

Deterministické a stochastické metody

- **Deterministické metody**
 - Každý stav vychází přímo z předcházející situace
 - Ideální stav
 - V případě predikce nám stačí znát vstupy a parametry a jsme schopni přesného modelování
- **Stochastické metody**
 - Vstupuje zde prvek náhodnosti
 - Predikce a modelování pouze s určitou pravděpodobností
 - Téměř všechny procesy jsou do jisté míry stochastické

Globální a lokální odhady

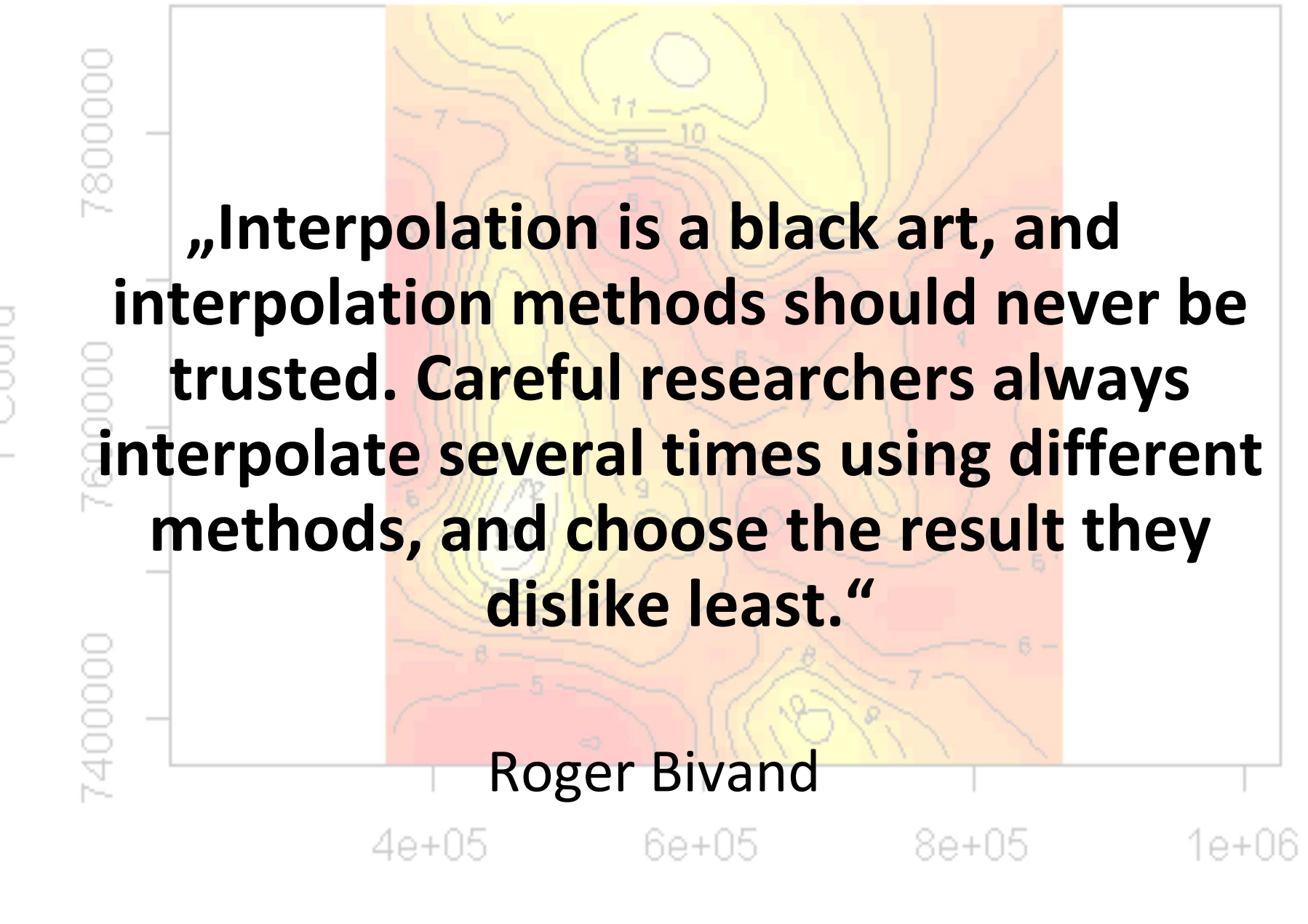
- **Globální metody**

- Jeden model, který je společný pro celé studované území
- Např. regresní modely – polynomické funkce
- Výsledkem jsou hladké povrchy

- **Lokální metody**

- Odhady probíhají lokálně v rámci definovaného sousedství
- Pro každou skupinu tedy mohou být parametry predikčního algoritmu různé





„Interpolation is a black art, and interpolation methods should never be trusted. Careful researchers always interpolate several times using different methods, and choose the result they dislike least.“

Roger Bivand

Historie krigingu

- **Danie G. Krige**

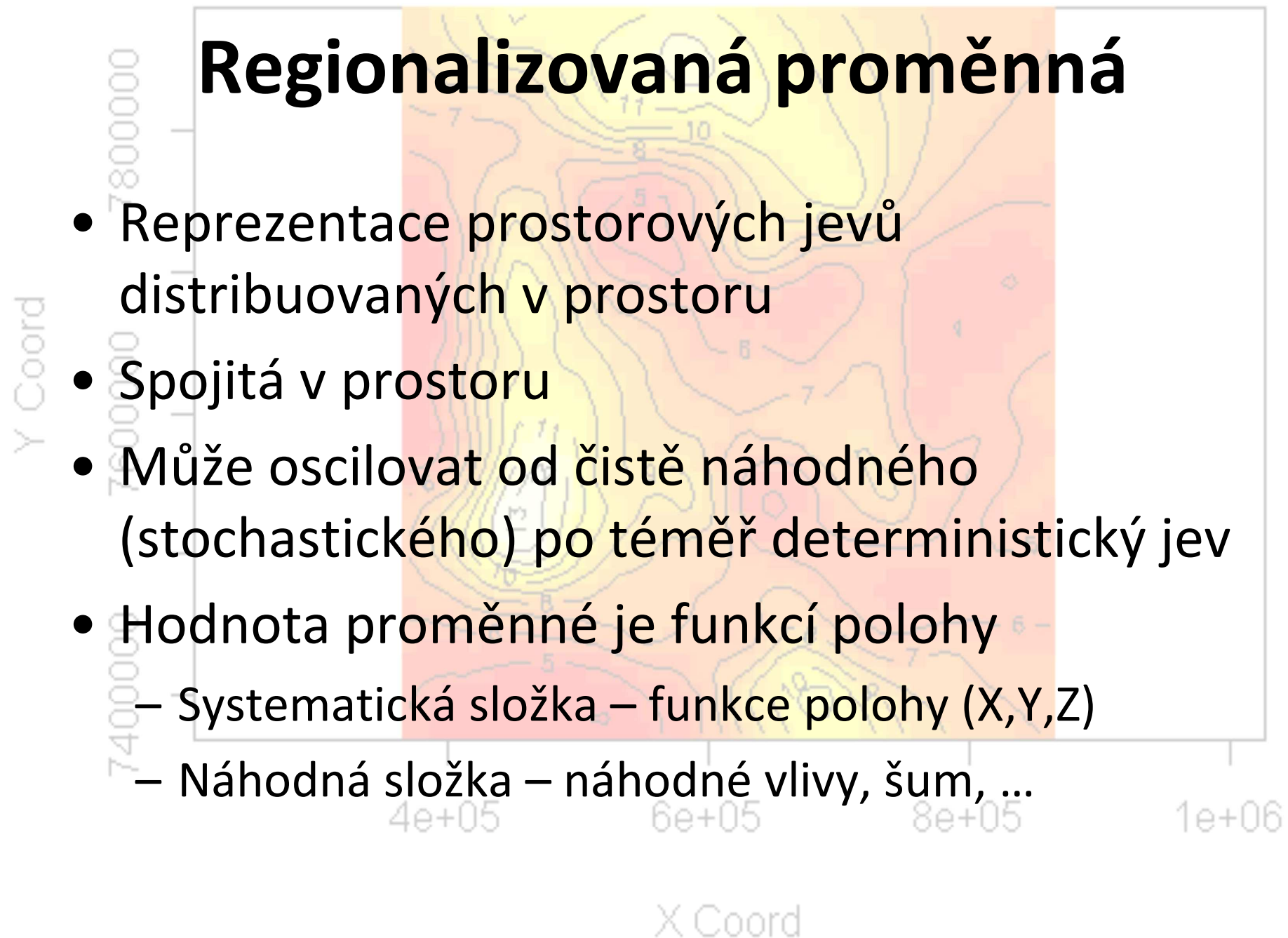
- *Magisterská práce – těžba zlata ve Whitwatersandu v JAR*
- *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand (1951)*

