

Лабораторная работа 2

1. Преобразуйте представление ось ω – угол θ в кватернион

- 1.1. $\omega = [-0.1457, 0.5976, -0.7884], \theta = 3.5112$
- 1.2. $\omega = [0.4928, 0.5435, 0.6795], \theta = 3.5366$
- 1.3. $\omega = [-0.1784, 0.2396, 0.9543], \theta = 1.8534$
- 1.4. $\omega = [-0.5780, -0.7786, -0.2442], \theta = 1.2844$
- 1.5. $\omega = [0.7362, 0.0666, 0.6734], \theta = 4.0863$
- 1.6. $\omega = [-0.6893, 0.6863, 0.2319], \theta = 5.0171$
- 1.7. $\omega = [-0.1380, -0.8528, -0.5037], \theta = 6.1800$
- 1.8. $\omega = [0.0351, 0.5640, -0.8251], \theta = 2.4076$
- 1.9. $\omega = [0.6360, 0.1757, 0.7515], \theta = 2.9780$
- 1.10. $\omega = [0.2821, 0.0936, -0.9548], \theta = 1.8078$
- 1.11. $\omega = [0.8807, 0.4069, -0.2426], \theta = 1.6467$
- 1.12. $\omega = [-0.4320, 0.3838, 0.8162], \theta = 1.8309$
- 1.13. $\omega = [0.6514, 0.6601, 0.3740], \theta = 4.2487$

2. Преобразуйте кватернион $Q = [Q_s, Q_x, Q_y, Q_z]$ в матрицу поворота R согласно формуле:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2Q_y^2 - 2Q_z^2 & 2Q_xQ_y - 2Q_zQ_s & 2Q_xQ_z + 2Q_yQ_s \\ 2Q_xQ_y + 2Q_zQ_s & 1 - 2Q_x^2 - 2Q_z^2 & 2Q_yQ_z - 2Q_xQ_s \\ 2Q_xQ_z - 2Q_yQ_s & 2Q_yQ_z + 2Q_xQ_s & 1 - 2Q_x^2 - 2Q_y^2 \end{bmatrix}$$

- 2.1. $Q = [-0.4161, 0.3523, -0.3074, 0.7800]$
- 2.2. $Q = [0.9010, -0.0131, -0.3935, 0.1818]$
- 2.3. $Q = [-0.6497, -0.3817, -0.4074, 0.5159]$
- 2.4. $Q = [0.8238, 0.0256, 0.1482, 0.5466]$
- 2.5. $Q = [0.4707, 0.6699, 0.5226, 0.2377]$
- 2.6. $Q = [0.8826, 0.3873, -0.1206, -0.2376]$
- 2.7. $Q = [0.6442, -0.5851, -0.3146, 0.3791]$
- 2.8. $Q = [-0.3169, 0.1932, -0.6358, 0.6768]$
- 2.9. $Q = [-0.7757, 0.5270, -0.2611, -0.2290]$
- 2.10. $Q = [-0.1433, -0.5519, -0.6894, -0.4467]$
- 2.11. $Q = [-0.8954, 0.2335, -0.2158, 0.3116]$
- 2.12. $Q = [0.4678, -0.6865, 0.2708, 0.4863]$
- 2.13. $Q = [0.8540, 0.1173, 0.2956, 0.4118]$

3. Преобразуйте матрицу поворота R в представление ось $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ – угол θ согласно формулам:

$$\theta = \arccos \frac{\text{trace}(R) - 1}{2}, \quad \omega = \frac{1}{2 \sin \theta} [R_{32} - R_{23}, R_{13} - R_{31}, R_{21} - R_{12}].$$

Несмотря на то, что одной матрице поворота R соответствуют два эквивалентных решения (ω, θ) и $(-\omega, -\theta)$, задание ограничено случаем $\theta \in [0, \pi]$. Однако необходимо учесть особые точки, при которых

$2 \sin \theta = 0$. При $\theta = 0$ существует бесконечное число решений, и в этом случае $\omega = [\text{NaN}, \text{NaN}, \text{NaN}]$.
При $\theta = \pi$ существует два решения, вычислить которые можно по формуле:

$$R = \begin{bmatrix} \omega_x^2 \nu_\theta + c_\theta & \omega_x \omega_y \nu_\theta - \omega_x s_\theta & \omega_x \omega_z \nu_\theta + \omega_y s_\theta \\ \omega_x \omega_y \nu_\theta + \omega_x s_\theta & \omega_y^2 \nu_\theta + c_\theta & \omega_y \omega_z \nu_\theta - \omega_x s_\theta \\ \omega_x \omega_z \nu_\theta - \omega_y s_\theta & \omega_y \omega_z \nu_\theta + \omega_x s_\theta & \omega_z^2 \nu_\theta + c_\theta \end{bmatrix},$$

где $c_\theta = \cos \theta$, $s_\theta = \sin \theta$, $\nu_\theta = 1 - \cos \theta$.

