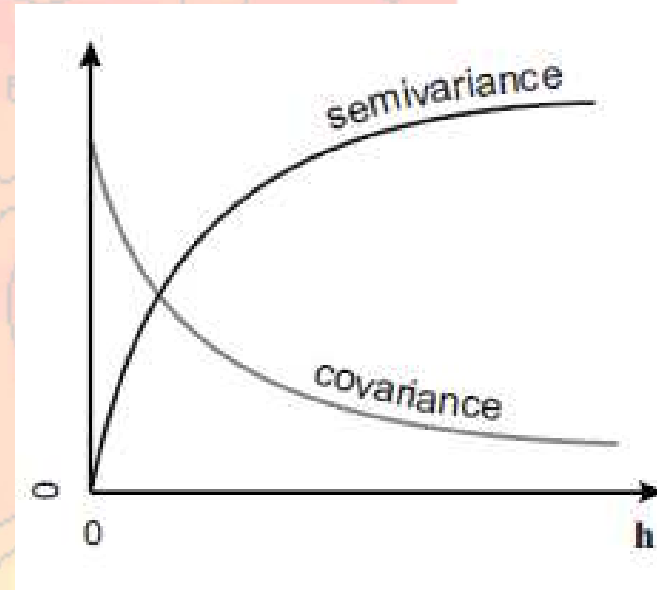


Strukturální funkce

- Modelování prostorového vztahu (autokorelace) mezi měřenými body
 - vzdálenost a směr
- **Kovariogram – $C(h)$**
- Korelogram
- **(semi)Variogram – $\gamma(h)$**
- Madogram
- Rodogram



$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

Kovariogram / Korelogram

$$K(h) = \frac{1}{2n_h} \sum_{i=1}^n [u(x) - m(x)] * [u(x+h) - m(x+h)]$$

- $m(x)$ je střední hodnota veličiny u v blízkosti místa x

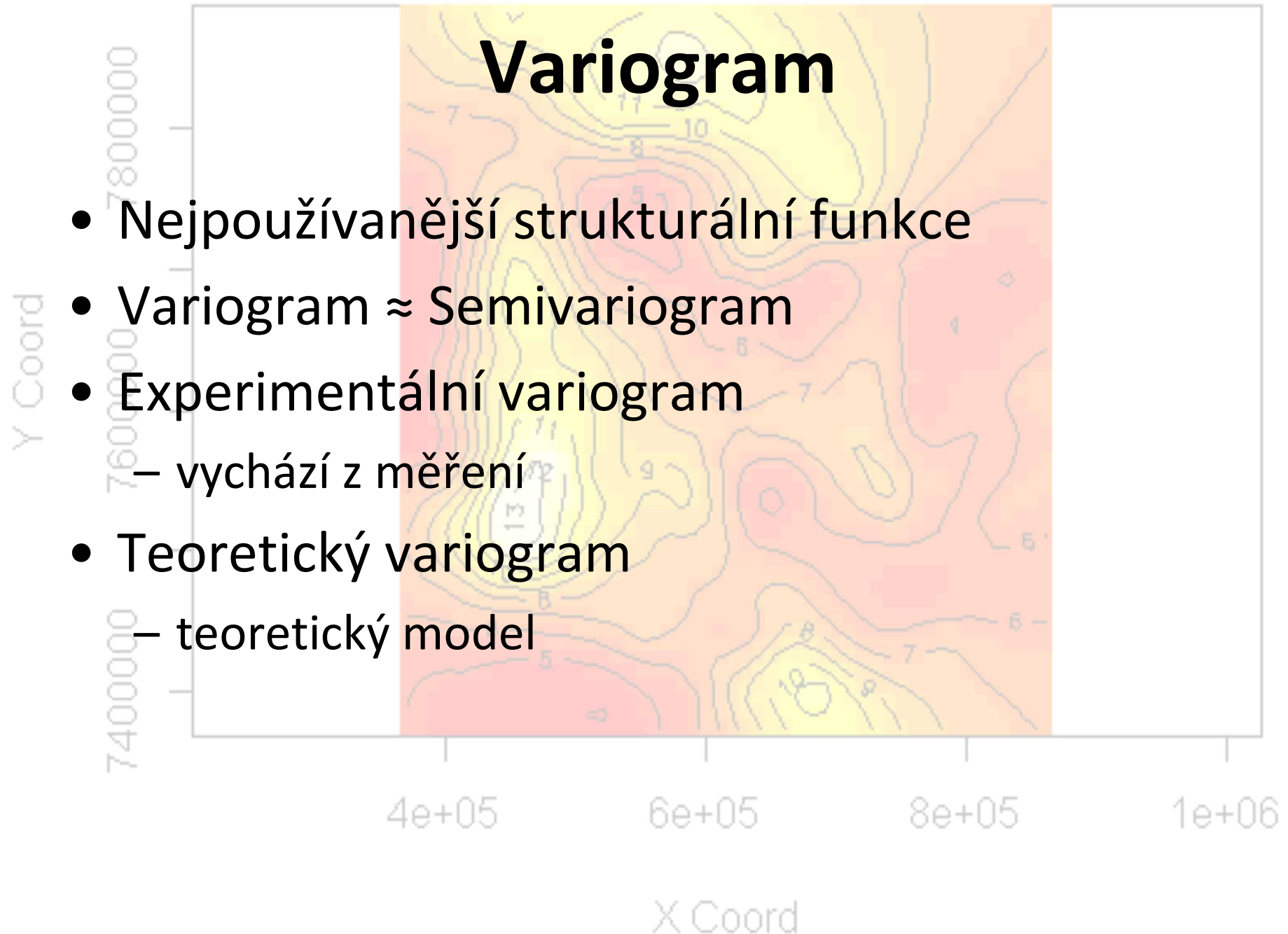
- **Korelogram** – normovaná kovariační funkce

$$K_N(H) = K(h) / K(0)$$

- kde $K(0)$ je kovariance při nulové vzdálenosti, zpravidla se rovná statistickému rozplylu

Variogram

- Nejpoužívanější strukturální funkce
- Variogram \approx Semivariogram
- Experimentální variogram
 - vychází z měření
- Teoretický variogram
 - teoretický model

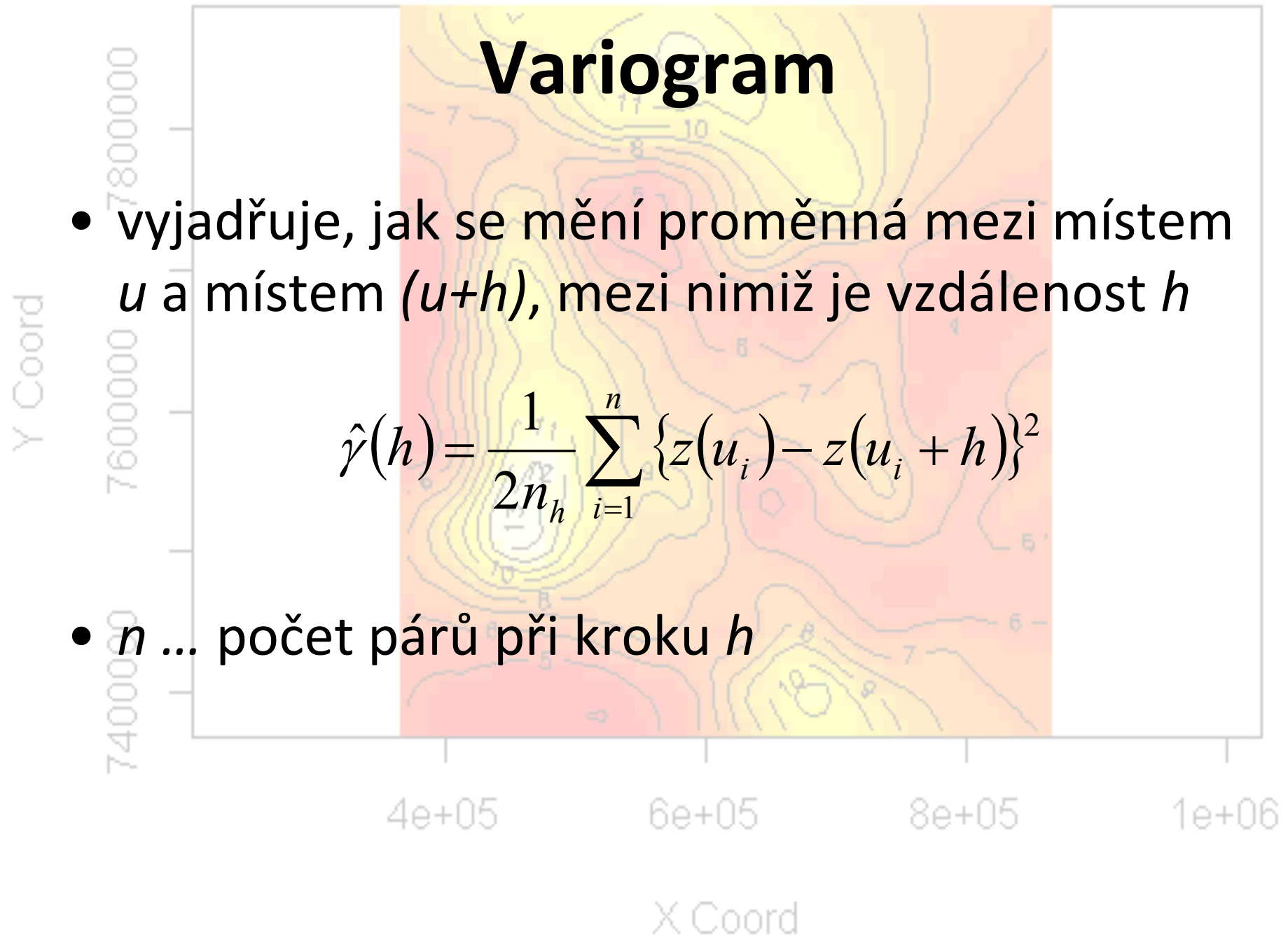


Variogram

- vyjadřuje, jak se mění proměnná mezi místem u a místem $(u+h)$, mezi nimiž je vzdálenost h

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2n_h} \sum_{i=1}^n \{z(u_i) - z(u_i + h)\}^2$$