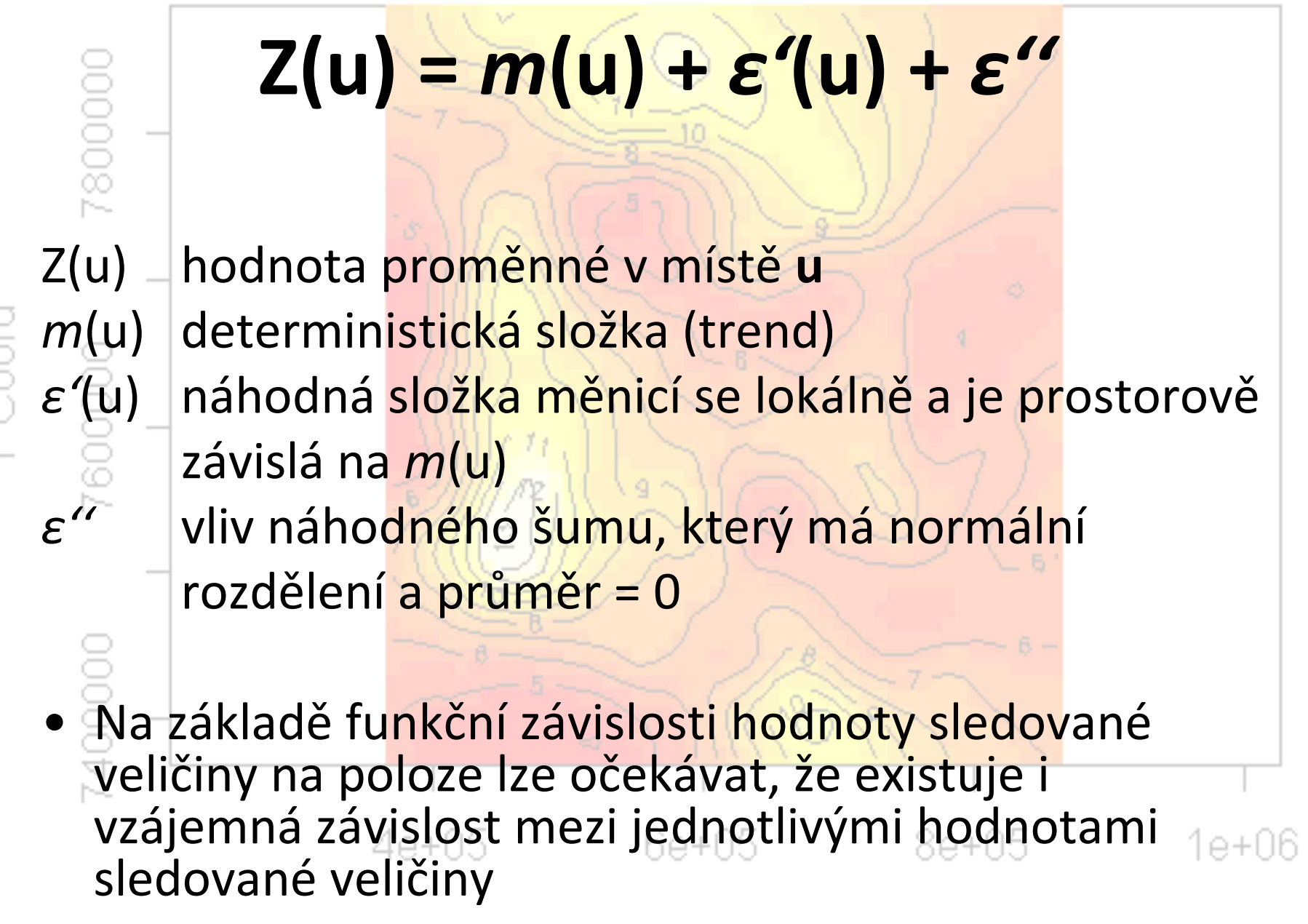
- **Georges Matheron**

- Otec geostatistiky a matematické morfologie
- *Traité de géostatistique appliquée (Treaty of applied geostatistics) - 1962-63*
- *Les variables régionalisées et leur estimation : une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature (The regionalized variables and their estimation : an application of the theory of random functions to natural sciences) - 1965*

Regionalizovaná proměnná

- Reprezentace prostorových jevů distribuovaných v prostoru
- Spojitá v prostoru
- Může oscilovat od čistě náhodného (stochastického) po téměř deterministický jev
- Hodnota proměnné je funkcí polohy
 - Systematická složka – funkce polohy (X,Y,Z)
 - Náhodná složka – náhodné vlivy, šum, ...




$$Z(u) = m(u) + \varepsilon'(u) + \varepsilon''$$

$Z(u)$ hodnota proměnné v místě u

$m(u)$ deterministická složka (trend)

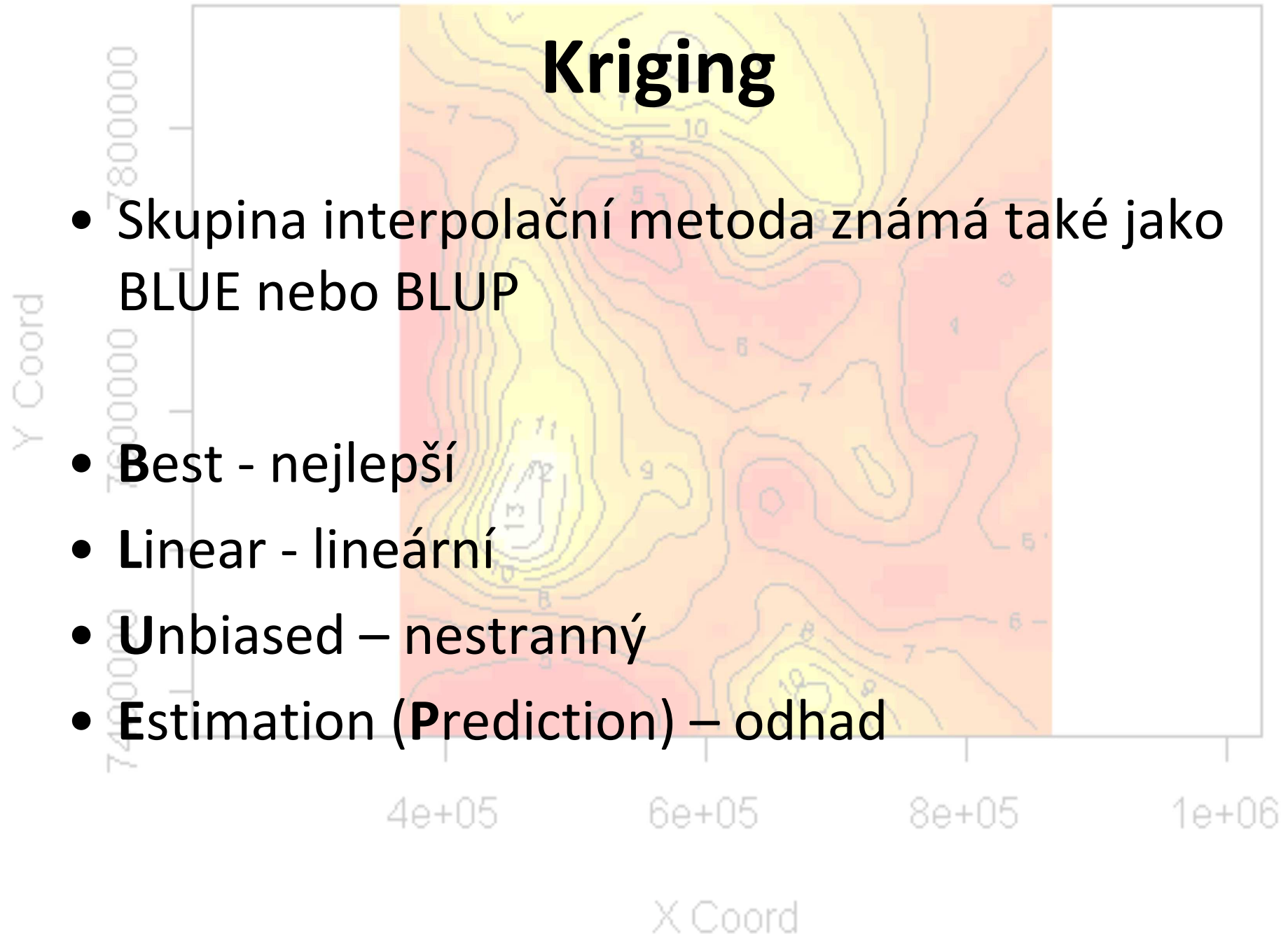
$\varepsilon'(u)$ náhodná složka měnící se lokálně a je prostorově závislá na $m(u)$

ε'' vliv náhodného šumu, který má normální rozdělení a průměr = 0

- Na základě funkční závislosti hodnoty sledované veličiny na poloze lze očekávat, že existuje i vzájemná závislost mezi jednotlivými hodnotami sledované veličiny

