量程可求出电表指示值的最大绝对误差，即

$$\Delta_{inst} = \frac{\text{仪器等级} \times \text{量程}}{100} \qquad (6)$$

譬如，量程为7.5V、准确度等级为0.5V的电压表，仪器的误差（最大绝对误差）为

$\Delta inst=7.5\times0.5\%=3.8\times10^{-2}$ V

3. 不确定度的合成

采用方和根法合成，即

$$U=\sqrt{U_A{}^2+U_B{}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}+\sum_{j=1}^{}\Delta_{inst_j}^2} \tag{7}$$

4. 间接测量结果不确定度的估计

若间接测量量 $N=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，它们对应的A类不确定度分量的样本标准偏差可参照之前给出的误差传递公式写成

$$S_A=\sqrt{\sum_{i=1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S_i^2} \tag{8}$$

B类不确定度分量的标准偏差也可参照之前给出的误差传递公式写成

$$u = \sqrt{\sum_{j=1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 u_j^2} \tag{9}$$

再利用不确定度的合成公式，求出总的不确定度

$$U = \sqrt{S_A{}^2 + u^2} = \sqrt{\sum_{i=1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 S_i^2 + \sum_{j=1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 u_j^2} \tag{10}$$

5. 不确定度的简单估计

5.1 只测量一次的情况

估算指针式仪表的不确定度时，一般取仪器的最小分度值Δ作为极限误差，并假定误差在两个分度值间均匀分布，这时仪器不确定度可用 $\Delta_{inst} = \Delta/\sqrt{3}$ 计算。对于数字式仪表，显示数字的末位存在误差，这时仪器不确定度可取为末位的一个单位。

5.2 相同条件下重复多次测量的情况

相同条件下重复多次测量的A类不确定度分量可按之前介绍的方法求出样本标准偏差，然后再与B类不确定度分量按(7)式合成总的不确定度。

[例] 用游标精度为0.02mm的游标卡尺测量圆柱体的外径（D）和高（H）如下表所示，求圆柱体的体积V和不确定度 U_v，并写出测量结果表达式。

次 数	D（cm）	H (cm)
1	6.004	8.096
2	6.002	8.094
3	6.006	8.092
4	6.000	8.096
5	6.006	8.096
6	6.000	8.094
7	6.006	8.094
8	6.004	8.098
9	6.000	8.094
10	6.000	8.096

解：(1)由测量数据可计算出平均值及测量结果的样本标准偏差（即测量不确定度的 S 分量）分别为：

$$\bar{D}=\frac{1}{n}\sum D_i=6.0028cm$$

$$S_D=\sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}=0.0027cm$$

$$\bar{H}=\frac{1}{n}\sum H_i=8.0950cm$$

$$S_H=\sqrt{\frac{\sum(H_i-\bar{H})^2}{n-1}}=0.0017cm$$

(2)由游标卡尺的仪器误差引起的不确定度分量为：

$$u=\Delta_{inst}=0.002cm$$

(3) 直接测量量的合成不确定度：

$$U_D=\sqrt{s_D^2+u_D^2}=\sqrt{(2.7\times10^{-3})^2+(2.0\times10^{-3})^2}=3.4\times10^{-3}(cm)=0.004(cm)$$

$$U_H=\sqrt{s_H^2+u_H^2}=\sqrt{(1.7\times10^{-3})^2+(2.0\times10^{-3})^2}=2.6\times10^{-3}(cm)=0.003(cm)$$

(4) D 和 H 的测量结果表达式

$$D=\bar{D}\pm U_D=(6.0028\pm0.0034)cm=(6.003\pm0.004)cm$$

$$H=\bar{H}\pm U_H=(8.0950\pm0.0026)cm=(8.095\pm0.003)cm$$

(5) 圆柱体的体积为：

$$\bar{V}=\frac{\pi}{4}\bar{D}^2\bar{H}=\frac{1}{4}\times3.1416\times(6.003)^2\times8.095=229.11(cm^3)$$

圆柱体体积的测量不确定度 $U_V=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2U_D^2+\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)^2U_H^2}$