- n ... počet párů při kroku h



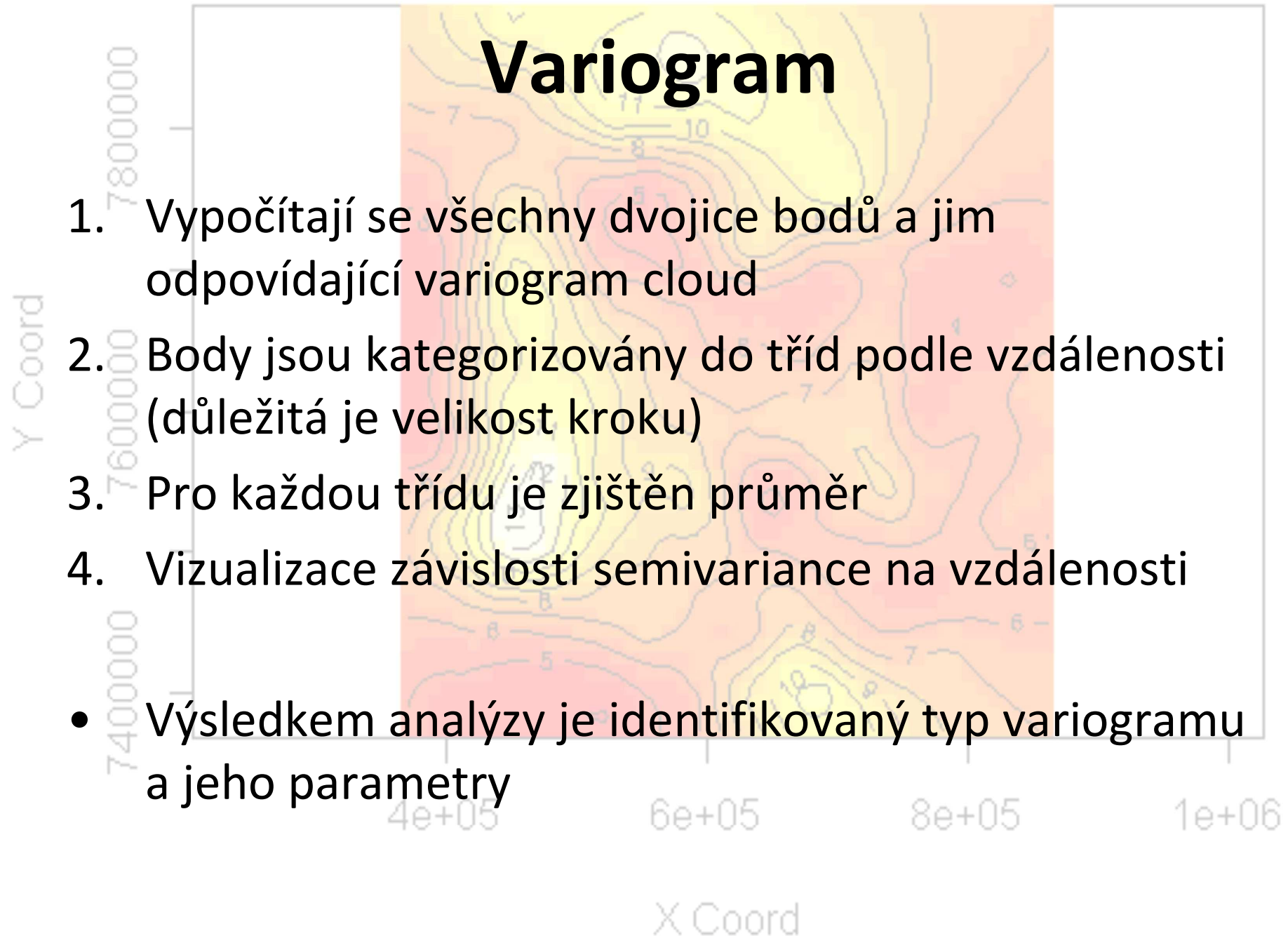
Variogram

- Hawkins – Cressieův robustní odhad

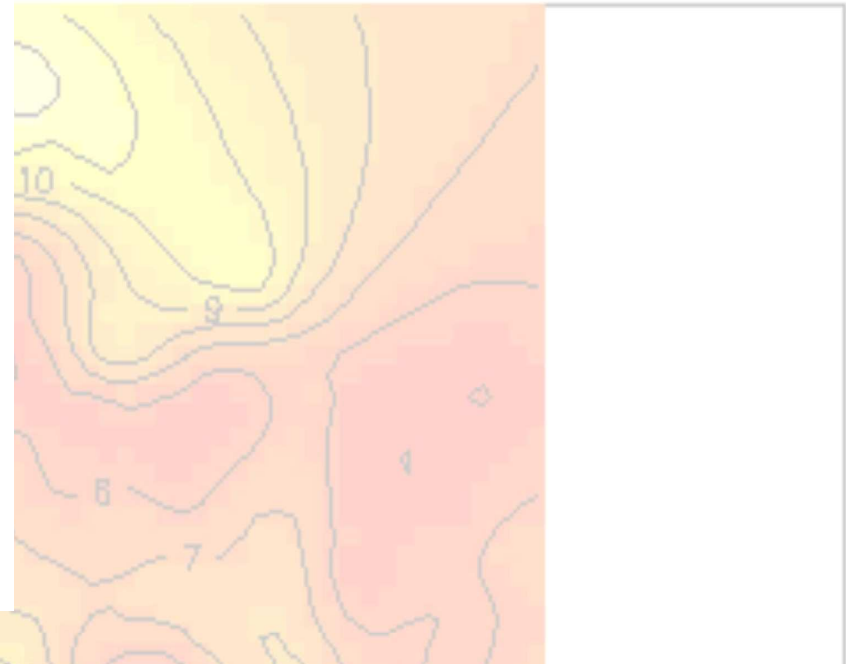
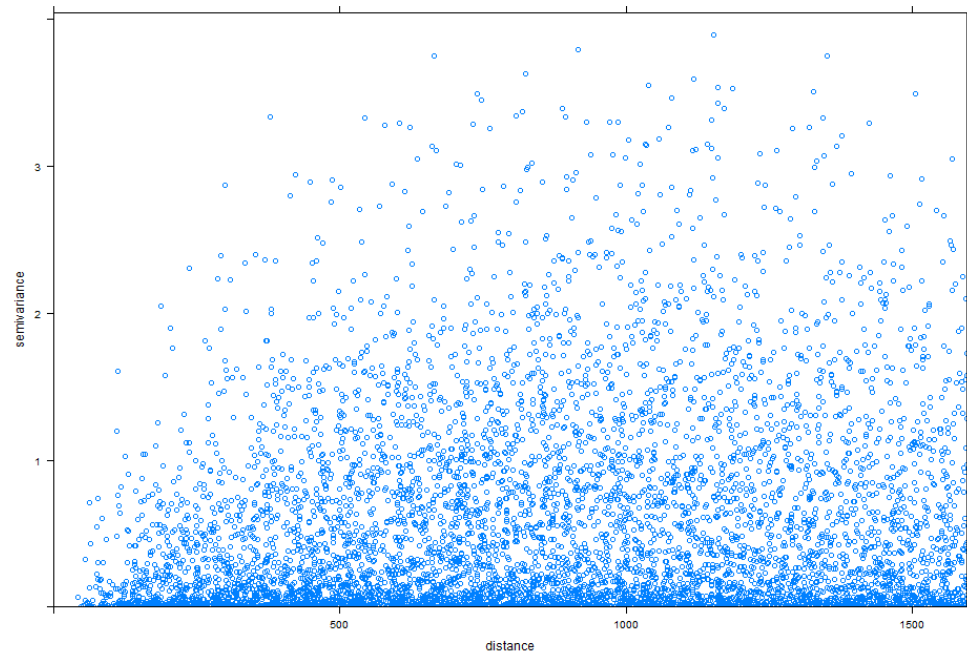
$$\gamma(h) = \frac{\frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^n \left\{ [z(u_i) - z(u_i + h)]^2 \right\}^{1/4}}{0,914 + \frac{0,998}{n}}$$

Variogram

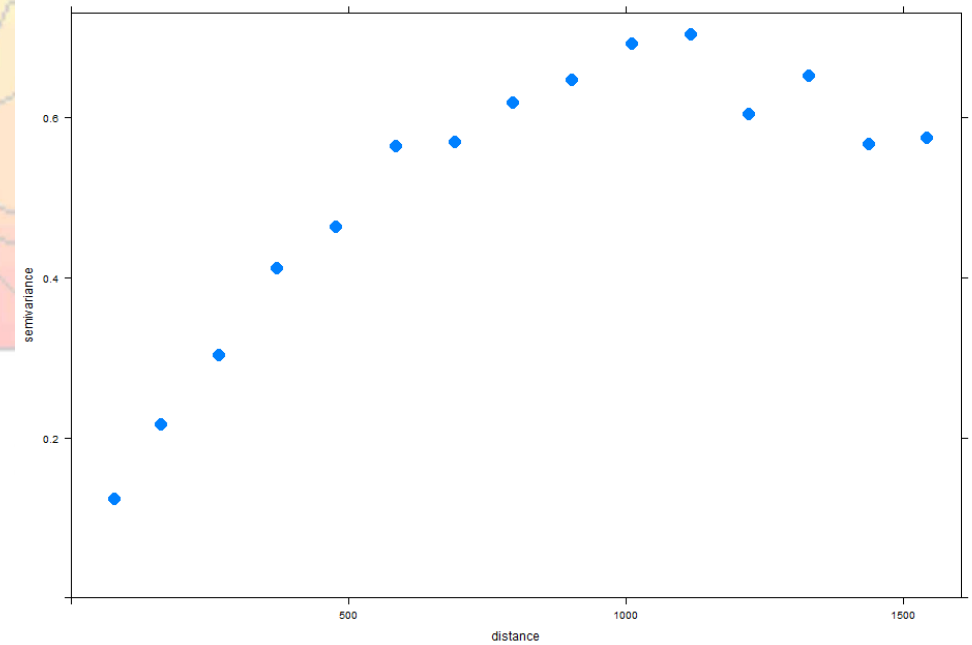
1. Vypočítají se všechny dvojice bodů a jim odpovídající variogram cloud
 2. Body jsou kategorizovány do tříd podle vzdálenosti (důležitá je velikost kroku)
 3. Pro každou třídu je zjištěn průměr
 4. Vizualizace závislosti semivariance na vzdálenosti
- Výsledkem analýzy je identifikovaný typ variogramu a jeho parametry



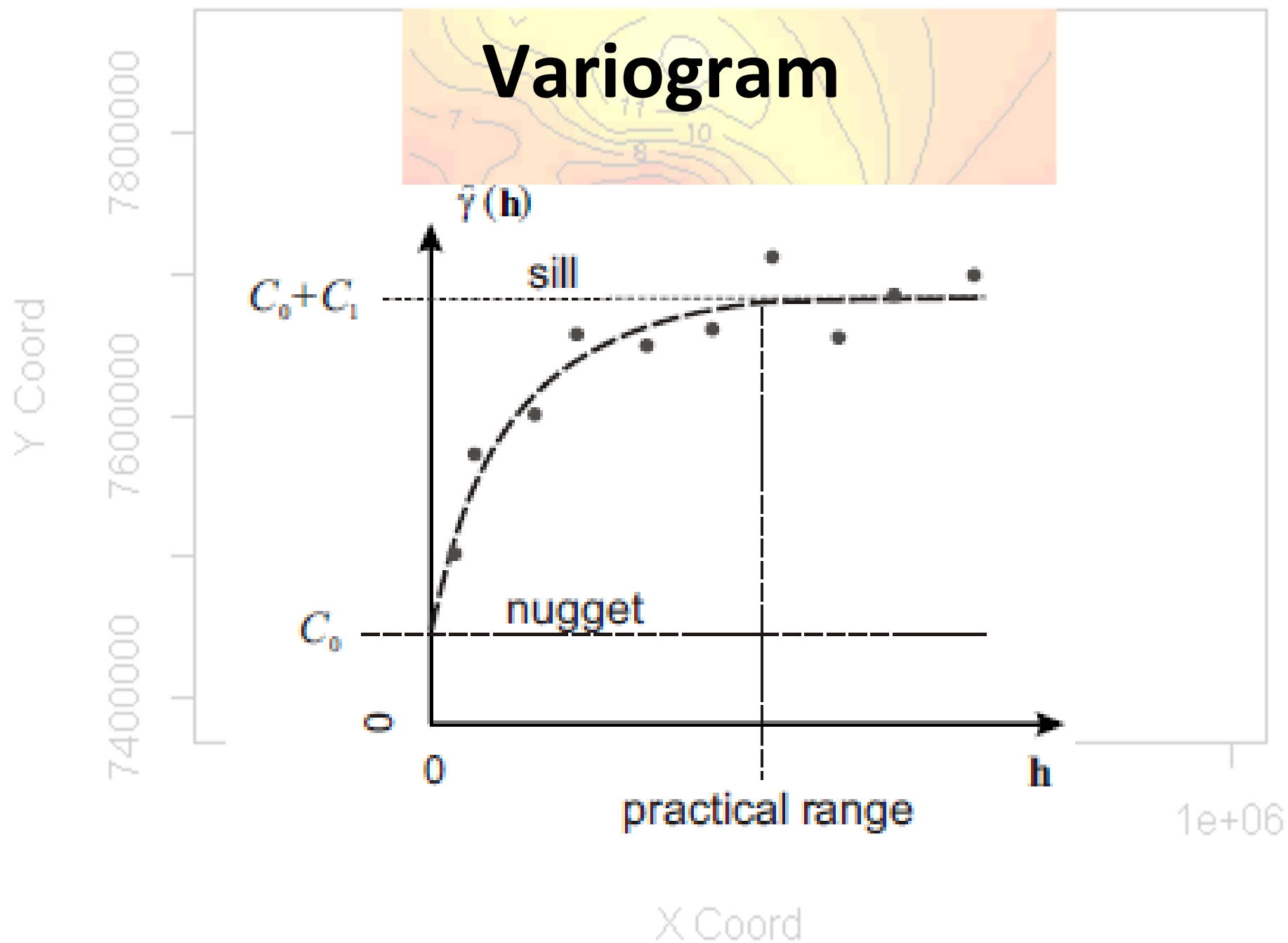
VARIOCLOUD



EXPERIMENTÁLNÍ VARIOGRAM



Variogram



Variogram

- Osa X
 - Kategorie vzdálenosti mezi body
- Osa Y
 - Semivariance – variabilita 2. řádu, jak se mění v krocích hodnoty x
- Nugget – zbytkový rozptyl
 - Rozptyl v oblasti menší velikosti než je základní krok nebo nepřesnost zjištěných hodnot
- Sill (práh)
 - Hodnota semivariance (osa y), kde semivariogram mění svůj průběh
- Range (Dosah)
 - Vzdálenost, pro kterou jsou body vzájemně ovlivňovány
 - Vzdálenost, kde variogram dosáhne prahu