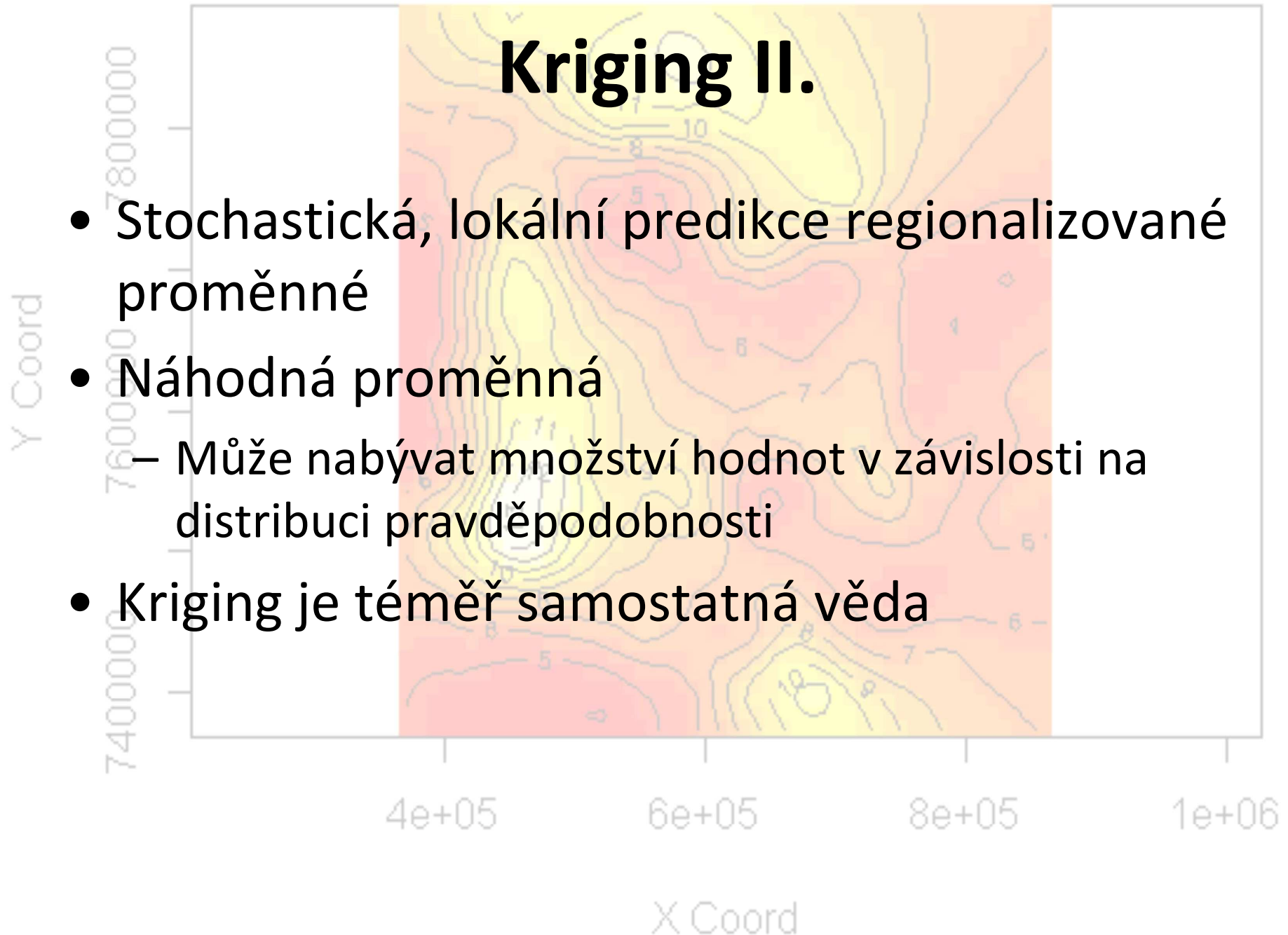
Kriging

- Skupina interpolační metoda známá také jako BLUE nebo BLUP
- **B**est - nejlepší
- **L**inear - lineární
- **U**nbiased – nestranný
- **E**stimation (**P**rediction) – odhad



Kriging II.

- Stochastická, lokální predikce regionalizované proměnné
- Náhodná proměnná
 - Může nabývat množství hodnot v závislosti na distribuci pravděpodobnosti
- Kriging je téměř samostatná věda



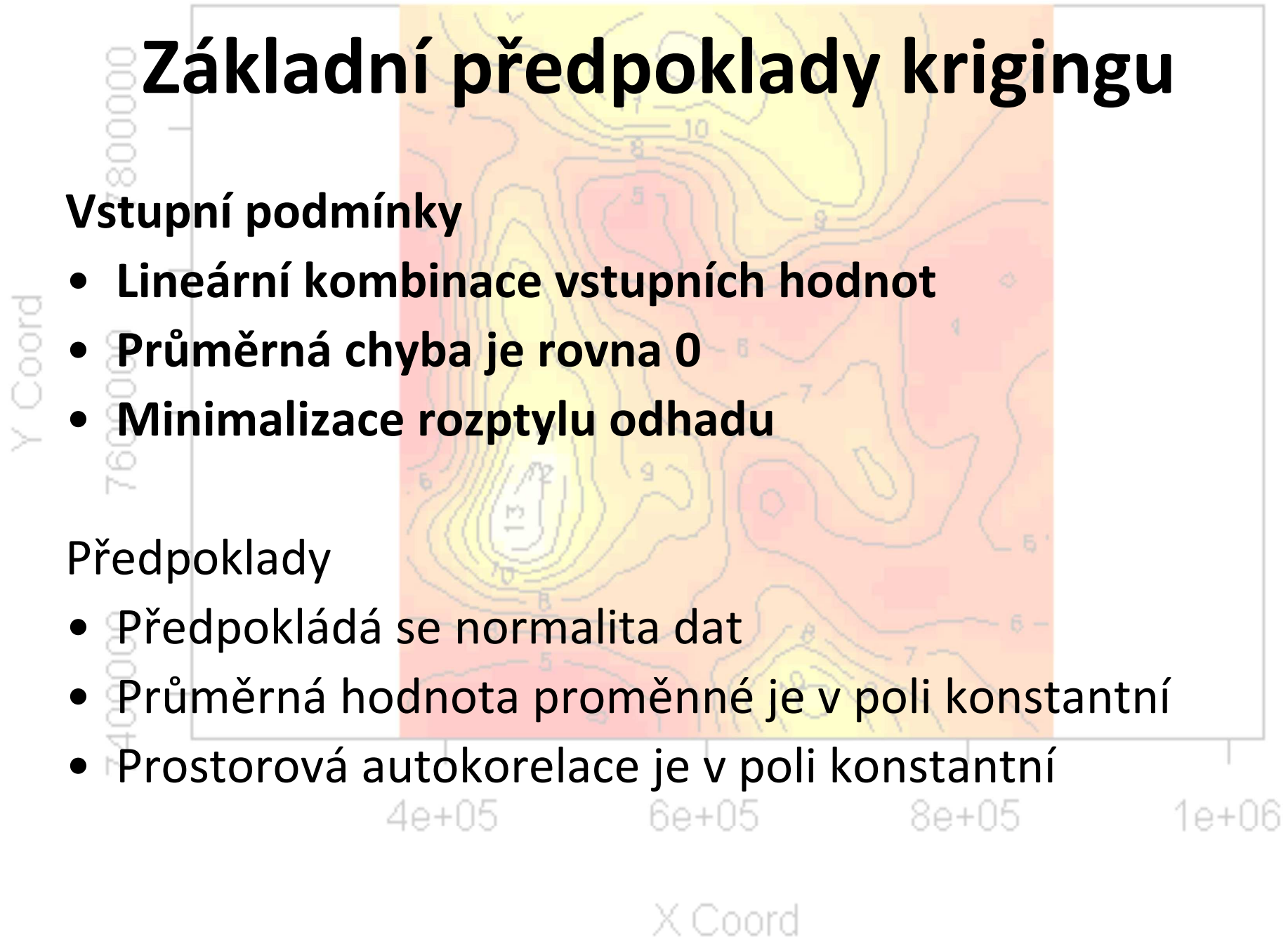
Základní předpoklady krigingu

Vstupní podmínky

- Lineární kombinace vstupních hodnot
- Průměrná chyba je rovna 0
- Minimalizace rozptylu odhadu

Předpoklady

- Předpokládá se normalita dat
- Průměrná hodnota proměnné je v poli konstantní
- Prostorová autokorelace je v poli konstantní



Koncept

- Ze vstupních podmínek jsou s pomocí strukturálních funkcí generovány krigingové váhy pro bodová měření

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} & 1 \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} & 1 \\ \vdots & & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{10} \\ K_{20} \\ \vdots \\ K_{n0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