不确定度传递系数分别为：

$$\frac{\partial V}{\partial D}=\frac{\partial}{\partial D}(\frac{\pi}{4}D^2H)=\frac{\pi}{2}DH=\frac{1}{2}\times 3.14\times 6.0\times 8.1=76$$

$$\frac{\partial V}{\partial H}=\frac{\partial}{\partial H}(\frac{\pi}{4}D^2H)=\frac{\pi}{4}D^2=\frac{1}{2}\times 3.14\times (6.0)^2=28$$

因此，

$$U_V=\sqrt{(\frac{\partial V}{\partial D})^2U_D^2+(\frac{\partial V}{\partial H})^2U_H^2}=\sqrt{(76\times 0.004)^2+(28\times 0.003)^2}=0.32=0.4$$

(6) 测量结果的表达式

$$V=\bar{V}\pm U_V=(229.1\pm 0.4)\ \text{cm}^3$$

§ 1.4.1.4 有效数字

1. 有效数字的概念

(1) 有效数字（不确定度的另一种表达方式）：测量结果的有效数字应由测量误差决定。**对于一个数，从它左边第一个非零数字开始到最右边的数字称为有效数字。**

例：	234.56±0.02m	五位有效数字
	123	三位
	0.0123	三位
	123.00	五位

小数点后的“0”有意义，不能随意增减。有效数字末位即误差位。

(2) 测量值的末位应与误差位对齐。

错误：123.56±0.1, 123.56±0.001

正确：123.56±0.01

(3) 有效数字的位数不会因单位的变换而改变。

错误：1234km=1234000000mm,

正确：1234km=1.234×10^{6} mm

(4) 对于很大或很小的数，应使用科学记数法。

用科学记数法改写测量结果不能改变有效数字。

例：0.0000001234mm=1.234×10^{-7} mm

2. 有效数字的运算法则

有效数字运算法则的理论依据是误差传递公式。在实际运算中，对于不需要精确误差的场合，用有效数字运算法则来处理运算结果是非常方便的。

(1) 加、减运算

计算结果的小数点后应保留的位数与参加运算的各量中小数点后位数最少的相同。

例如 $50.1+3.278-0.45 =52.928=52.9$

(2) 乘、除运算

计算结果的有效数字的位数与参加运算的各量中有效数字位数最少的相同。

例如 $2.142\times10.1\div25=0.865368=0.87$

(3) 乘方、开方运算

乘方和开方结果的有效数字的位数与底数相同。

例如 $1.23^2 = 1.51$，$\sqrt{13579} = 116.53$

(4) 取对数运算

一个数取对数后所得的尾数（即小数点后的部分）的位数与真数的位数相同。

例如 lg1983=3.2973, lg1.983=0.2973

(5) 指数运算

进行指数运算后的有效数字的位数与指数中小数点后的位数相同。

例如 $10^{6.25}=1.8\times10^{6}$, $10^{0.0035}=1.008$

备注：若指数为整数，则按乘法考虑。

(6) 三角函数运算

三角函数有效数字位数取决于角度有效数字的位数。

例如 当角度测量精密度为 $\Delta\varphi=1'=3\times10^{-4}$ rad 时，确定 $\sin\varphi=\sin79^{\circ}24'$ 有效数字的位数。由于 $\sin\varphi=0.9829353$, $\cos\varphi=0.1839513$, 所以

$$\Delta\sin\varphi=\cos\varphi\Delta\varphi=0.1839513\times3\times10^{-4}=6\times10^{-5}$$