Madogram a rodogram

- Robustní modifikace variogramu
- **Madogram** – absolutní hodnota rozdílu

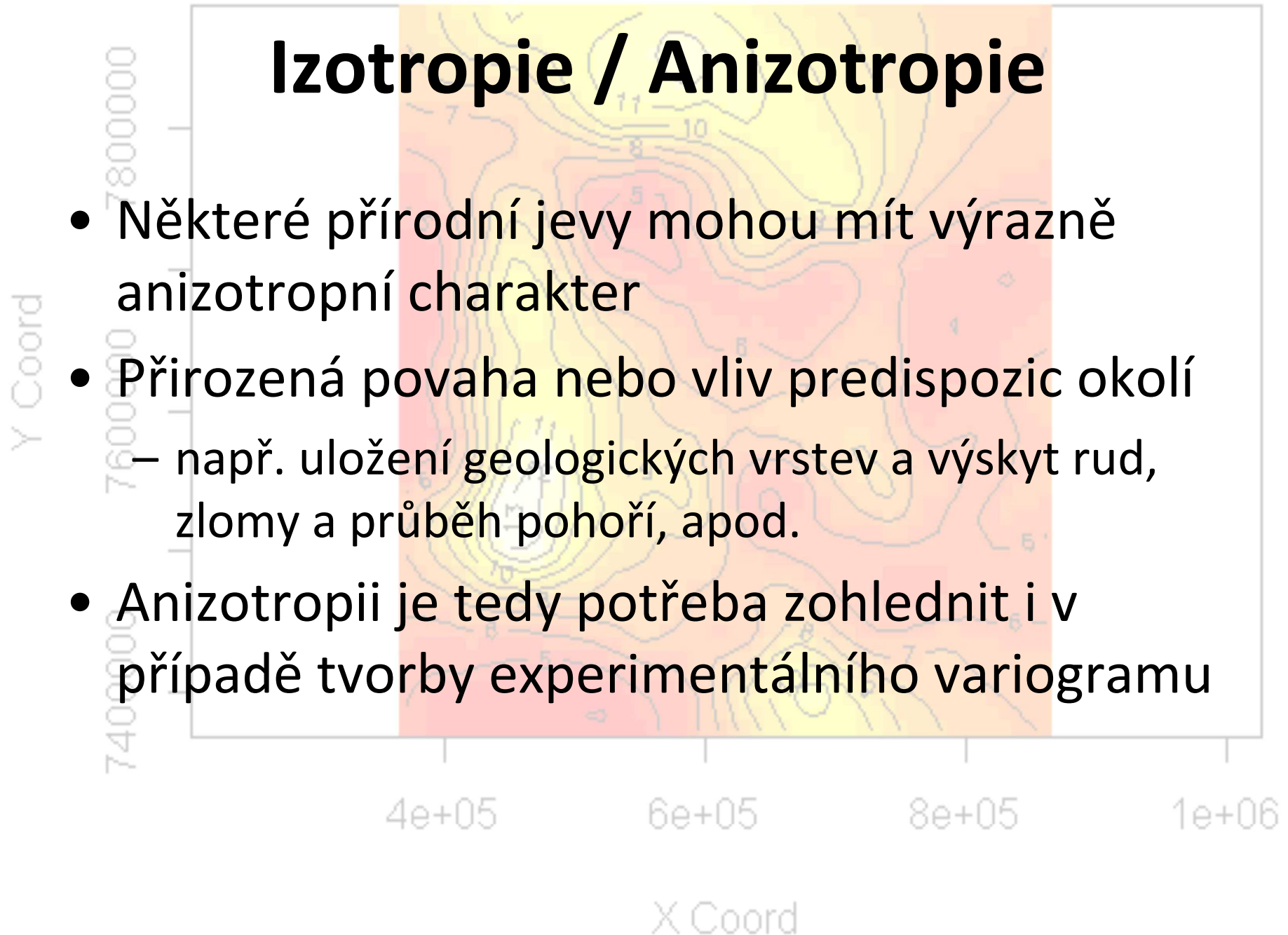
$$M(h) = \frac{1}{2n_h} \sum_{i=1}^n |z(u_i) - z(u_i + h)|$$

- **Rodogram** – odmocnina rozdílu hodnot

$$R(h) = \frac{1}{2n_h} \sum_{i=1}^n |z(u_i) - z(u_i + h)|^{1/2}$$

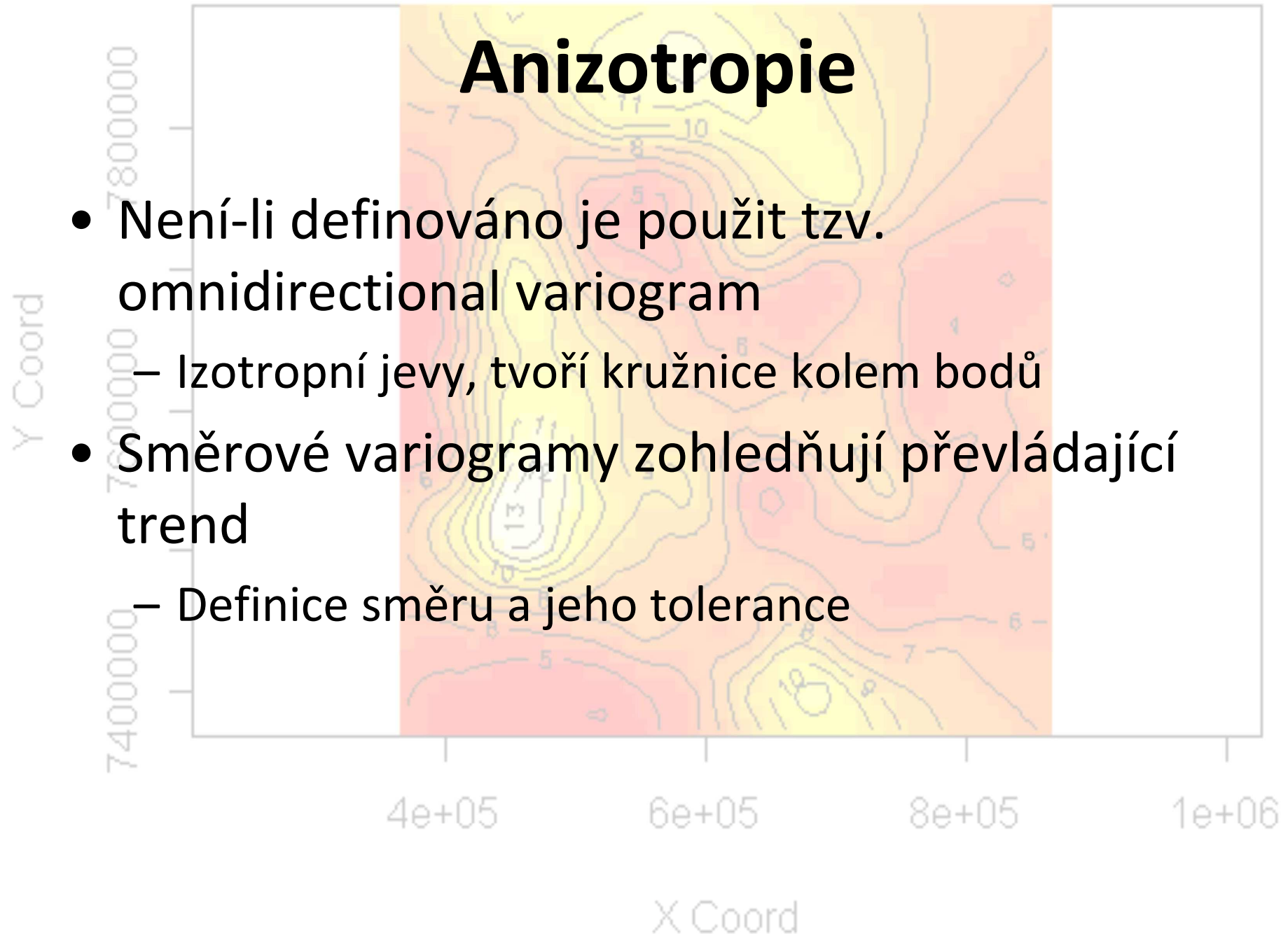
Izotropie / Anizotropie

- Některé přírodní jevy mohou mít výrazně anizotropní charakter
- Přirozená povaha nebo vliv predispozic okolí
 - např. uložení geologických vrstev a výskyt rud, zlomy a průběh pohoří, apod.
- Anizotropii je tedy potřeba zohlednit i v případě tvorby experimentálního variogramu



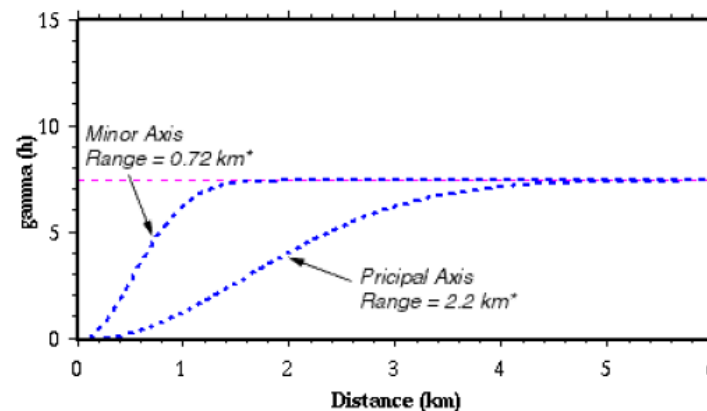
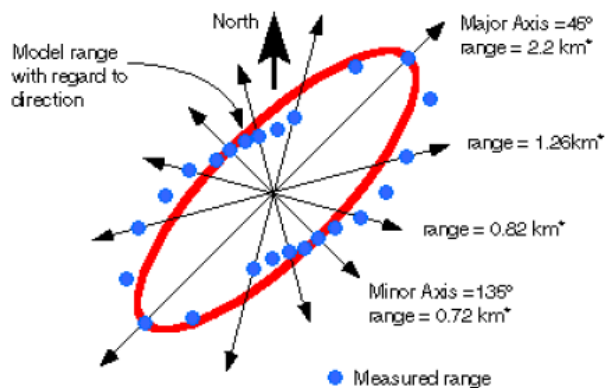
Anizotropie

