DEPARTMENT DE SCIENCES ET INGÉNIERIE

PROJET DE COMPLEX

Algorithme de Karger

Auteurs:
Mouataz El Bouhali
Elina Jankovskaja
Karima Sadykova

Superviseur:
Damien Vergnaud

December 2022

Contents

1 Introduction

En théorie des graphes et en informatique théorique, une coupe minimum d'un graphe est une coupe contenant un nombre minimal d'arêtes.

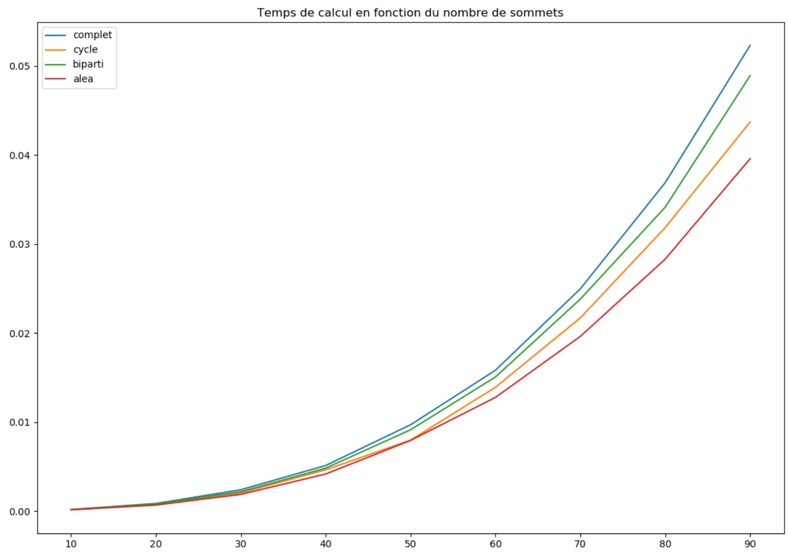
Pour déterminer cette coupe nous avons étudié en cours magistraux une implémentation de l'algorithme de Karger (algorithme probabiliste simple de type Monte Carlo pour trouver une coupe minimum dans un graphe). On a donc cherché dans le cadre de ce projet à analyser cet algorithme en utilisant différentes structures de données et différents types de graphes.

2 Réponses aux questions

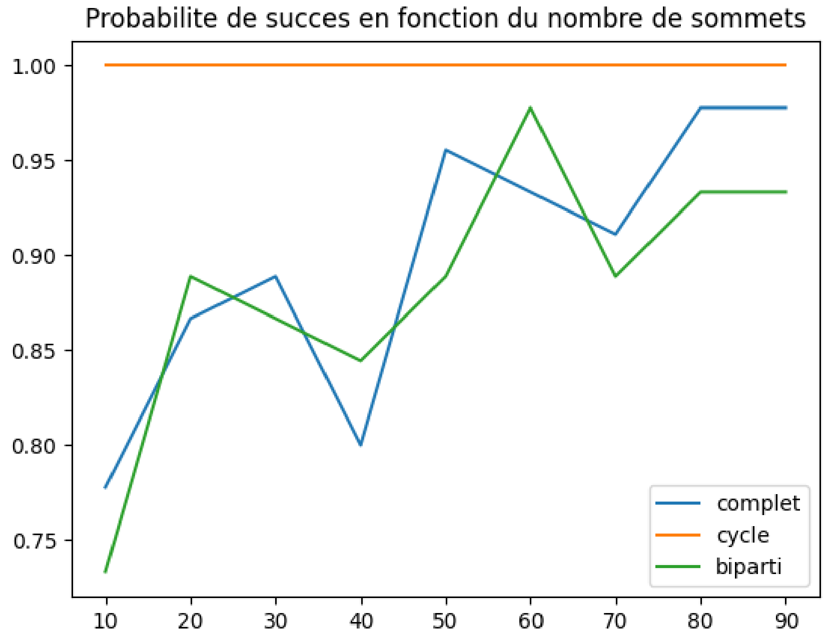
2.1 Exercice 1

Question 1.b Présenter et analyser la complexité expérimentale de votre implémentation sur ces familles de graphe.

En utilisant une matrice à deux dimensions on obtient donc pour 100 sommets avec un pas de 10:



On observe ainsi que le temps augmente d'une manière quadratique en fonction du nombre de sommets, ce qui correspond aussi au résultat théorique qu'on a vu dans le cours.