即误差出现在小数点后第5位上，$\sin79^{\circ}24'=0.98294$

(7) 有效数字运算时的几个注意事项

有多个数值参加运算时，各数值和中间运算结果可以比运算法则规定多保留一位数，最后的结果再按运算法则截取；

常数譬如 π，e 等数值的有效数字位数没有限制，可根据需要取至任意多的位数。

若计算误差，则中间计算过程中，有效数字不用修约，适合计算机处理数据！

3. 有效数字尾数的舍入法则

(1) 有效数字尾数的舍入法则是："四舍六入五凑双"尾数小于5时舍去，大于5时前一位进1，尾数等于5则把末位凑成偶数。

例：12.34→12.3，12.36→12.4，12.35→12.4，12.45→12.4

(2) 误差计算结果的尾数舍入法则是："只入不舍"只保留一位有效数字，只入不舍，不夸大测量精度。

例： 2.0 → 2，2.1~2.9 → 3

§ 1.4.2 列表、作图

§ 1.4.2.1 列表

列表法是用表格把实验数据按一定的形式和顺序列出，有助于简单清晰地表示出有关物理量的对应关系。

对列表法的一般要求：

(1)排列有序，简单明了；

(2)列表的项目应包括物理量的名称（应用符号表示）、单位和量值的数量级；

(3)表格中的数据应正确反映测量结果的精确度，按有效数字的书写规则书写；

(4)表的上方要有标题。

§ 1.4.2.2 作图

通过作图，可以把两个变量之间的关系和变化趋势直观形象地表示出来。经过平滑处理的图线相当于对数据进行平均处理或滤波处理，部分地消除了叠加在信号上的噪音。通过作图法还可以帮助我们方便地找出明显偏离规律的测量点，以便分析它们产生的原因。

对作图法的一般要求：

(1)如果是手工作图，需要使用坐标纸，根据横纵坐标代表的变量之间的关系，选择直角坐标或对数坐标等；

(2)坐标轴比例的选取应与测量数据的精密度相匹配，使测量数据中的可靠部分在图上仍然可靠，存疑部分能在图上估计得出。

(3)为了使图线能较好地充满整个图面，应当选取合适的坐标轴起始点；

(4)为了与非实验点区分，实验点应用“＋”、“×”、“●”、“△”、“○”、“■”、“□”、“▲”等符号画出。如果是人工画图，实验点用“＋”、“×”标记，如果是计算机画图，可使用上面的任意一种符号；