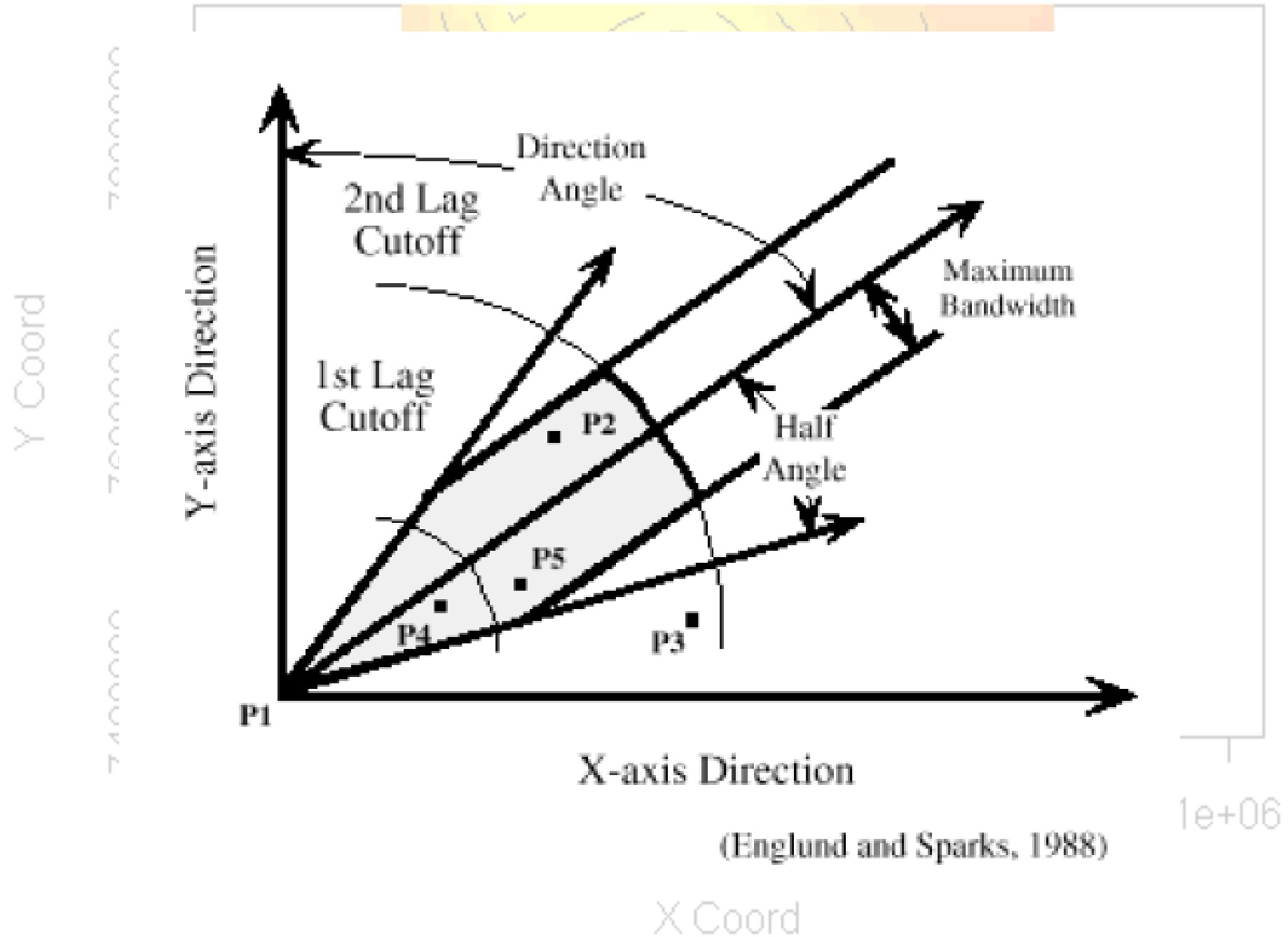
- Není-li definováno je použit tzv. omnidirectional variogram
 - Izotropní jevy, tvoří kružnice kolem bodů
- Směrové variogramy zohledňují převládající trend
 - Definice směru a jeho tolerance



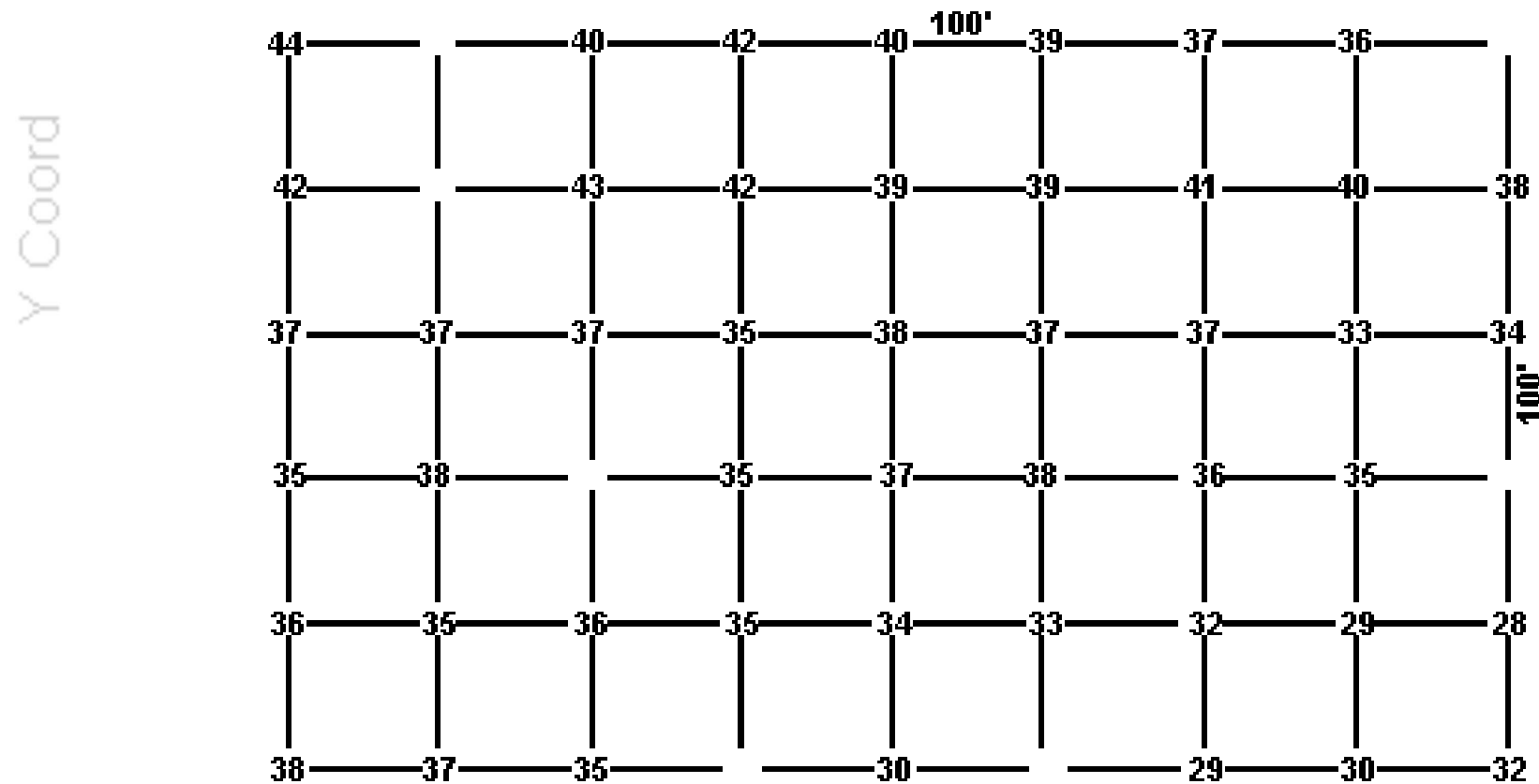
Anizotropie

- Tvorba omnidirectional variogramu
- Variogramy pro 4 (8) hlavní směry
- Pokud se při použití shodného teoretického modelu variogramu výrazně liší, pak je potřeba zjistit směr anizotropie





Experimentální semivariogram



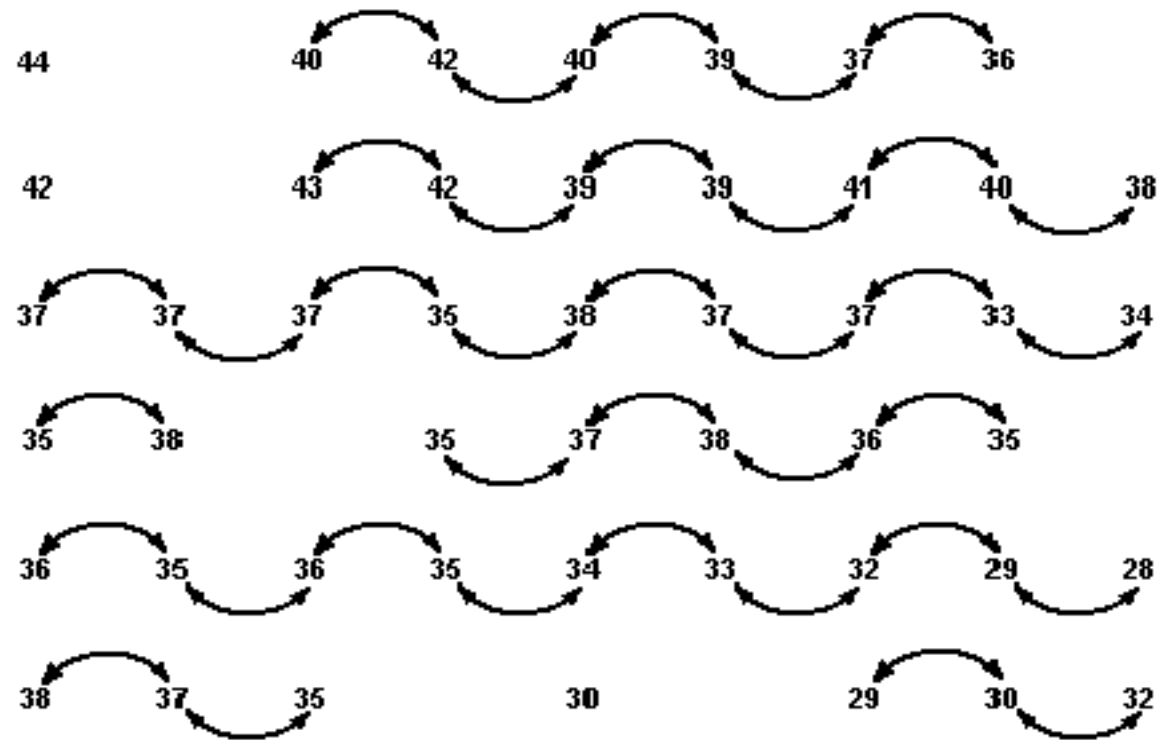
Clark, I. (2001). Practical Geostatistics