On peut aussi analyser la probabilité de succès pour la comparer à celle du cours: probabilité de succès $\geqslant 2/n(n-1)$. On remarque que la courbe du graphe biparti (.resp complet) commence avec une probabilité de 0.7 (.resp 0.78) pour 10 sommet et ça continue à augmenter jusqu'à atteindre une valeur de 0.92 pour le graphe biparti et 0.97 pour le graphe complet au bout de 80 sommets puis reste constante après ça même si le nombre de sommets augmente. En ce qui concerne le graphe cycle on remarque que la probabilité reste constante à la probabilité 1.00 peu importe le nombre de sommets. Ces résultats expérimentaux restent cohérents avec le résultat théorique qu'on a mentionné avant.

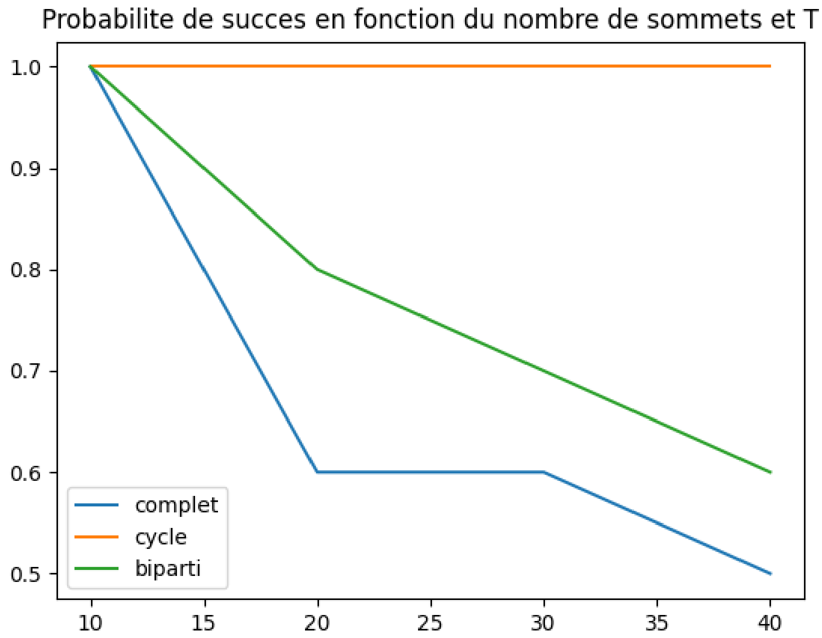
2.2 Exercice 2

Question 2.a Effectuer une étude expérimentale de la probabilité de succès de vos implantations de l'exercice précédent sur les familles de graphes de la question 1.b] pour lesquelles vous connaissez la taille d'une coupe minimale. Comparer avec l'analyse théorique vue en cours.

Pour effectuer cette étude expérimentale nous avons analysé 3 types de graphes (complet, cycle, biparti). Pour chacun nous avons trouvé la formule générale de la taille de la coupe minimale telle que si nous avons G = (V, E) avec |V| = n, |E| = m:

- Graphe complet : $\text{coupe}_{\text{min}}$ = (n - 1)
- Graphe cycle : $\text{coupe}_{\text{min}}$ = 2
- Graphe biparti : $\text{coupe}_{\text{min}}$ = n / 2

Ainsi, nous avons créé une fonction de vérification de succès basé sur ces prédictions. Finalement nous avons obtenu un graphe des probabilités de succès par rapport au nombre de sommets en allant jusqu'à 50 sommets avec un pas de 10:



Sur ce graphe on observe tout d'abord que l'algorithme est optimal pour les graphes cycliques. On obtient toujours une coupe minimum de 2 ce qu'il est optimal. Du côté des graphes complets et bipartis on peut voir que l'on commence avec des probabilités de 1 puis on baisse continuellement jusqu'à 0.5. Cependant on ne va pas en dessous. Nous n'avons pas pu tester l'algorithme sur de plus grandes instances car cela prenait trop de temps.

2.3 Exercice 3

Question 3.a Montrer que le temps d'exécution $T(n)$ de l'algorithme de Karger-Stein sur un graphe à n sommets vérifie la relation

$$T(n) = 2T\left(\left\lceil 1 + \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rceil\right) + O(n^2)$$

et en déduire que $T(n) = O(n^2 * (log(n)))$.