4e+05

6e+05

8e+05

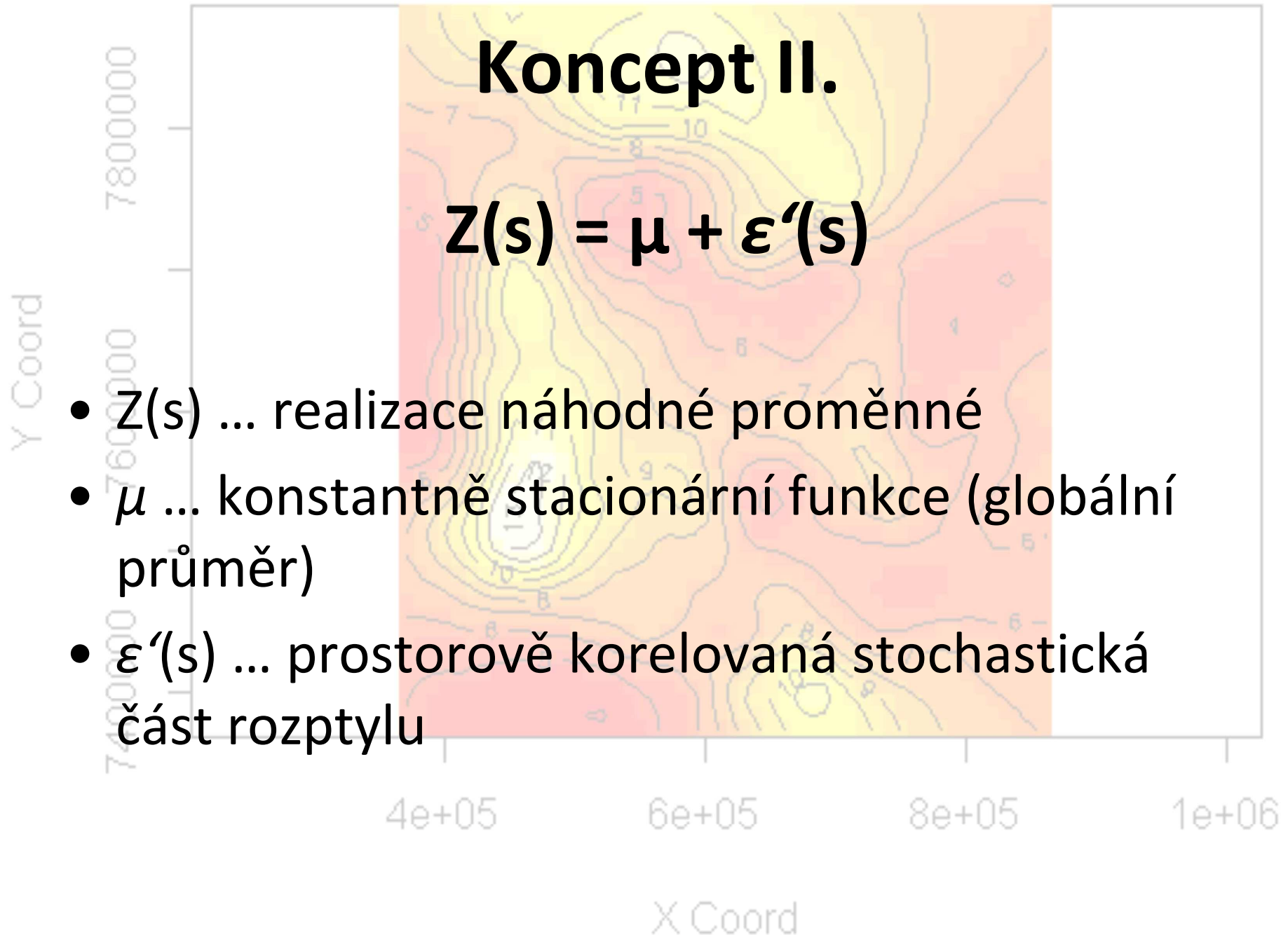
1e+06

X Coord

Koncept II.

$$Z(s) = \mu + \varepsilon'(s)$$

- $Z(s)$... realizace náhodné proměnné
- μ ... konstantně stacionární funkce (globální průměr)
- $\varepsilon'(s)$... prostorově korelovaná stochastická část rozptylu

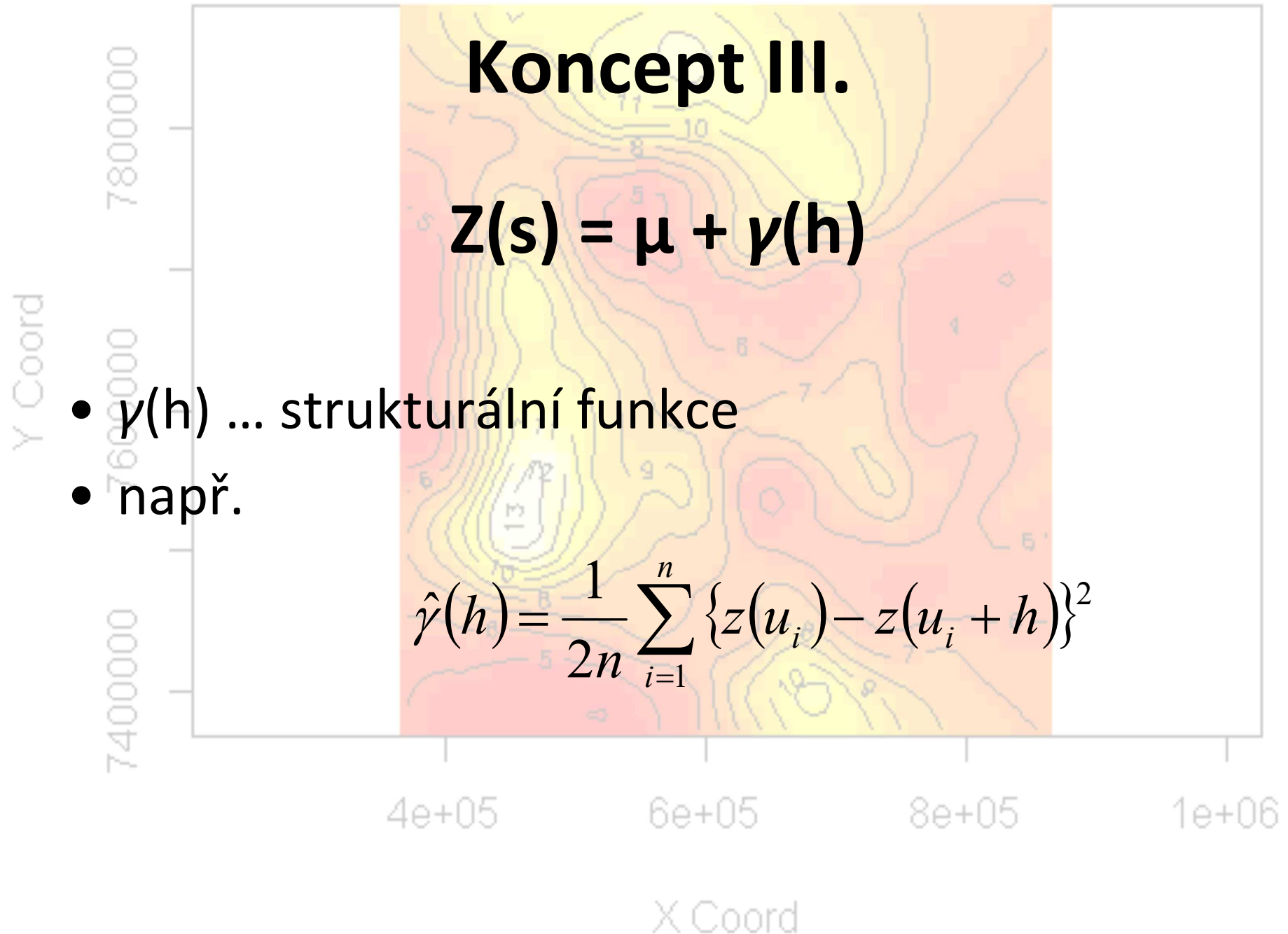


Koncept III.

$$Z(s) = \mu + \gamma(h)$$

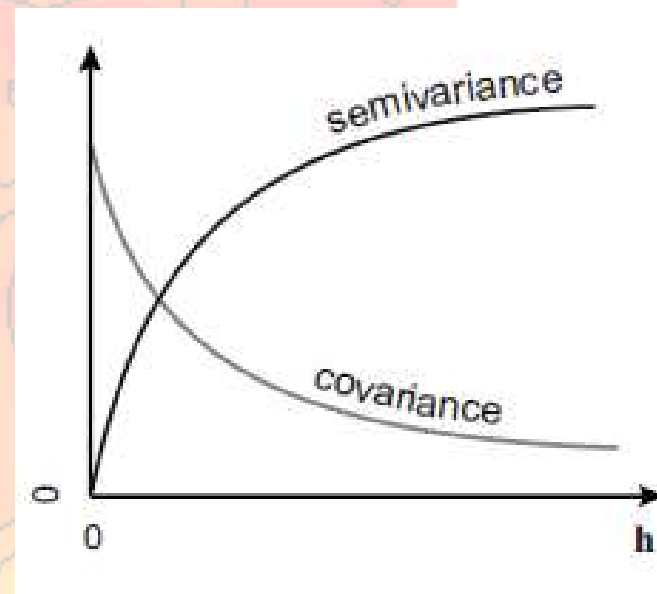
- $\gamma(h)$... strukturální funkce
- např.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \{z(u_i) - z(u_i + h)\}^2$$



Strukturální funkce

- Modelování prostorového vztahu mezi měřenými body – vzdálenost a směr
- Izotropie, anizotropie
- **Kovariogram – $C(h)$**
- Korelogram
- **(semi)Variogram – $\gamma(h)$**
- Madogram
- Rodogram