Experimentální semivariogram

- Páry pro velikost kroku (lag) = 100 m
- Směr Východ - Západ

Y Coord

7800000
7600000
7400000



1e+06

Clark, I. (2001). Practical Geostatistics

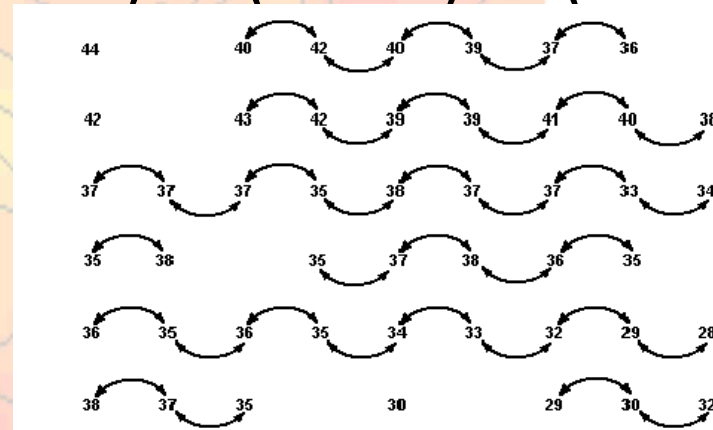
X Coord

Experimentální semivariogram

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2n_h} \sum_{i=1}^n \{z(u_i) - z(u_i + h)\}^2$$

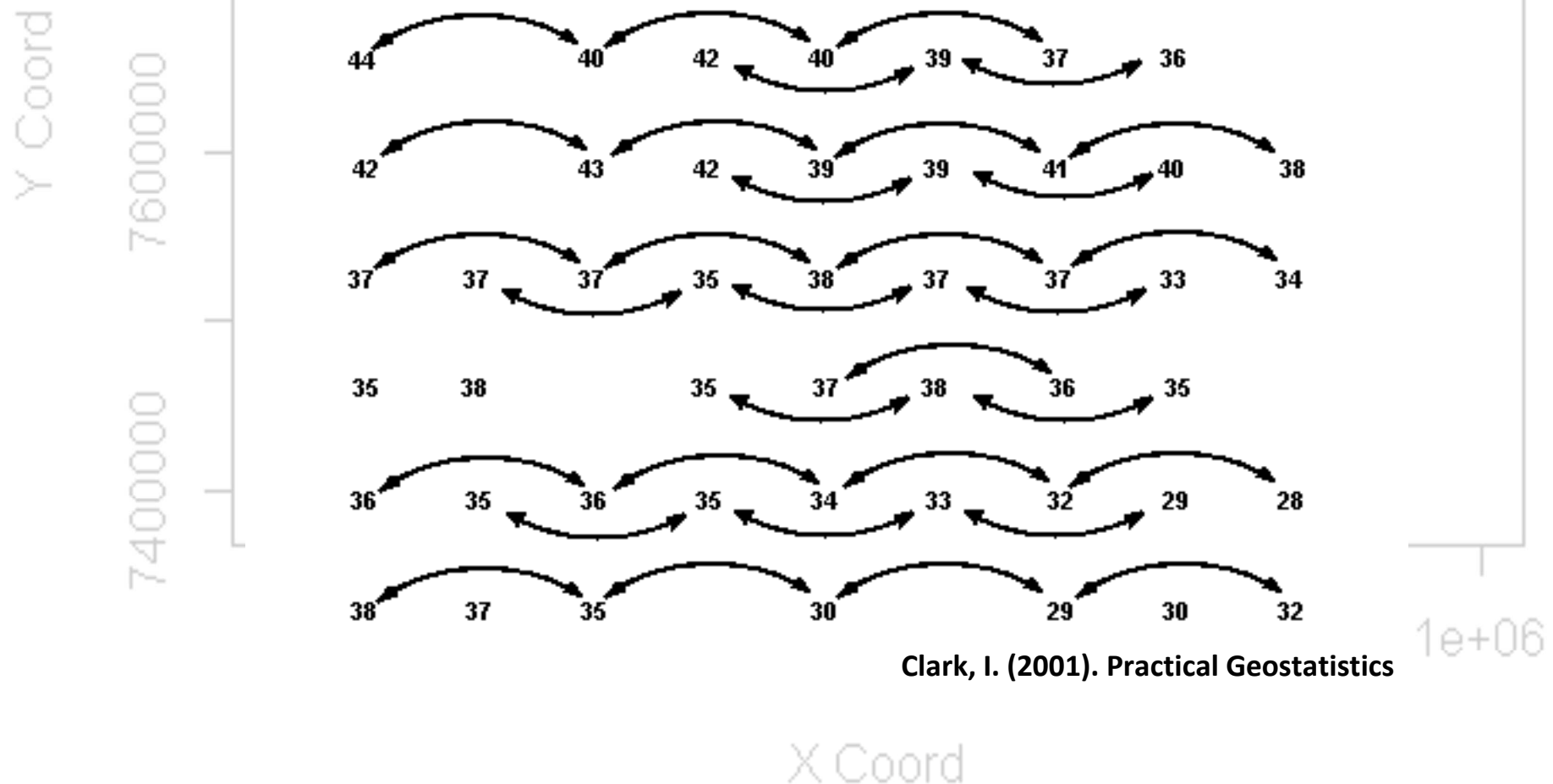
$\gamma(100) =$

1. $[(40-42)^2 + (42-40)^2 + (40-39)^2 + (39-37)^2 + (37-36)^2$
2. $+ (43-42)^2 + \dots$
3. $+ (37-37)^2 + \dots$
4. $+ (35-38)^2 + \dots$
5. $+ (36-35)^2 + \dots$
6. $+ (38-37)^2 + \dots + (30-32)^2] / 2 \cdot 36 = 1,46$



Experimentální semivariogram

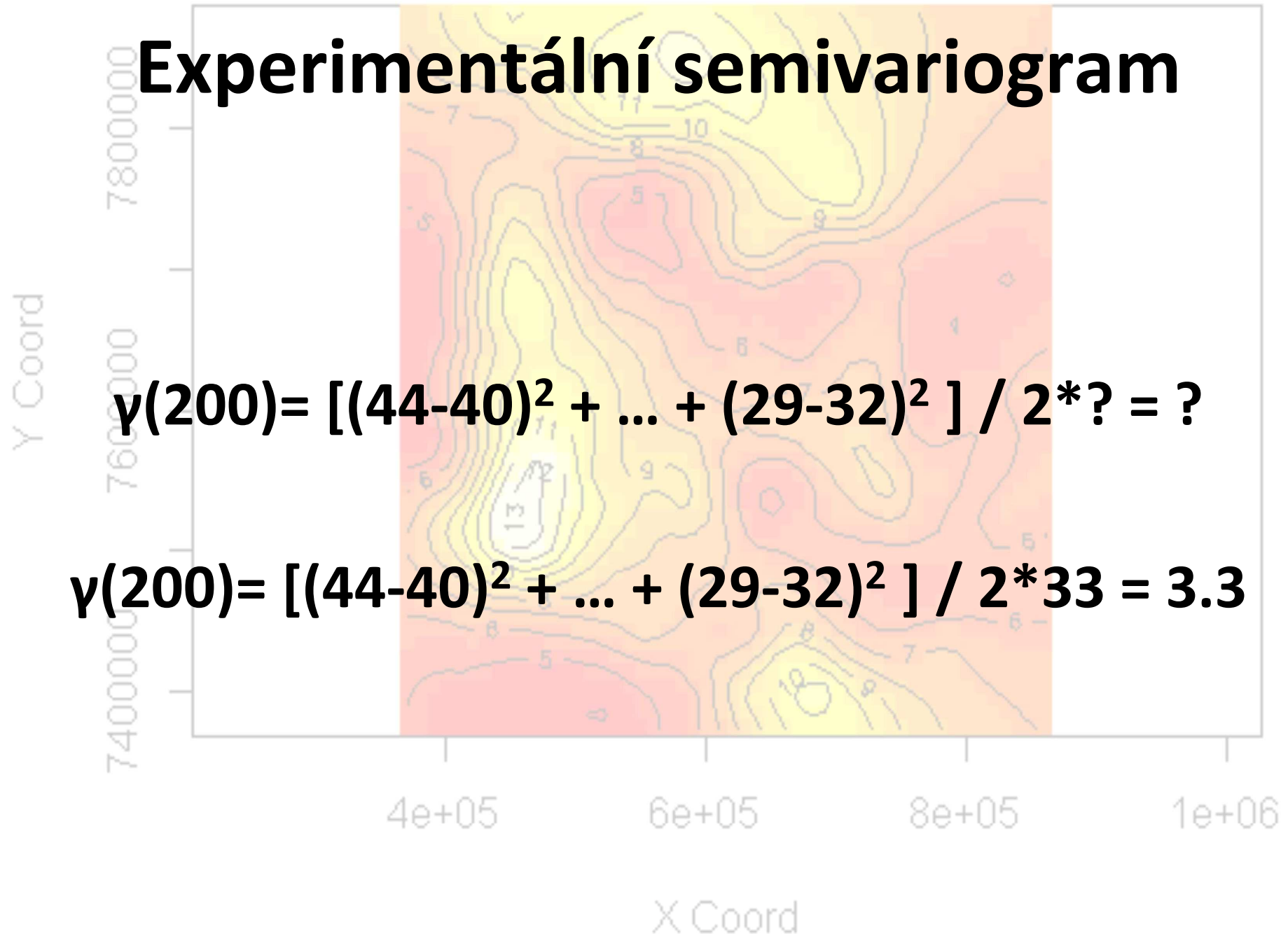
- Páry pro velikost kroku (lag) = 200 m



Experimentální semivariogram

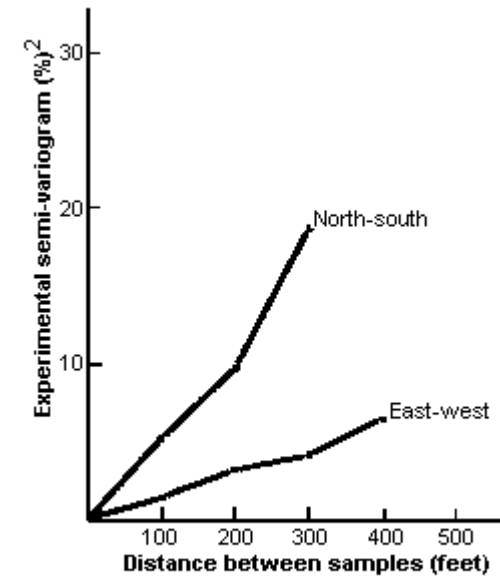
$$\gamma(200) = [(44-40)^2 + \dots + (29-32)^2] / 2 * ? = ?$$

$$\gamma(200) = [(44-40)^2 + \dots + (29-32)^2] / 2 * 33 = 3.3$$



Experimentální semivariogram

Direction	Distance between samples (ft)	Experimental semi-variogram	Number of pairs
East-west	100	1.46	36
	200	3.30	33
	300	4.31	27
	400	6.70	23
North-south	100	5.35	36
	200	9.87	27
	300	18.88	21