(5) 根据点的分布画出光滑的直线或者曲线。图线不一定通过全部的实验点，但要求实验点较均匀地分布在图线的两侧；

(6)坐标轴代表物理量的名称、单位要标注清楚。坐标轴上要标注刻度值。图的下方要有图题。

实验曲线

(1) 坐标轴（原点、零点）

(2) 分度值

(3) 物理量/单位

(4) 实验点

(5) 实验曲线（光滑）

(6) 姓名，时间

(7) 图题及编号

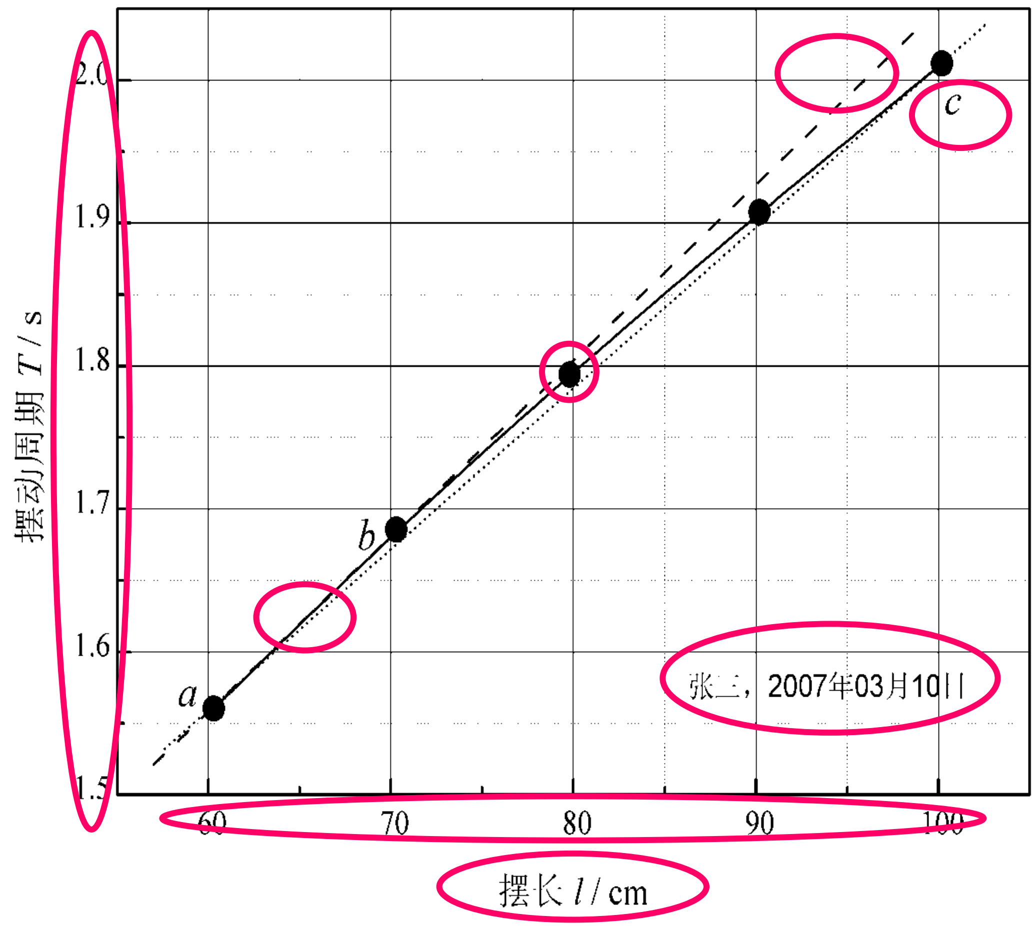
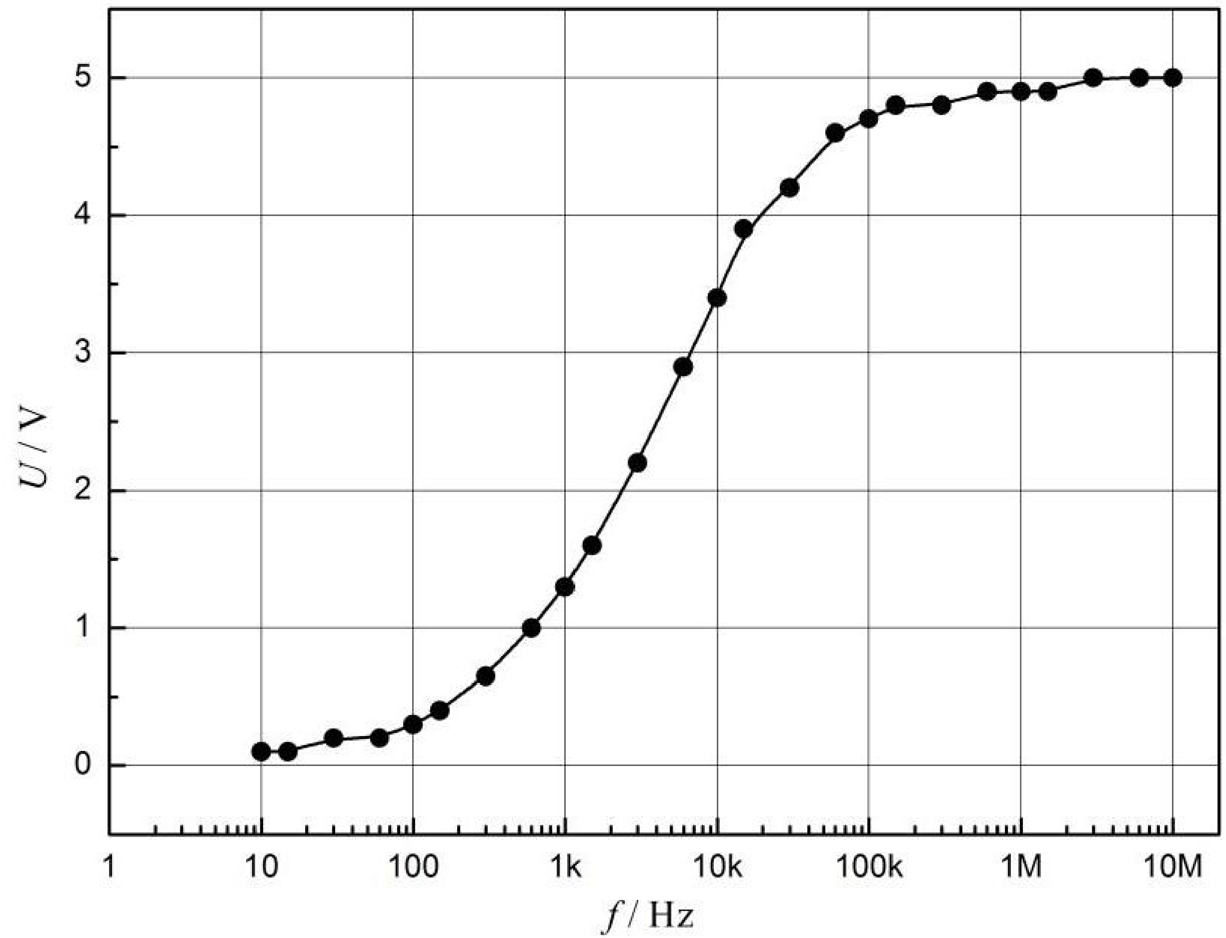