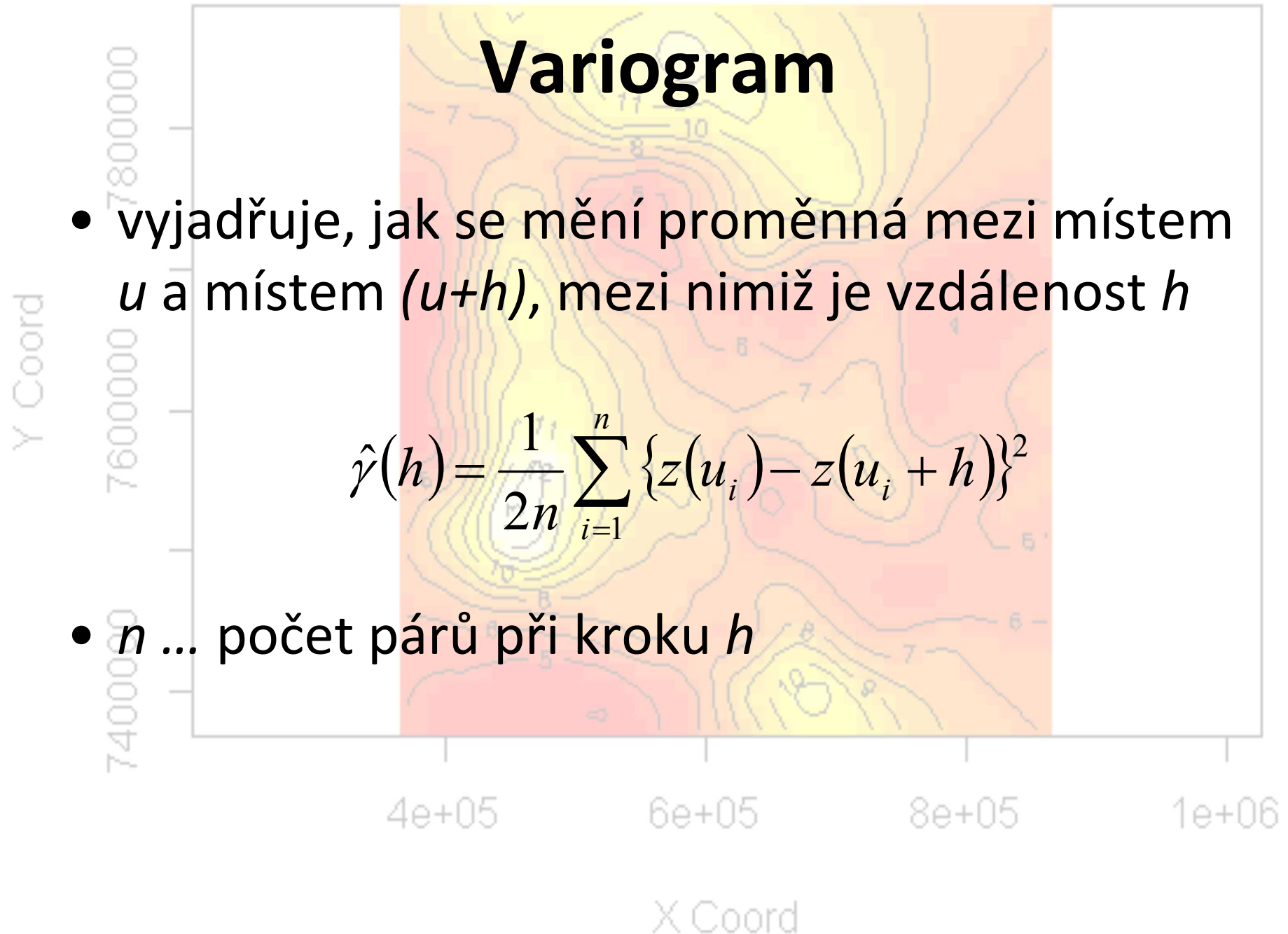
$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

Variogram

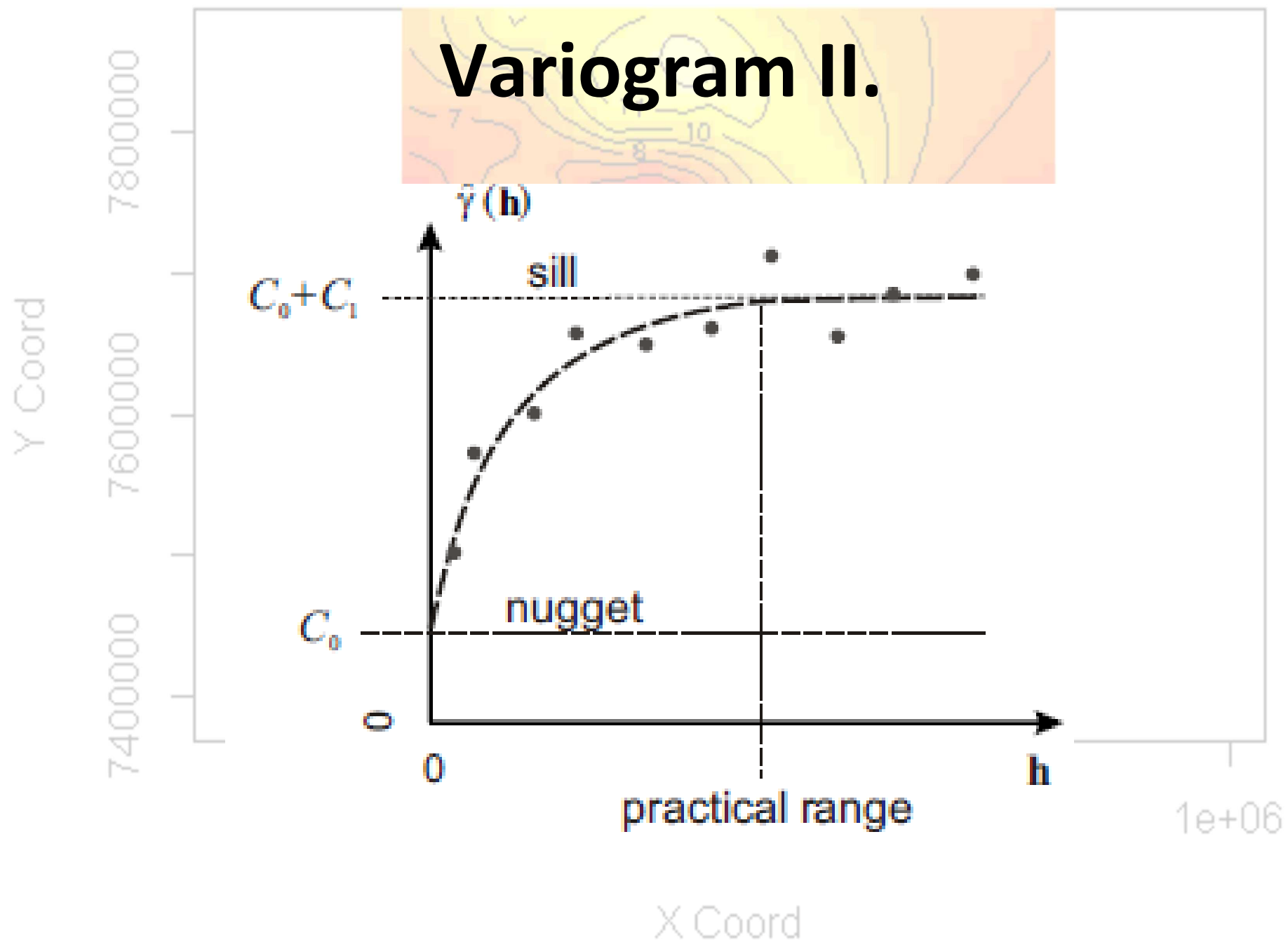
- vyjadřuje, jak se mění proměnná mezi místem u a místem $(u+h)$, mezi nimiž je vzdálenost h