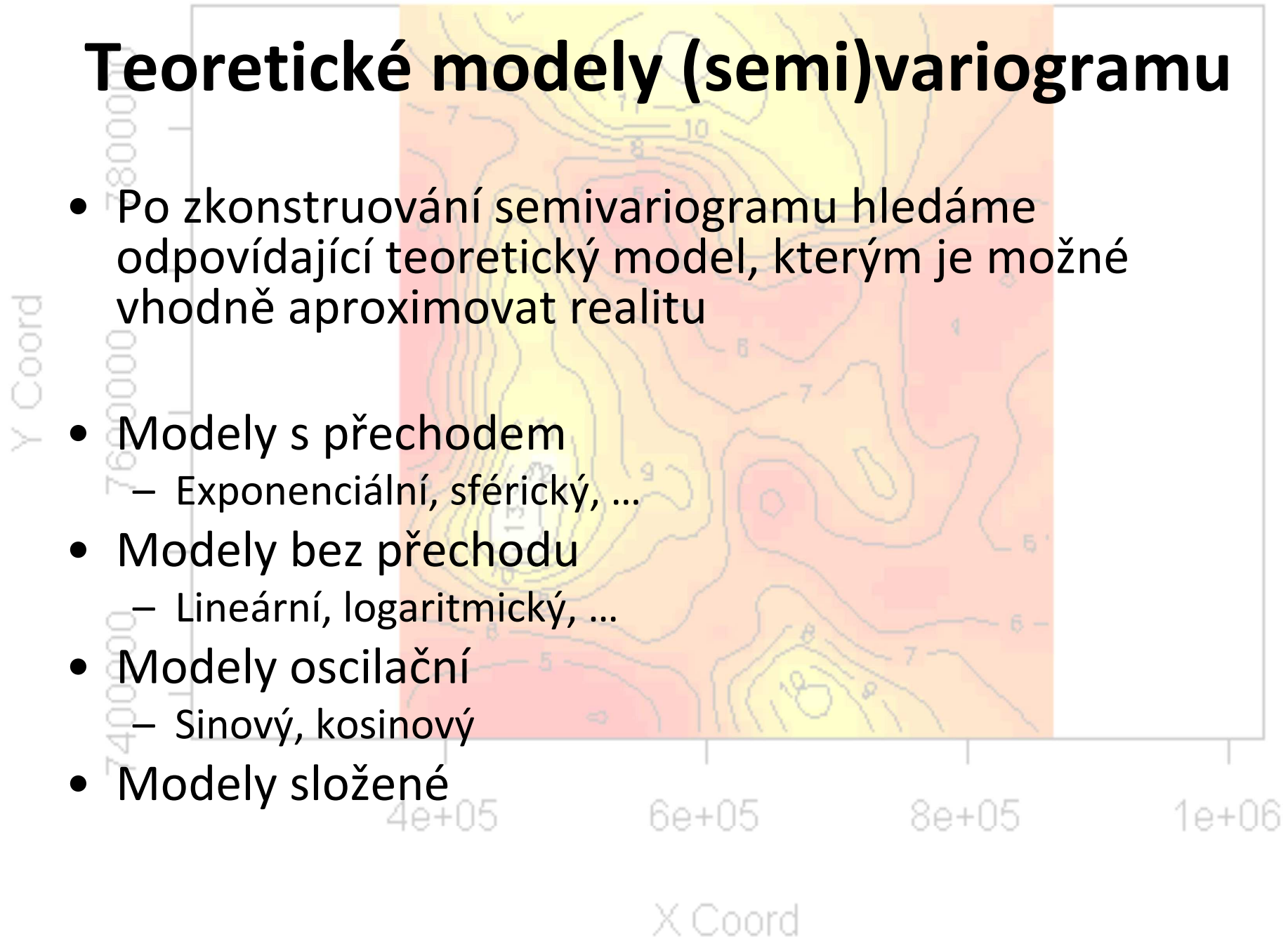


Clark, I. (2001). Practical Geostatistics

- Čím více párů, tím spolehlivější je odhad semivariance pro danou velikost kroku

Teoretické modely (semi)variogramu

- Po zkonstruování semivariogramu hledáme odpovídající teoretický model, kterým je možné vhodně aproximovat realitu
- Modely s přechodem
 - Exponenciální, sférický, ...
- Modely bez přechodu
 - Lineární, logaritmický, ...
- Modely oscilační
 - Sinový, kosinový
- Modely složené



Teoretické modely variogramu

- **Modely s přechodem**

- malé vzdálenosti -> vysoká shoda mezi zjištěnými hodnotami (nízká variabilita), snižuje se se vzdáleností
- za dosahem se úroveň neshody stabilizuje kolem hodnoty statistického rozptylu, není prostorová vazba a variabilita je plně určována statistickým rozptylem

- **Modely bez přechodu**

- extrémní případ přechodového modelu

- **Modely oscilační**

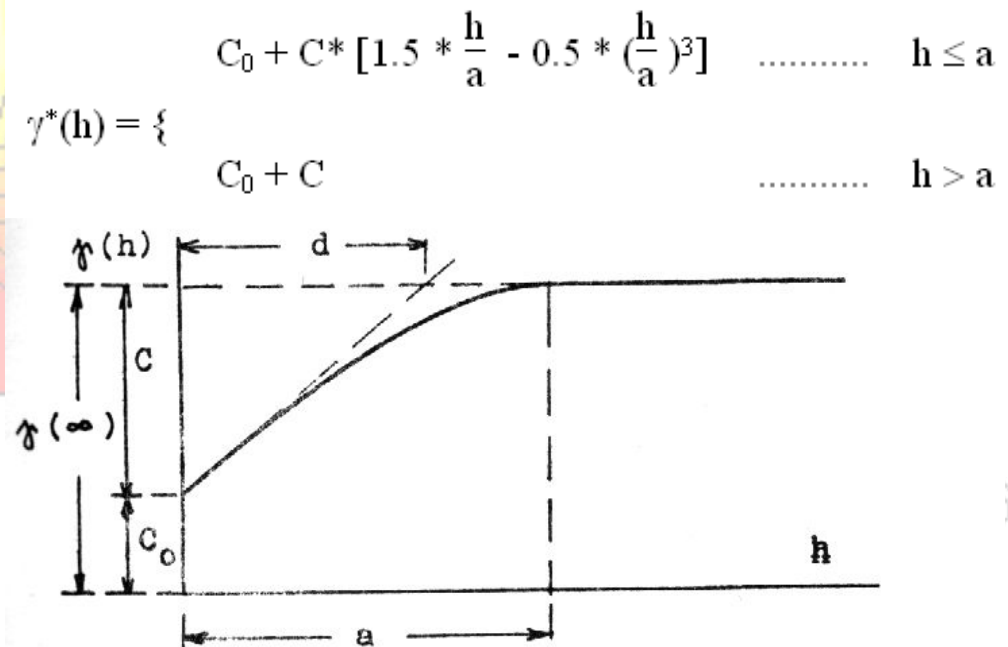
- důsledek pravidelného střídání pásů s vyššími a nižšími hodnotami
- nehomogenním charakterem zkoumaného pole, nestabilita modelů (nepoužívají se pro kriging)

- **Modely složené**

- Složené z výše zmíněných modelů – každý zdroj variability má svůj model

Sférický model

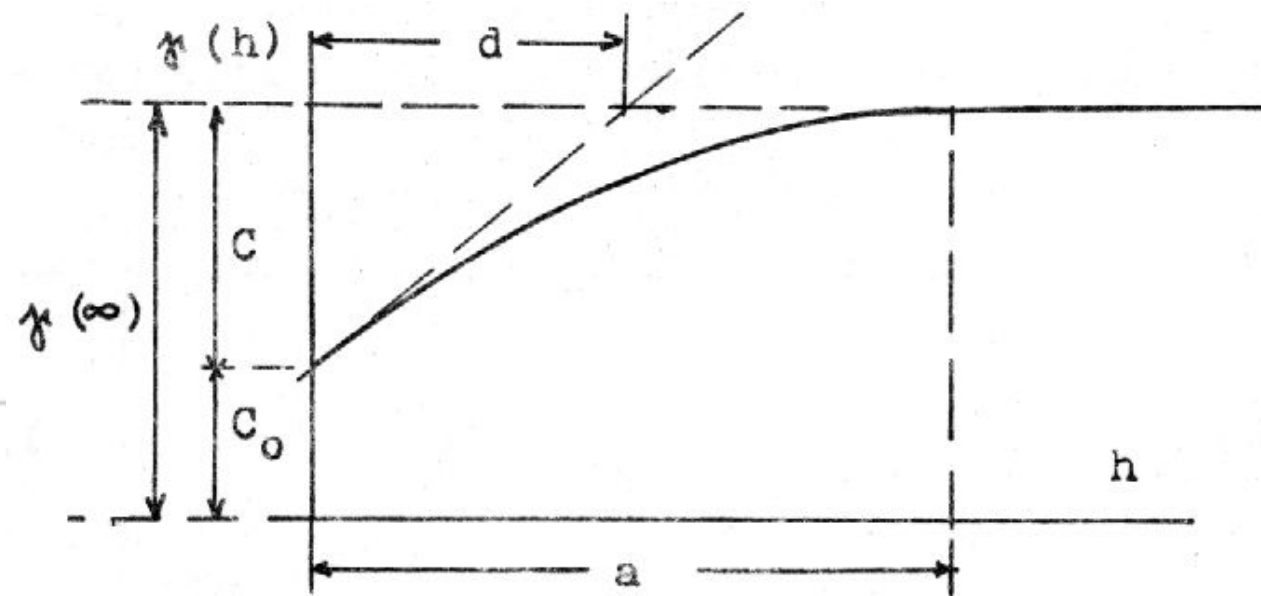
- Typicky se projevuje v případech, kdy v poli dominuje 1 zdroj variability
- Často používaný model
- $a = 1.5d$



Kvadratický model

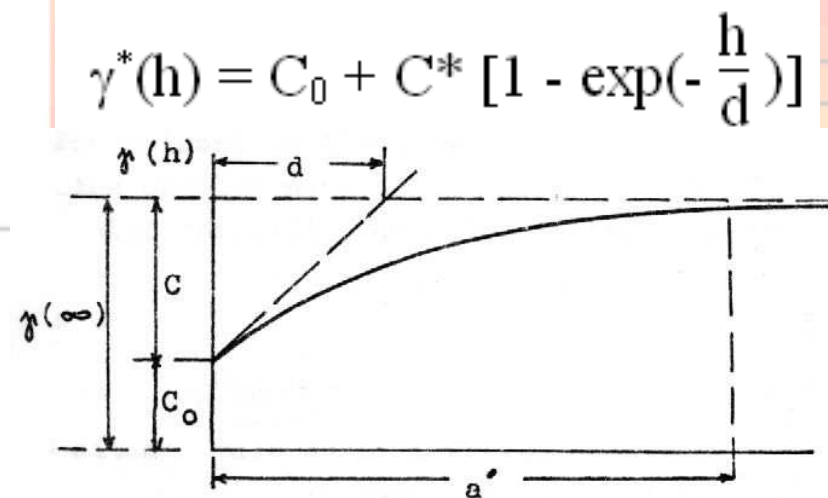
- $a = 2d$

$$\gamma^*(h) = \begin{cases} C_0 + C^* \left[2 * \frac{h}{a} - \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] & \text{..... } h \leq a \\ C_0 + C & \text{..... } h > a \end{cases}$$



Exponenciální model

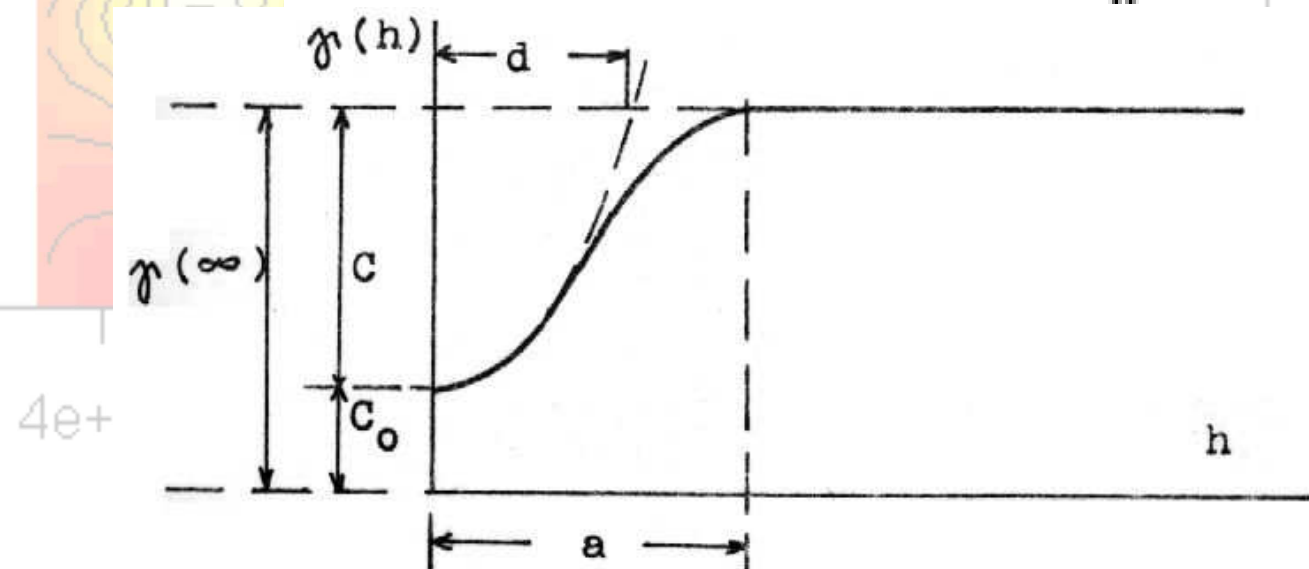
- Nemá práh ani dosah
- Dosah se určuje podle místa, kde dosáhne křivka 95% maximální hodnoty
- Model se objevuje např. u polí, kde působí více významných zdrojů variability
- $a = 3d$