Для проверки на особые точки используйте следующие матрицы:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3.1. R = \begin{bmatrix} -0.5092 & -0.0269 & 0.8602 \\ 0.7973 & 0.3617 & 0.4833 \\ -0.3242 & 0.9319 & -0.1628 \end{bmatrix}$$

$$3.2. R = \begin{bmatrix} -0.4434 & -0.4486 & 0.7760 \\ 0.8961 & -0.2012 & 0.3957 \\ -0.0214 & 0.8708 & 0.4912 \end{bmatrix}$$

$$3.3. R = \begin{bmatrix} -0.1350 & -0.1968 & 0.9711 \\ 0.7667 & -0.6416 & -0.0234 \\ 0.6277 & 0.7413 & 0.2375 \end{bmatrix}$$

$$3.4. R = \begin{bmatrix} 0.2233 & 0.7083 & 0.6697 \\ 0.7821 & -0.5402 & 0.3107 \\ 0.5818 & 0.4544 & -0.6746 \end{bmatrix}$$

$$3.5. R = \begin{bmatrix} 0.2117 & -0.0352 & 0.9767 \\ 0.6449 & -0.7459 & -0.1666 \\ 0.7344 & 0.6652 & -0.1352 \end{bmatrix}$$

$$3.6. R = \begin{bmatrix} -0.4777 & -0.3495 & 0.8060 \\ 0.8728 & -0.2932 & 0.3901 \\ 0.1000 & 0.8899 & 0.4451 \end{bmatrix}$$

$$3.7. R = \begin{bmatrix} 0.0028 & -0.0401 & 0.9992 \\ 0.8698 & -0.4929 & -0.0222 \\ 0.4934 & 0.8692 & 0.0335 \end{bmatrix}$$

$$3.8. R = \begin{bmatrix} -0.8299 & 0.2217 & 0.5120 \\ 0.3220 & -0.5592 & 0.7640 \\ 0.4557 & 0.7989 & 0.3927 \end{bmatrix}$$

$$3.9. R = \begin{bmatrix} -0.1631 & 0.9346 & 0.3162 \\ 0.9840 & 0.1773 & -0.0167 \\ -0.0716 & 0.3084 & -0.9485 \end{bmatrix}$$

$$3.10. R = \begin{bmatrix} 0.2696 & 0.2931 & 0.9173 \\ 0.9347 & 0.1496 & -0.3225 \\ -0.2317 & 0.9443 & -0.2336 \end{bmatrix}$$

$$3.11. R = \begin{bmatrix} -0.3565 & 0.0457 & 0.9332 \\ 0.9110 & 0.2386 & 0.3363 \\ -0.2073 & 0.9701 & -0.1267 \end{bmatrix}$$

$$3.12. R = \begin{bmatrix} -0.5114 & 0.6943 & 0.5064 \\ 0.8520 & 0.4865 & 0.1934 \\ -0.1121 & 0.5303 & -0.8404 \end{bmatrix}$$

$$3.13. R = \begin{bmatrix} 0.3491 & 0.1182 & 0.9296 \\ 0.8084 & 0.4637 & -0.3626 \\ -0.4739 & 0.8781 & 0.0663 \end{bmatrix}$$

4. Напишите функцию `quat_slert`, чтобы продемонстрировать SLERT (spherical linear interpolation) двух кватернионов и промежуточных между ними.

- кватернион q_0 — начальная ориентация;
- кватернион q_1 — конечная ориентация;
- переменная `steps` — общее число кватернионов, включая промежуточные между q_0 и q_1 .

Функция должна возвращать матрицу `q_int` размерности `steps × 4`, которая хранит все промежуточные кватернионы, включая сами q_0 (первая строка матрицы) и q_1 (последняя строка матрицы).

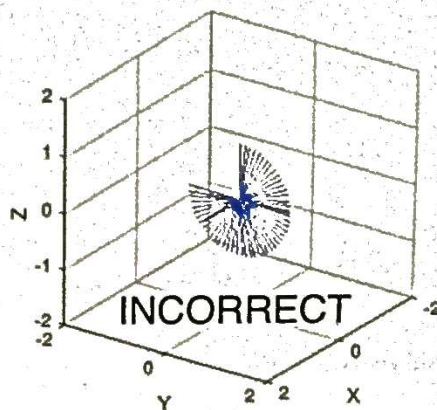
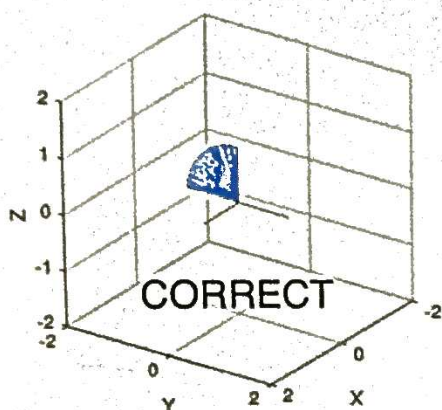
Угол между (единичными) кватернионами можно найти, используя скалярное произведение:

$$\cos \Omega = q_0 q_1.$$

Промежуточный кватернион в момент времени t вычисляется согласно формуле:

$$q_t = \frac{\sin((1-t)\Omega)}{\sin \Omega} q_0 + \frac{\sin(t\Omega)}{\sin \Omega} q_1.$$

Важно! При написании функции необходимо «найти» кратчайший путь между двумя поворотами:



Для тестирования алгоритма необходимо сохранить изменения в функции `quat_slerp` и запустить `perform_slerp`. Там же можно регулировать начальные значения q_0 , q_1 и `steps`.