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \{z(u_i) - z(u_i + h)\}^2$$

- n ... počet párů při kroku h

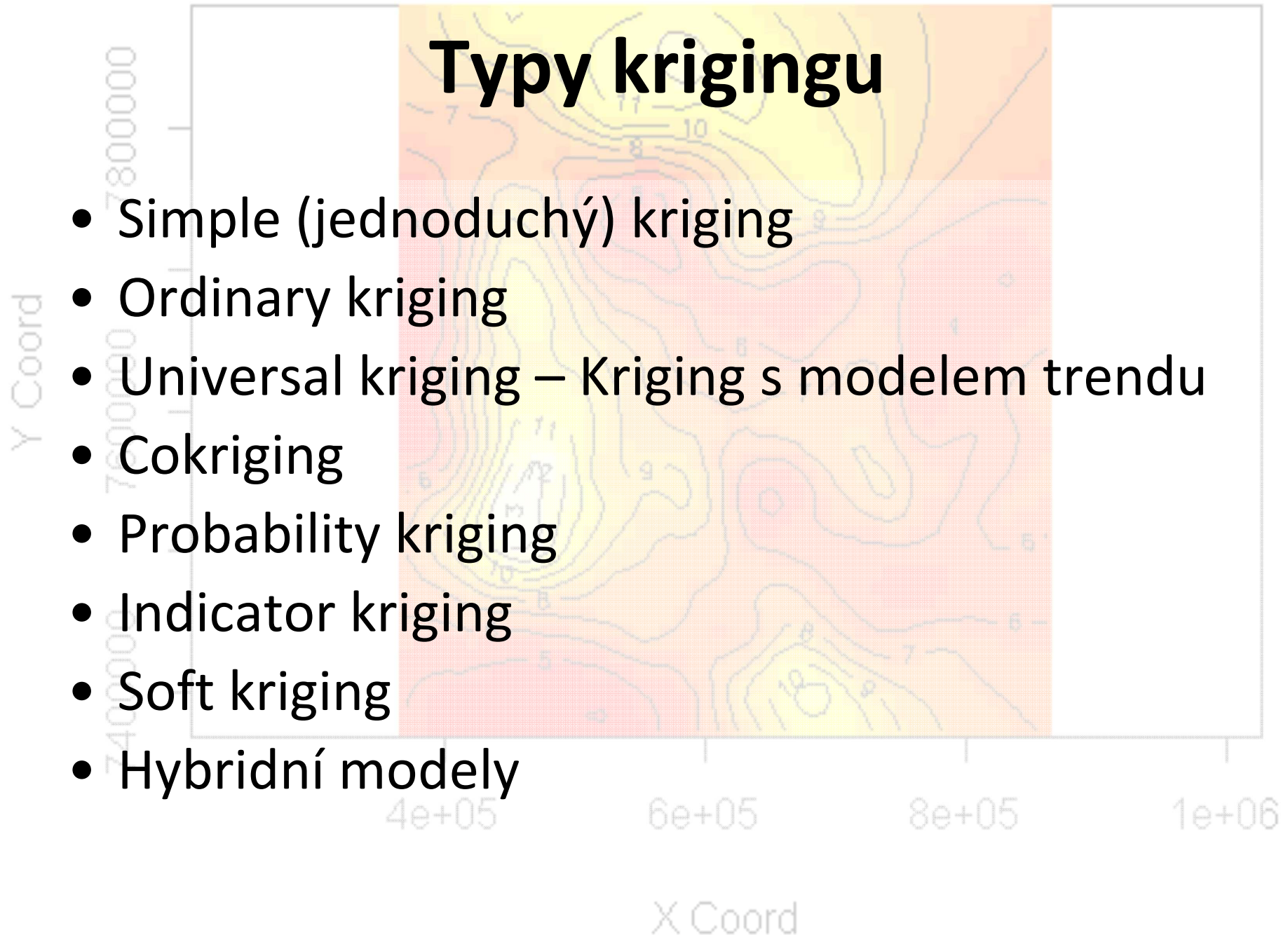


Variogram II.



Typy krigingu

- Simple (jednoduchý) kriging
- Ordinary kriging
- Universal kriging – Kriging s modelem trendu
- Cokriging
- Probability kriging
- Indicator kriging
- Soft kriging
- Hybridní modely



Simple kriging

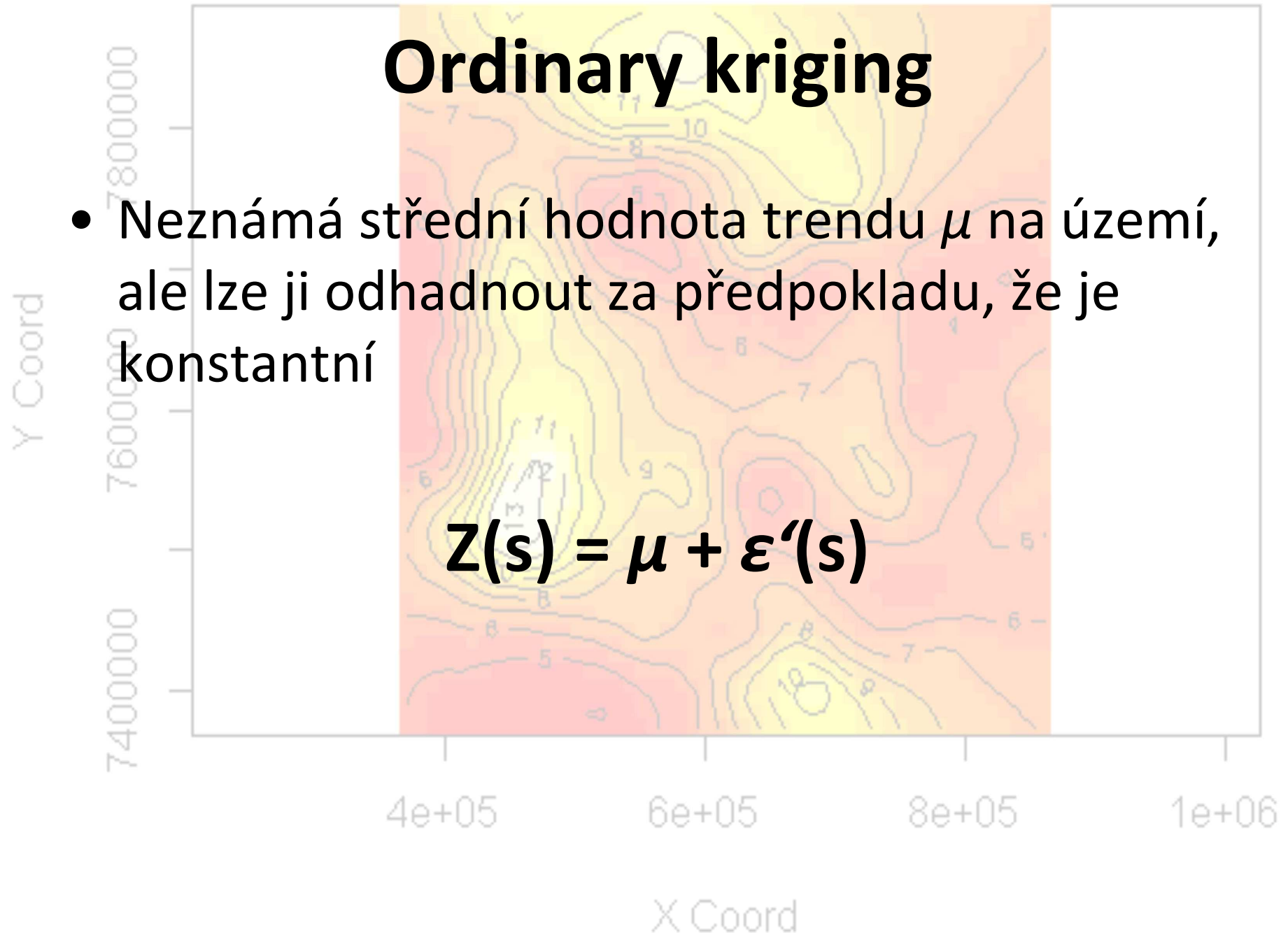
- Nejjednodušší varianta
- Pro úspěšné použití je třeba přesně znát střední hodnotu μ , která je pro celý region konstantní
- Tzn. hodnoty na území neovlivňuje žádný trend

$$Z(s) = \mu + \varepsilon'(s)$$

Ordinary kriging

- Neznámá střední hodnota trendu μ na území, ale lze ji odhadnout za předpokladu, že je konstantní

$$Z(s) = \mu + \varepsilon'(s)$$



Universal Kriging

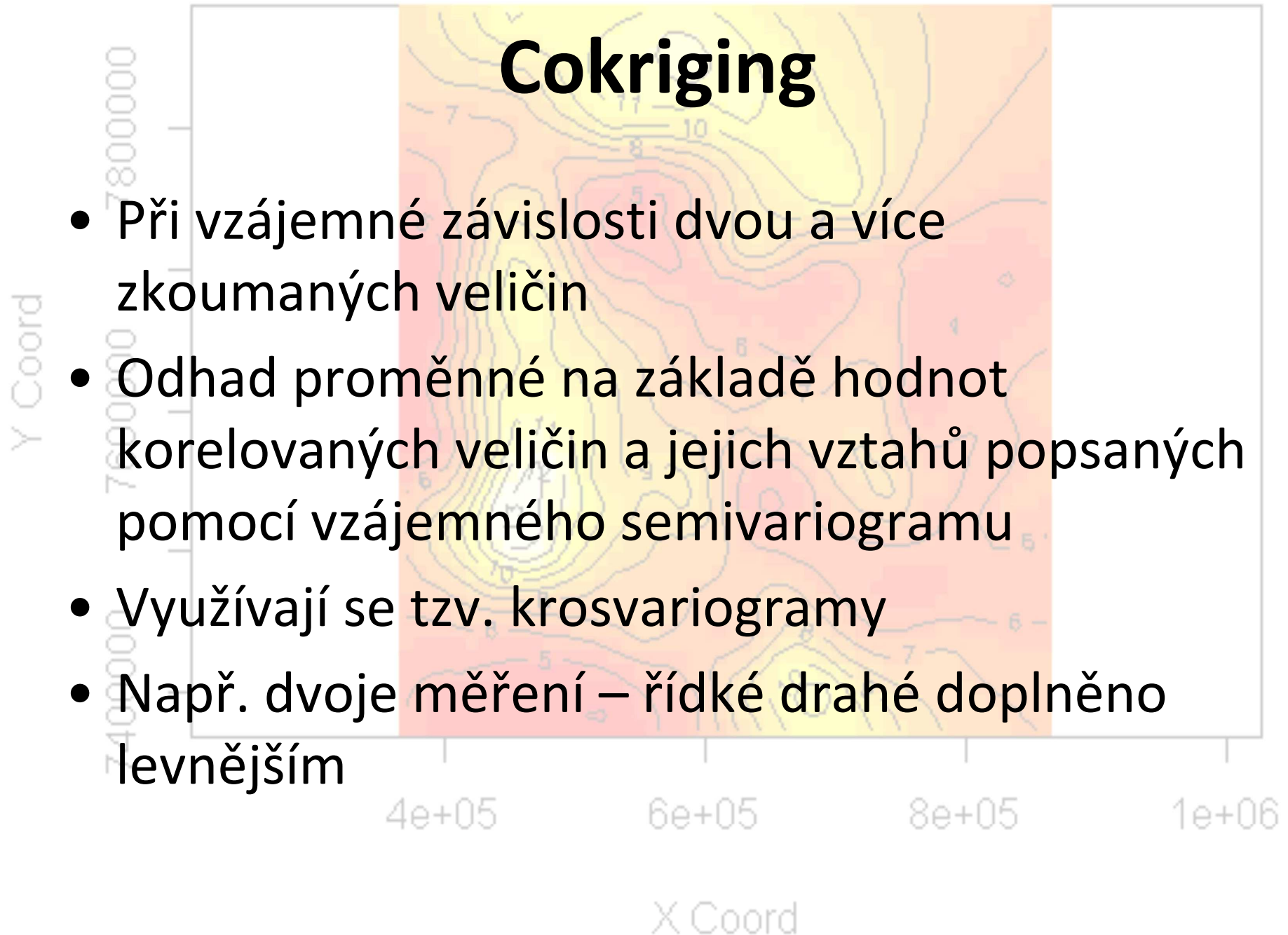
- Není-li splněna podmínka stacionarity průměrné hodnoty (trend v datech)
- Prostorová proměnná považována za součet trendu (driftu), který určuje průměrnou hodnotu v místě a **reziduí**