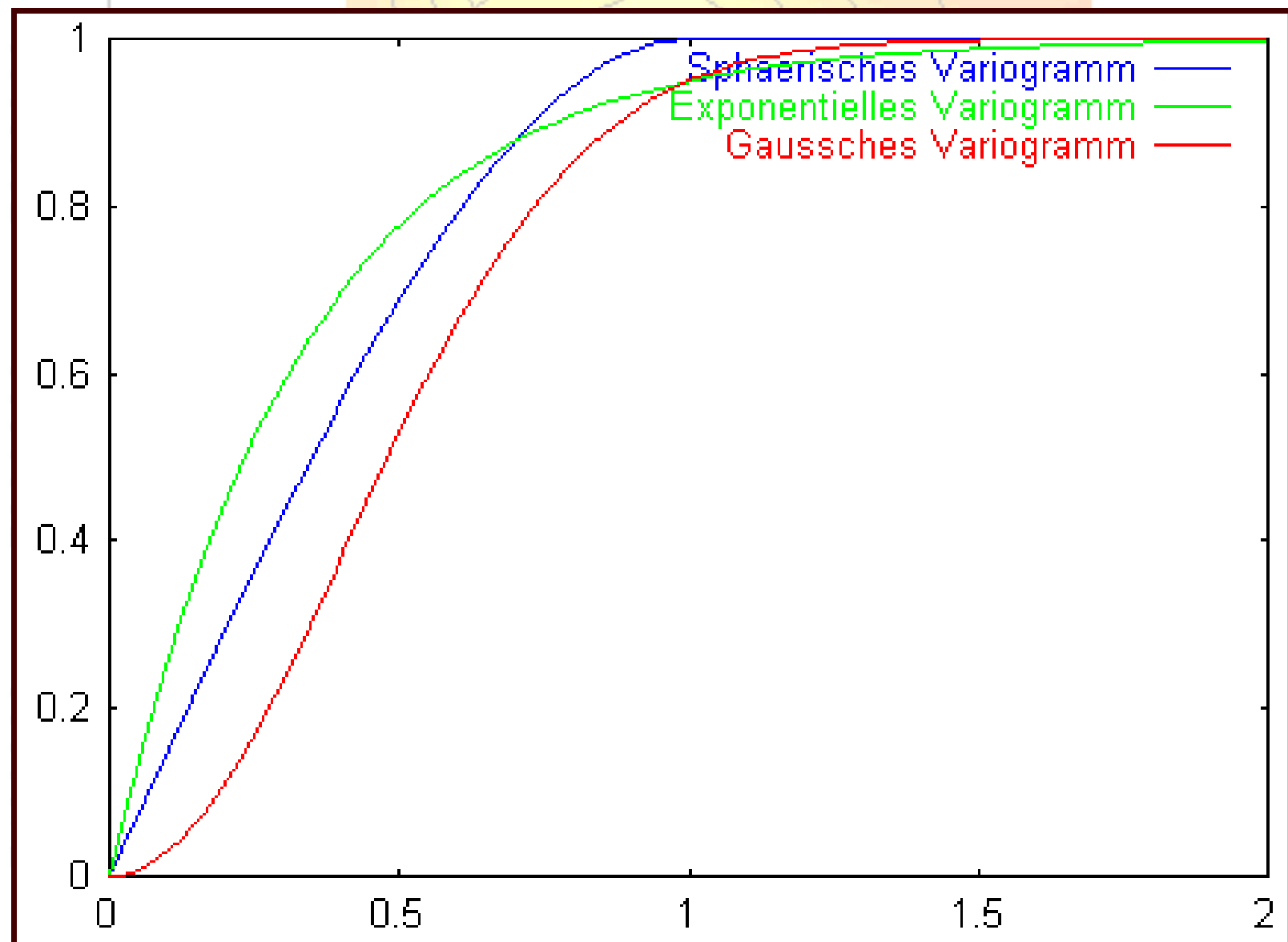
Gaussovský model

- existence plynulých změn hodnot
- např. při modelování výškových dat.
- často nestabilní
- $a = d \cdot \sqrt{3}$

$$\gamma^*(h) = C_0 + C^* \left[1 - \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \right]$$

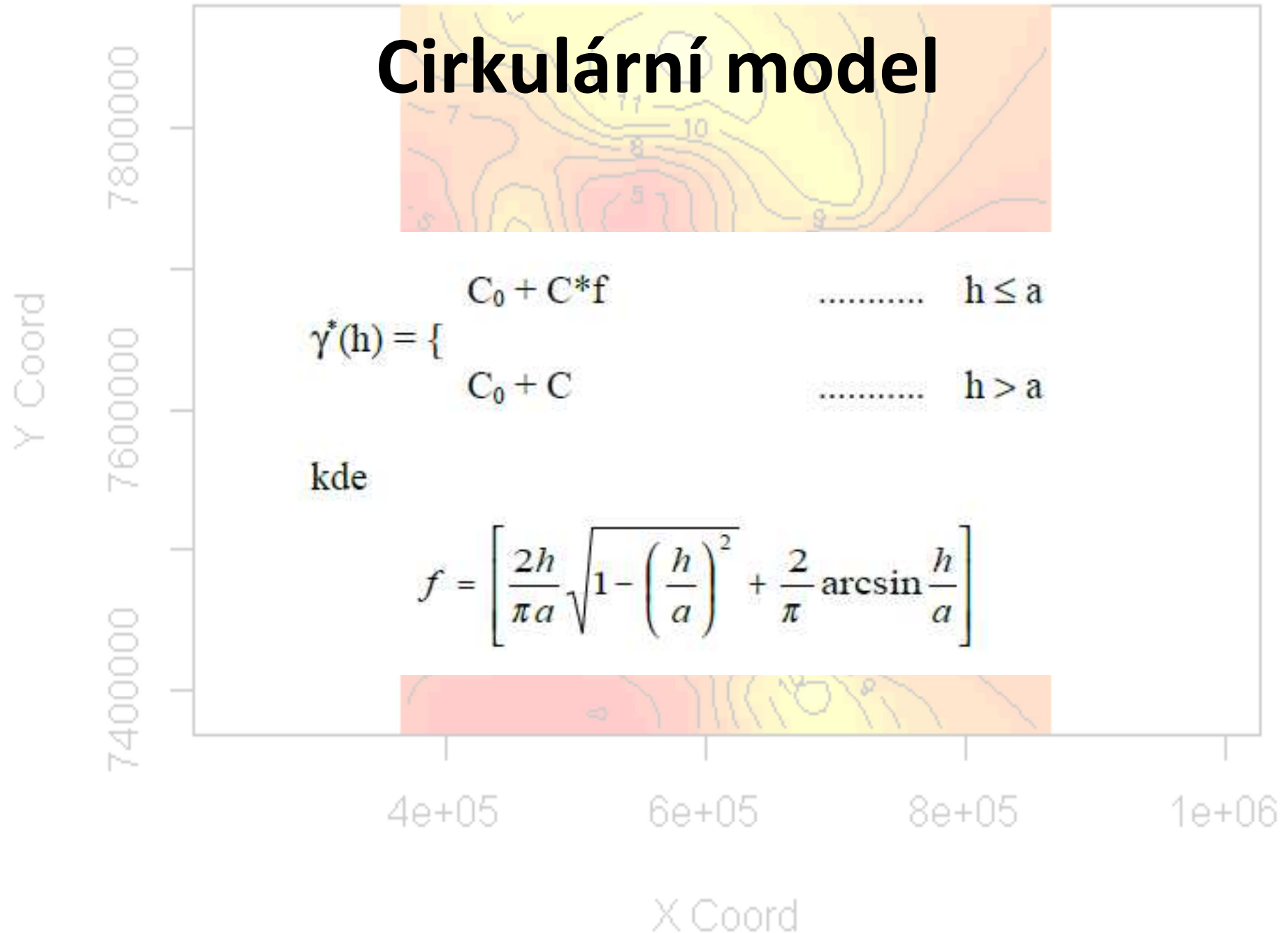


Y Coord



X Coord

Cirkulární model



Lineární model

- Lineární X Lineární s prahem
- Lineární model s prahem je poměrně často využíván programy pro krigování na základě automaticky vypočítaného a vyhodnoceného semivariogramu
- Při provádění strukturální analýzy se využívá raději jiných přechodových modelů
- p – směrnice přímky

$$\gamma^*(h) = \begin{cases} C_0 + p \cdot h & \dots\dots\dots h \leq a \\ C_0 + C & \dots\dots\dots h > a \end{cases}$$