图1 单摆摆动周期与摆长关系曲线



例：单对数坐标，横坐标不需要计算 log*f* 的值再作图。横坐标注 log(*f*)/Hz 错误，标注 *f*/Hz 正确！

§ 1.4.3 数据拟合（最小二乘法）

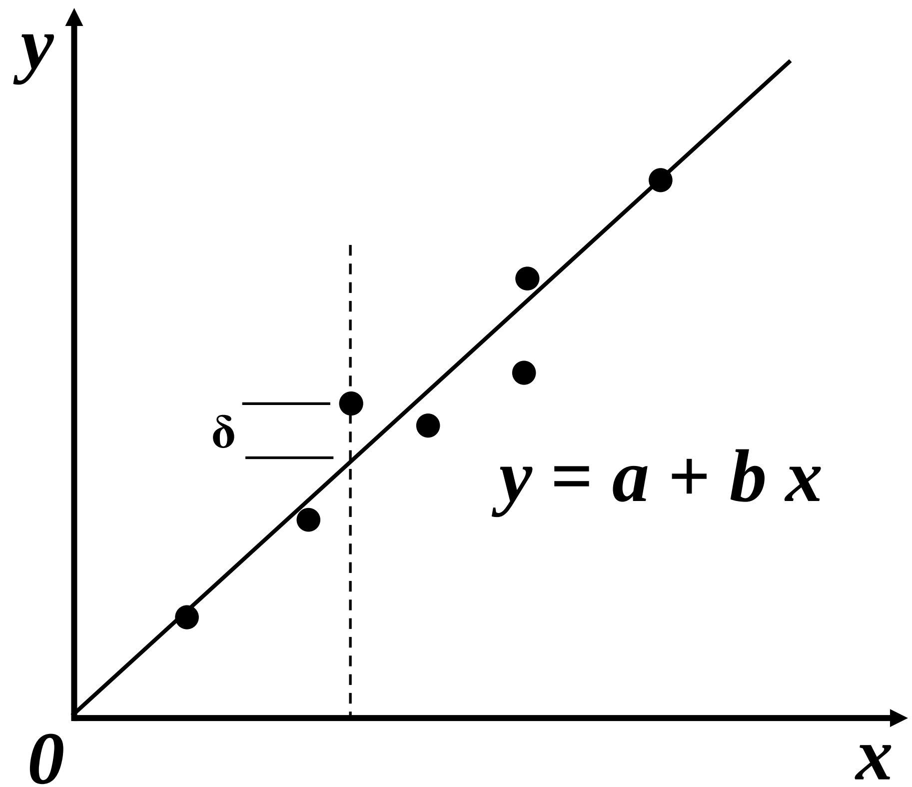
假设物理量 x，y 之间存在线性依赖关系 $y=a+bx$，最小二乘法的原理是：最佳的 a、b 值应使所有测量值 y_i与理论值 $a+bx_i$ 的偏差的平方和最小。

$$\delta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots\ldots + \delta_n^2$$

$$\delta_i^2 = [y_i - (a + bx_i)]^2$$

$$\frac{\partial \delta^2}{\partial a} = 0\text{，}\quad \frac{\partial \delta^2}{\partial b} = 0 \quad \text{解之得}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{\overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{xy}}{\overline{x}^2 - \overline{x^2}} \\ a = \overline{y} - b\overline{x} \end{cases}$$



式中， $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ， $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$

$$\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \quad , \quad \overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

定义相关系数 γ。γ 越接近于1，实验结果的数据越接近线性分布，否则应考虑用其它形式的函数去拟合。

$$\gamma=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2}-\bar{x}^2)(\overline{y^2}-\bar{y}^2)}}\le 1$$

数据的相互关系明显偏离线性时，考虑以下两种处理方法：

(1) 通过变量代换把关系变成线性；

$g = 4\pi^2 l/T^2$，$l \sim T$ 非线性，$l \sim \mathrm{T}^2$ 成线性。

(2) 直接用计算机拟合。

目的：建立经验公式，发现规律。

谢谢大家！