$$Z(s) = \mu(s) + \varepsilon'(s)$$

- $\mu(s)$... deterministická funkce

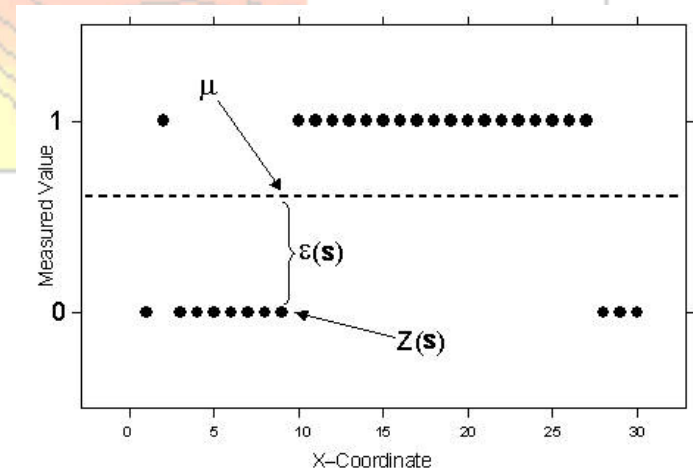
Cokriging

- Při vzájemné závislosti dvou a více zkoumaných veličin
- Odhad proměnné na základě hodnot korelovaných veličin a jejich vztahů popsaných pomocí vzájemného semivariogramu
- Využívají se tzv. krosvariogramy
- Např. dvoje měření – řídké drahé doplněno levnějším



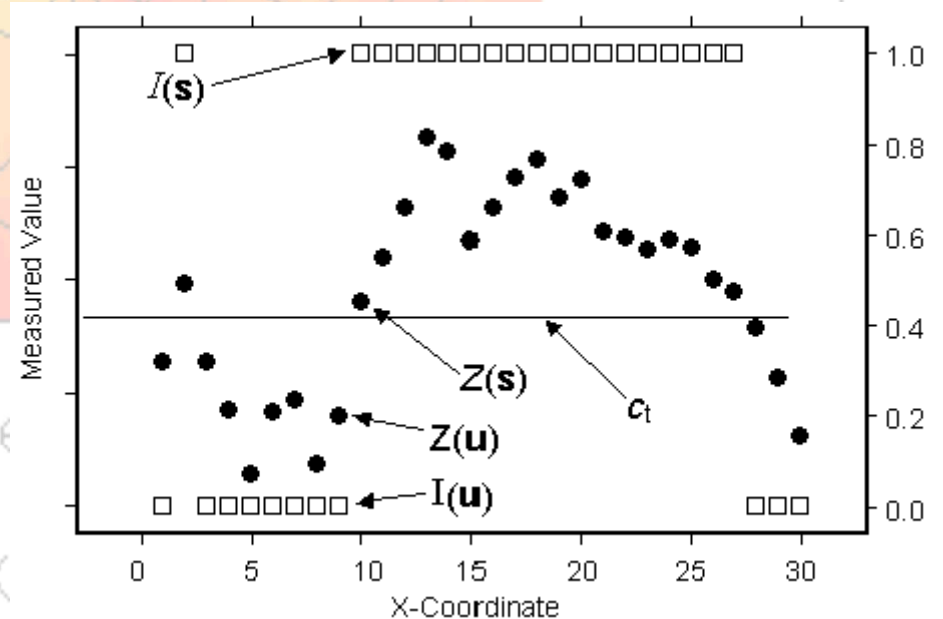
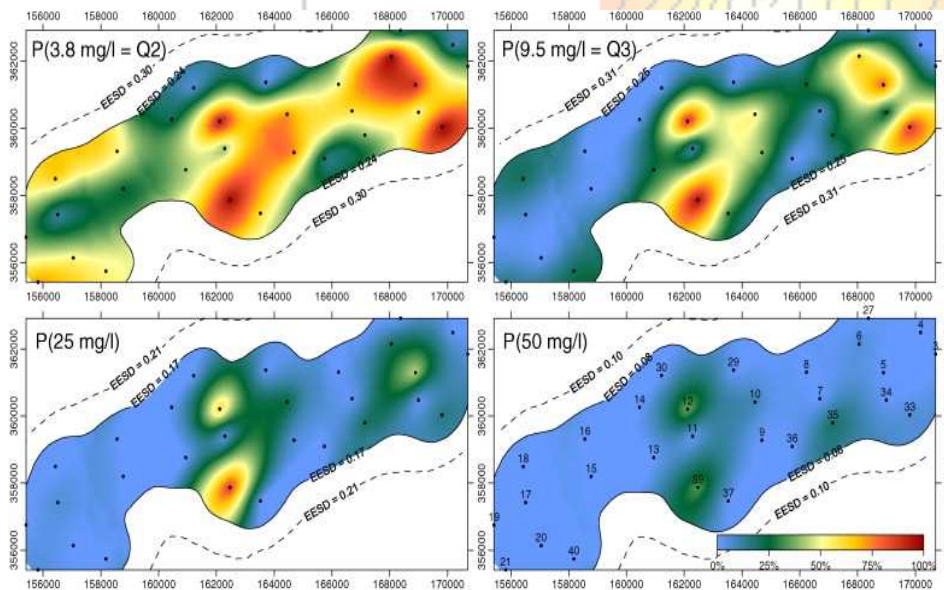
Indicator kriging

- Nezjišťují se přímo hodnoty
- Odhad pravděpodobnosti, s jakou je překročena limitní hodnota (testovaná podmínka)
- Možnost krigovat i kvalitativní údaje
- Indikátor nabývá pouze 2 hodnot - ano/ne resp. 1/0
- Transformované pole hodnot slouží jako vstup pro krigování
- Potíže se strukturálními funkcemi
 - využití kvartilů



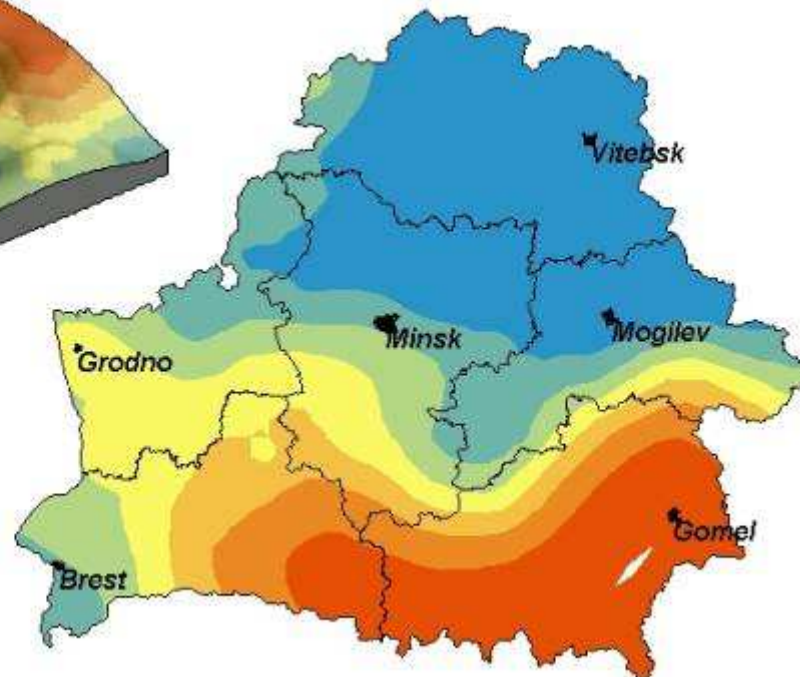
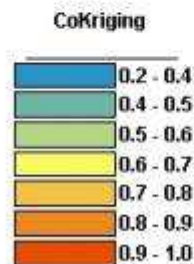
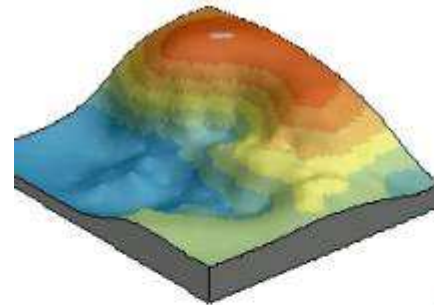
Probability kriging