Notre algorithme prend en entrée un graphe avec n sommets et applique la contraction $n(1 - 1/\sqrt{2}) - 1$ fois afin de construire 2 graphes G1 et G2 de $n/\sqrt{2} + 1$ sommets, on fait un appel récursif sur ces 2 graphes et choisi la plus petite coupe retournée par ces 2 graphes (ce qui nous fait $2T(n/\sqrt{2}+1)$). On obtient nos 2 graphes par 2 séquences différentes de contraction au lieu de faire une grande contraction sur un seul graphe, mais sans augmenter la complexité. Choisir une arête aléatoire se fait en $O(n)$, or faire une contraction se fait en $O(n^2)$. D'où la relation :

- $T(n) = O(1)$ si $n \leqslant 6$
- $T(n) = 2T(n/\sqrt{2}+1) + O(n^2)$.

D'après la question précédente, on a : $T(n) \leqslant 2T(n/\sqrt{2}+1) + cn^2$ et $T(n) \leqslant c$ pour $n \leqslant 6$. d'après le master theorem: On peut aussi vérifier avec une récurrence que $T(n) \leqslant 2T(n/\sqrt{2}+1) + cn^2$, d'où :

- $T(n) = O(n^2 log(n))$.

Question 3.b Montrer que la probabilité de succès P(n) de l'algorithme de Karger-Stein sur un graphe à n sommets vérifie la relation P(n) $\geqslant 1-(1-1/2P(n/\sqrt{2}+1))^2$

On a la probabilité pour qu'une coupe minimale survive la contraction de n à $n/\sqrt{2}+1$ sommets : $p_0 \geqslant$ (2 parmi $n/\sqrt{2}+1$)/(2 parmi n) $= (n/\sqrt{2}+1)(n/\sqrt{2}+1-1)/n(n-1) = ((n/\sqrt{2}+1)n/\sqrt{2})/n(n-1) = (n/2+1/\sqrt{2})/(n-1) = (n/2-1/2)/(n-1) + (1/2+1/\sqrt{2})/(n-1) = 1/2 + (1/2+1/\sqrt{2})/(n-1)$ Si on applique récursivement k fois on obtient la relation récursive $p_{k+1} \geqslant 1-(1- p_k p_0)$ d'où: P(n) $\geqslant 1-(1-1/2P(n/\sqrt{2}+1))^2$

Question 3.c Montrer que $P(n) = \Omega(1/log(n))$ On montre par induction que P(n) $\geqslant 1/log(n)$

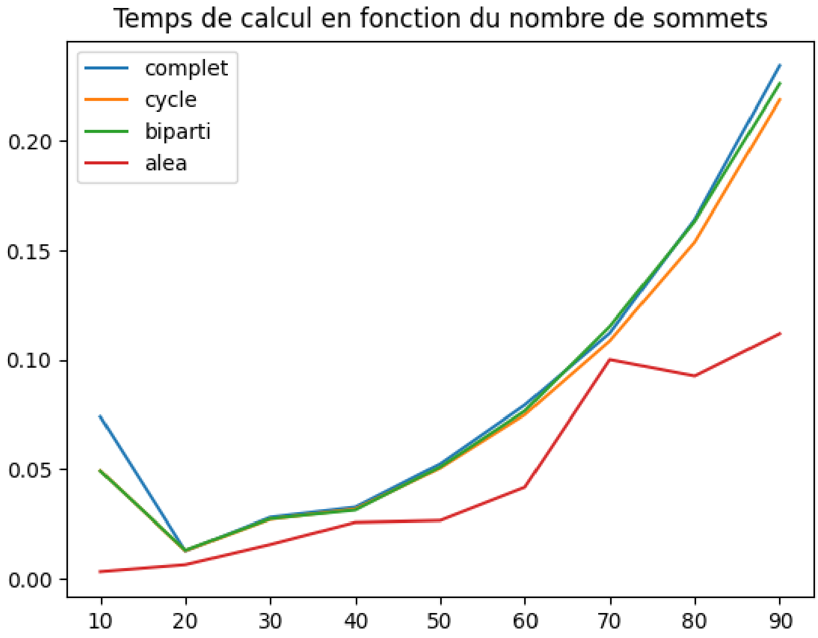
Par définition: P(n) $= 1-(1+1/4P(n/\sqrt{2}+1)^2)-P(n/\sqrt{2}+1)) = P(n/\sqrt{2}+1) - 1/4P(n/\sqrt{2}+1)^2$ Par induction on sait maintenant qu'on a $P(n/\sqrt{2}+1) \geqslant 1/log(n/\sqrt{2}+1)$. On va maintenant minorer les 2 termes de P(n) pour pouvoir aussi minorer P(n). On a déjà minoré le premier terme mais pour le 2ème vu que son coefficient est négatif on va poser la fonction: f(x) $= x - x^2/4$ qui est une fonction croissante pour $x \leqslant 1$. Donc on a a $\leqslant 1$ si $x \geqslant a$, on a $f(x) \geqslant a - a^2/4$.