Logaritmický model

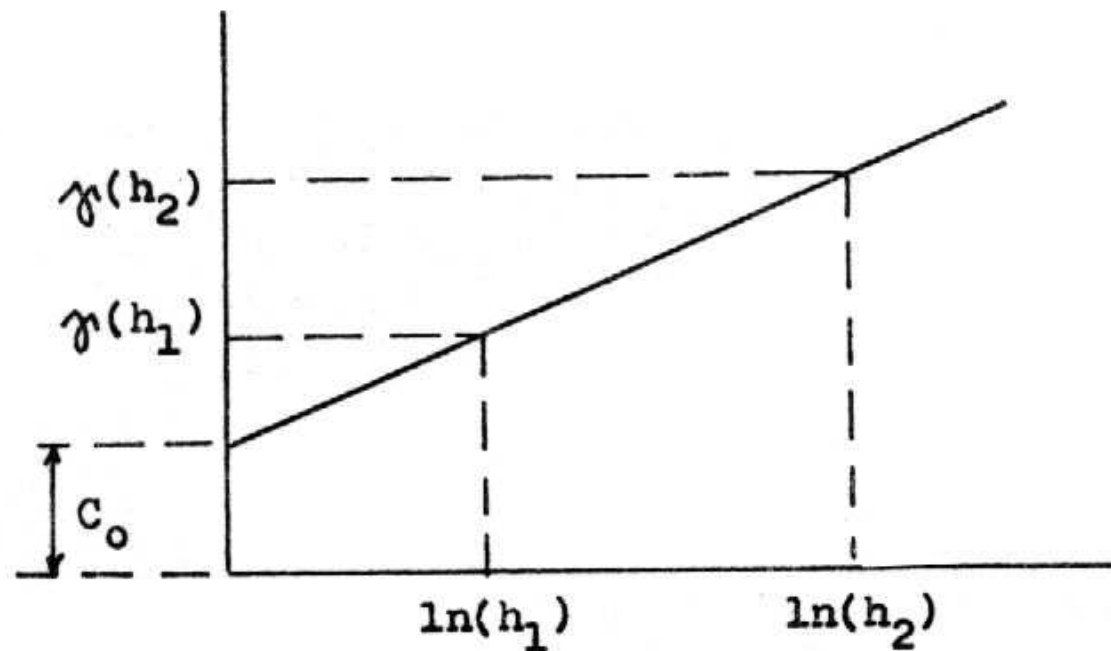
$$\gamma^*(h) = C_0 + p \cdot \ln(h)$$

Y Coord

7800000

7600000

7400000

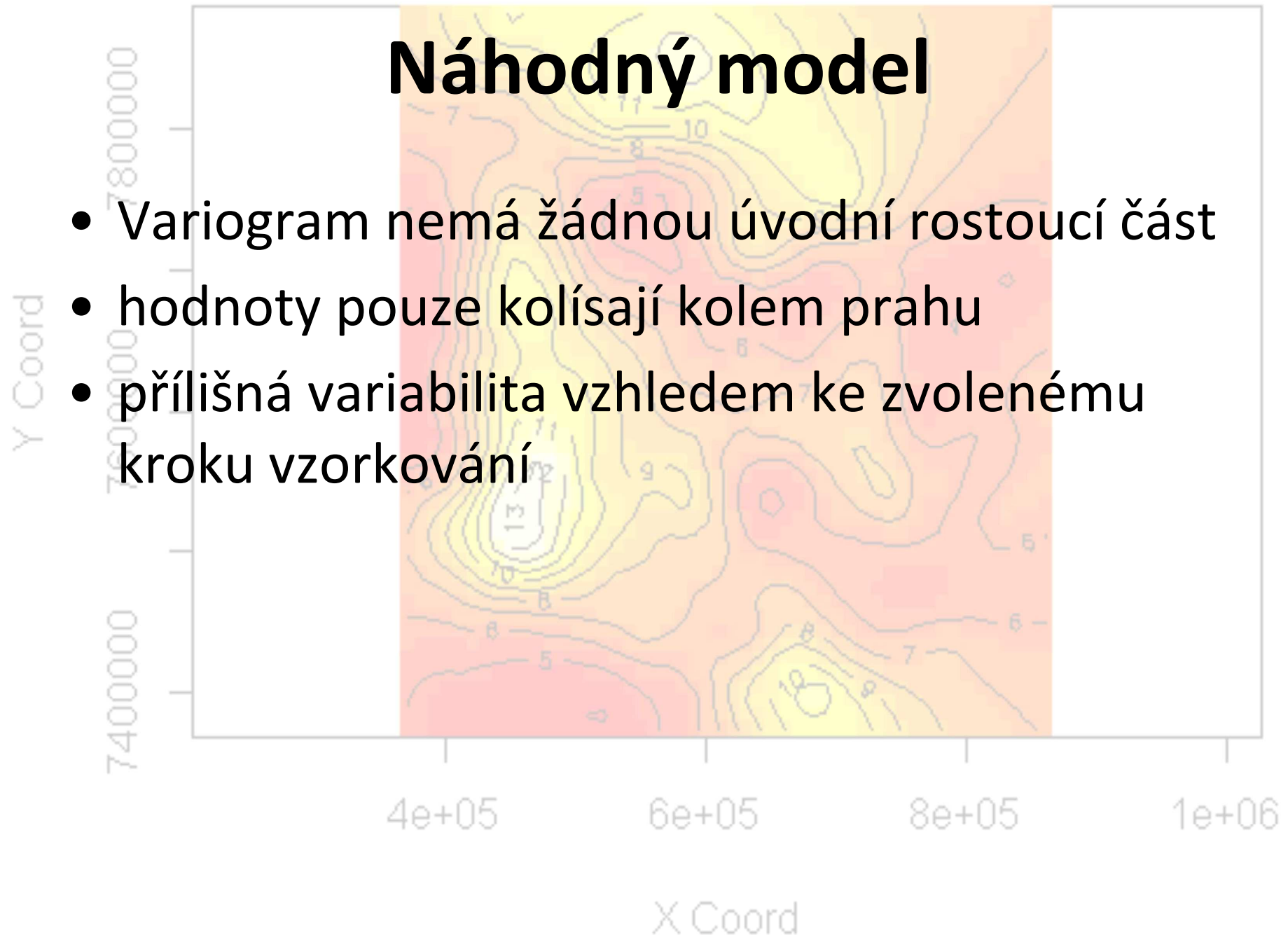


1e+06

X Coord

Náhodný model

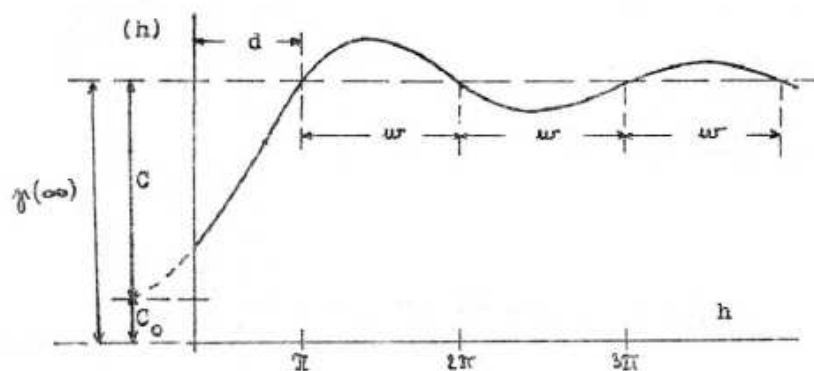
- Variogram nemá žádnou úvodní rostoucí část
- hodnoty pouze kolísají kolem prahu
- přílišná variabilita vzhledem ke zvolenému kroku vzorkování



Sinový a kosinový model

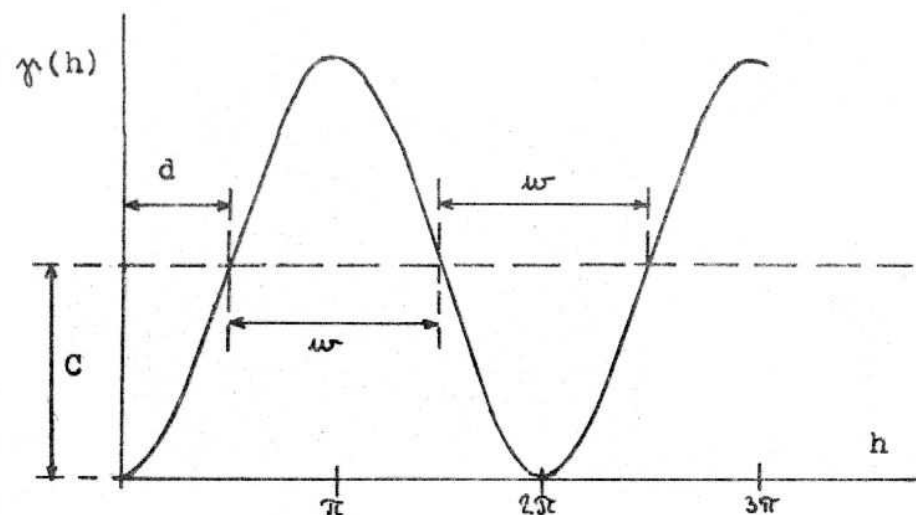
$$\gamma^*(h) = C_0 + C^* \left[1 - \frac{\sin(g^*h)}{g^*h} \right]$$

$$\text{kde } g = \frac{\pi}{\omega}$$



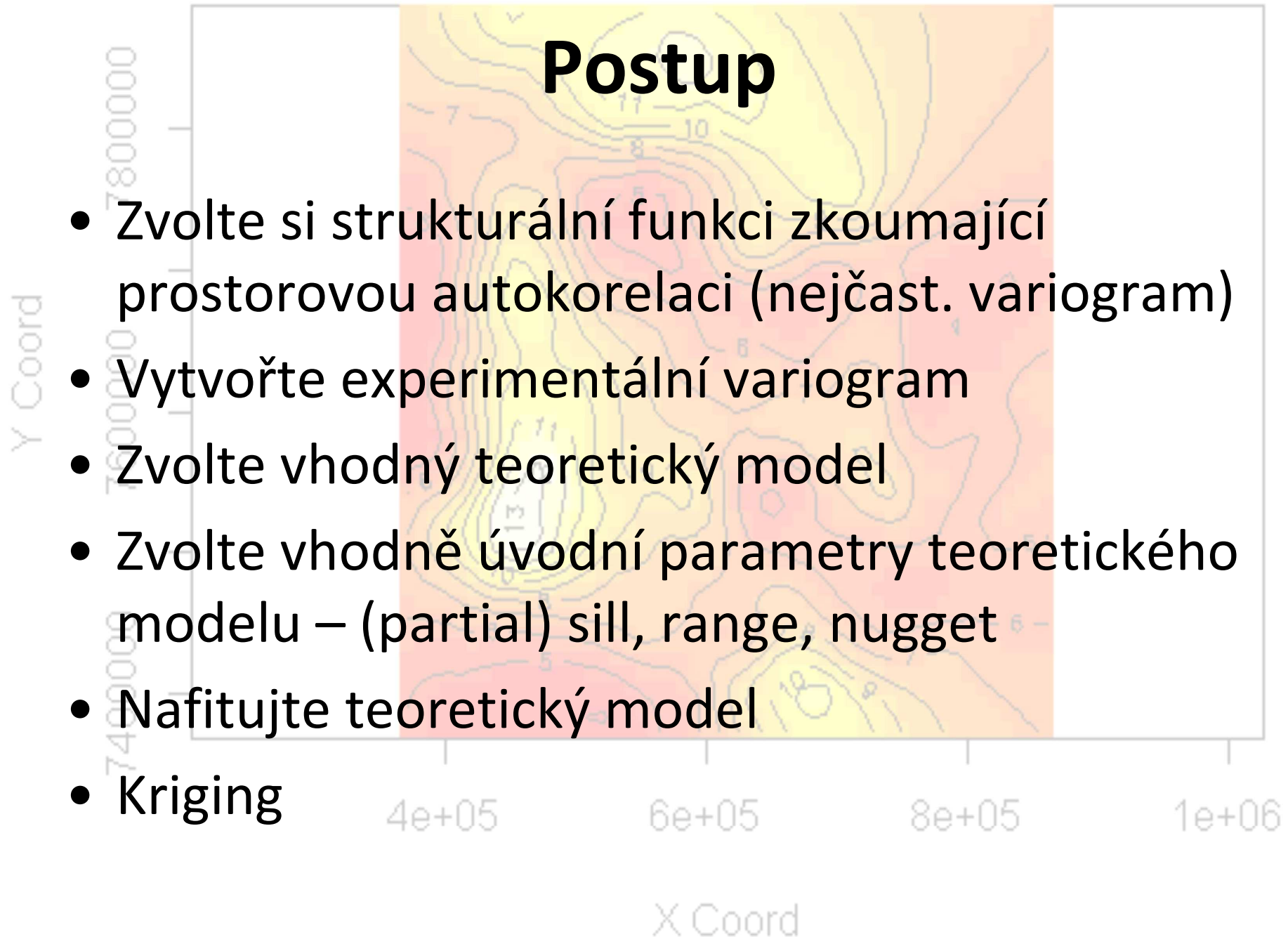
$$\gamma^*(h) = C_0 + C^* [1 - \cos(g^*h)]$$

$$\text{kde } g = \frac{\pi}{\omega}$$



Postup

- Zvolte si strukturální funkci zkoumající prostorovou autokorelaci (nejčast. variogram)
- Vytvořte experimentální variogram
- Zvolte vhodný teoretický model
- Zvolte vhodně úvodní parametry teoretického modelu – (partial) sill, range, nugget
- Nafitujte teoretický model
- Kriging



Použitá literatura

- HORÁK, Jiří. *Prostorové analýzy dat*
- BIVAND, Roger S., PEBESMA, Edzer J., GÓMEZ-RUBIO, Virgilio. 2008. *Applied Spatial Data Analysis with R*.
- FELGUEIRAS, Carlos Alberto. *Geostatistics Predictions with Anisotropy and Simulations*