- Využití indikátorové funkce i původních hodnot
- Původní hodnoty často nahrazeny pořadím původního údaje ve variační řadě



Soft kriging

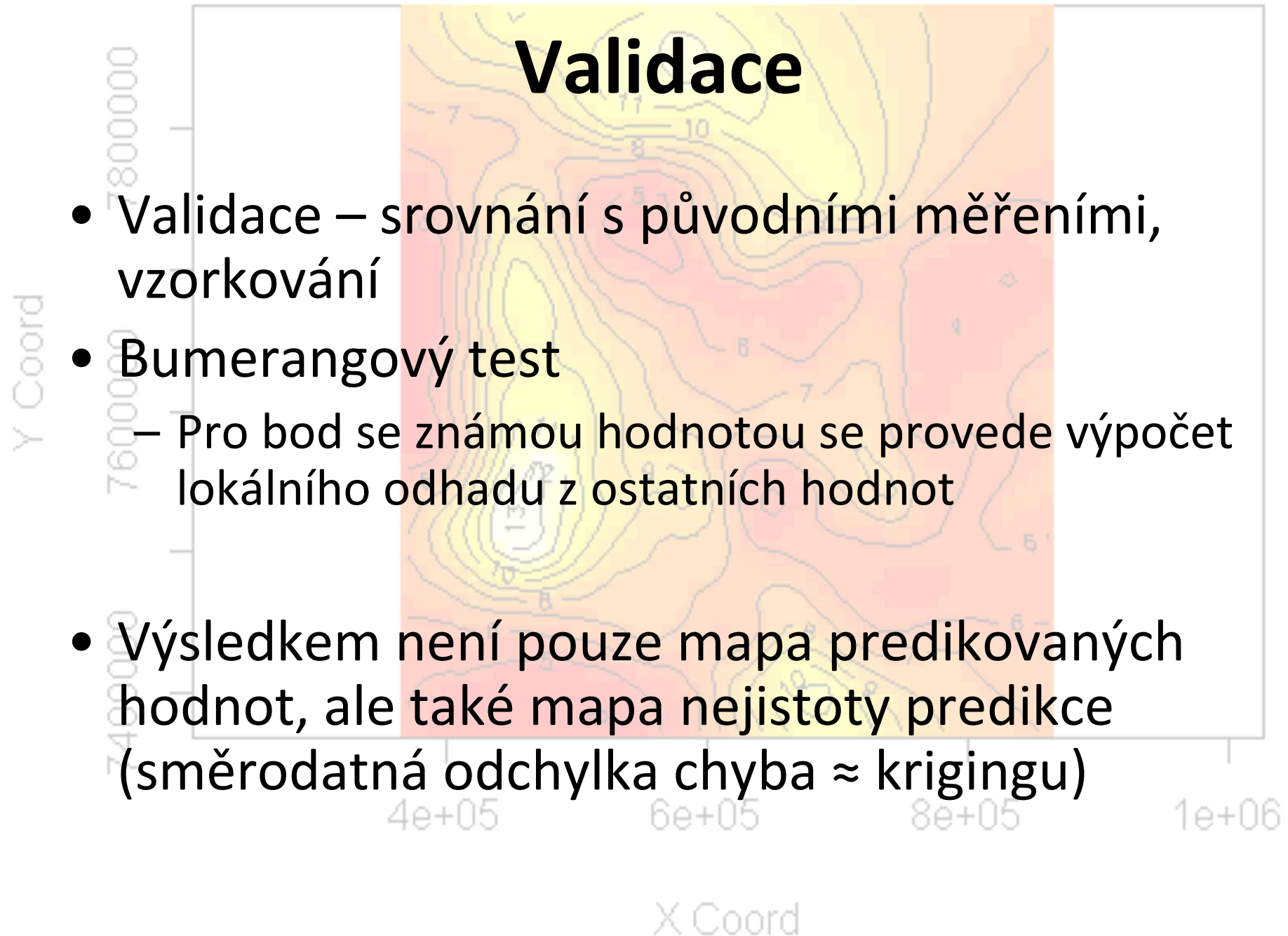
- Použití „měkkých“ faktorů (znalostí)
- Odhadované hodnoty
- Využití intervalů hodnot v rámci jednoho místa



1e+06

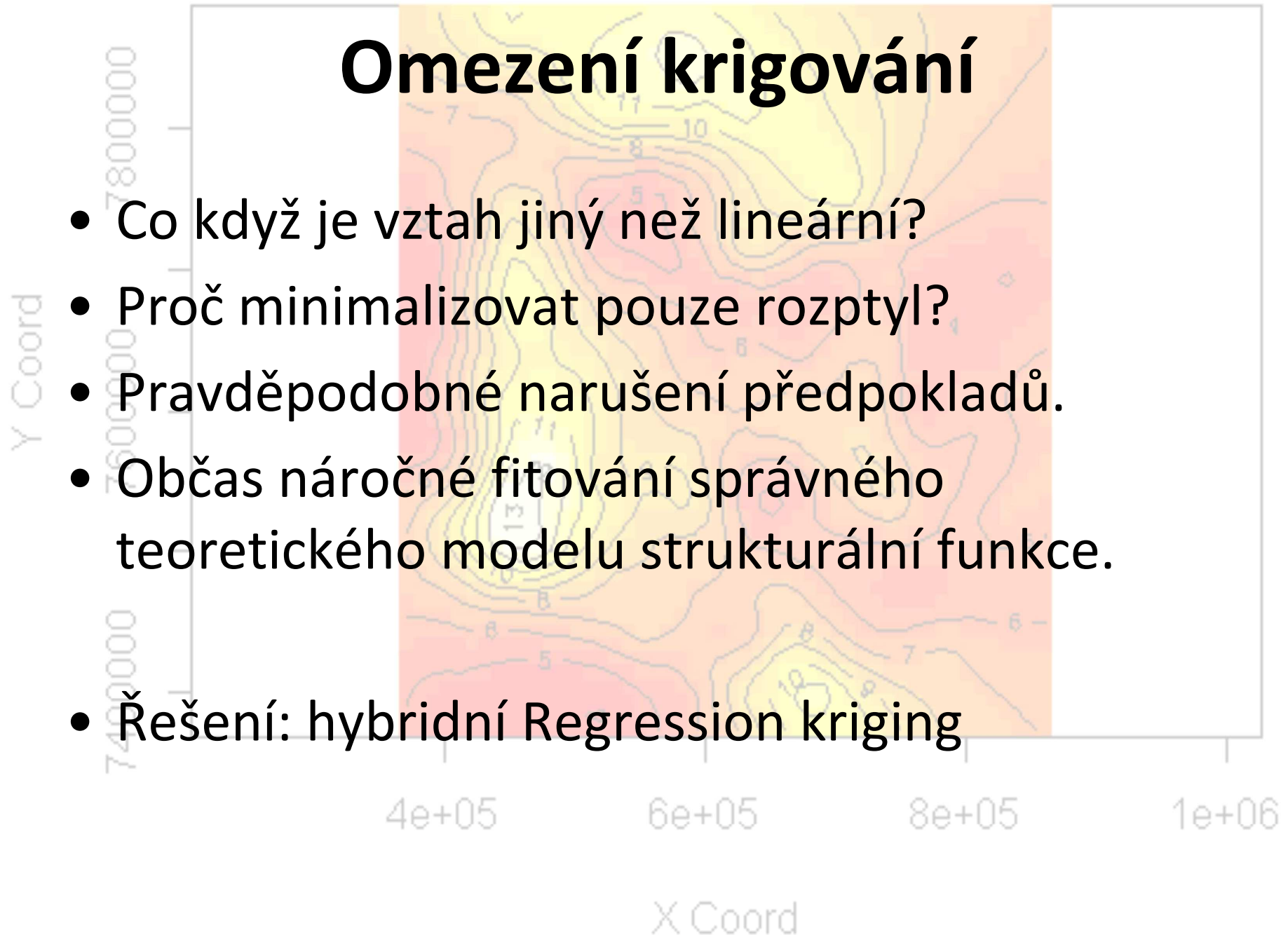
Validate

- Validate – srovnání s původními měřeními, vzorkování
- Bumerangový test
 - Pro bod se známou hodnotou se provede výpočet lokálního odhadu z ostatních hodnot
- Výsledkem není pouze mapa predikovaných hodnot, ale také mapa nejistoty predikce (směrodatná odchylka chyba \approx krigingu)



Omezení krigování

- Co když je vztah jiný než lineární?
- Proč minimalizovat pouze rozptyl?
- Pravděpodobné narušení předpokladů.
- Občas náročné fitování správného teoretického modelu strukturální funkce.
- Řešení: hybridní Regression kriging



Postup

1. Ověření zda jsou splněny všechny předpoklady
2. (Úprava a transformace dat)
3. Tvorba (semi)variogramu nebo jiné strukturální funkce
4. Výběr vhodného teoretického modelu a jeho fitování
5. Kriging (predikce + chyba)
6. Validace výsledků – RMSE, krosvalidace,
7. V případě neuspokojivých výsledků ladění a iterace bodů 4-6