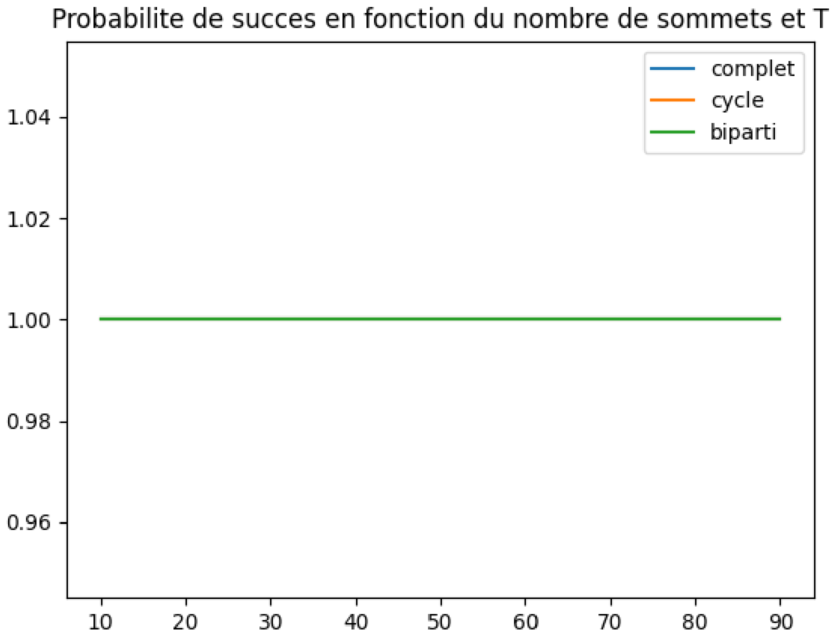
On fait pareil que dans la première partie et on obtient que: $P(n) \geqslant log(n/\sqrt{2}+1) - 1/4(log^2(n/\sqrt{2}+1)$

Pour démontrer l'étape d'induction il suffit de montrer que : $log(n/\sqrt{2}+1) - 1/4(log^2(n/\sqrt{2}+1) \geqslant 1/log(n) \iff (1/log(n/\sqrt{2}+1))(1-1/4log(n/\sqrt{2}+1)) \geqslant 1/log(n) \iff log(n/\sqrt{2}+1)/log(n) + 1/4log(n/\sqrt{2}+1) \leqslant 1 \iff (log(n)-1/2)/log(n) + 1/4log(n/\sqrt{2}+1) \leqslant 1 \iff 1/4log(n/\sqrt{2}+1) \leqslant 1/2log(n)$ donc a majorer même le 2ème terme de l'inégalité, on peut donc conclure que $P(n) \geqslant 1/log(n)$, et donc $P(n) = \Omega(1/log(n))$.

Question 3.e Comparer expérimentalement avec l'algorithme de Karger itéré et avec la borne théorique $P(n) = \Omega(1/log(n))$.

Notre algorithme karger-Stein est de complexité O($n^2 log(n)^3$) avec une probabilité d'erreur $\leqslant 1/n$.





On remarque que le temps de calcul est supérieur au premier algorithme de Karger ce qui est logique car on répète l'algorithme. On a cependant une très grande probabilité de succès sur nos exemples vu qu'elle est de 1.

3 Conclusion

À travers l'étude des différents algorithmes pour déterminer une coupe minimale dans un graphe, nous avons donc pu trouver un juste milieu pour avoir un algorithme assez rapide et ayant une précision assez élevée.