Численные методы для решения для задач баллистики

Введение в баллистику

Кузнецов Александр Алексеевич

Московский физико-технический институт
(Национальный исследовательский университет)
Физтех-школа аэрокосмических технологий

6 февраля 2025 г.

Overview

1. Постановка задачи
2. Кеплеровы элементы
3. Методы интегрирования

Уравнения движения

Нашей задачей является решение задачи Коши:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} \\
&\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) \\
&\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0, \;\; \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_0
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{a}$ - вектор обобщенных ускорений, сочетающий в себе как реальные ускорения от сил, так и поправки, связанные с неинерциальностью системы отсчета и релятивистскими эффектами. Если ввести вектор состояния $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ и вектор правой части $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$, то можно записать:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \\
&\boldsymbol{y}(t_0) = y_0
\end{aligned}$$

Кеплеровы элементы орбиты

Зачастую вместо радиус-вектора и скорости используют элементы орбиты. Самыми распространенными являются Кеплеровы элементы.

Кеплеровы элементы состоят из 6 значений:

- наклонение i
- долгота восходящего узда Ω
- аргумент перицентра ω
- эксцентриситет e
- большая полуось a
- истинная аномалия ν

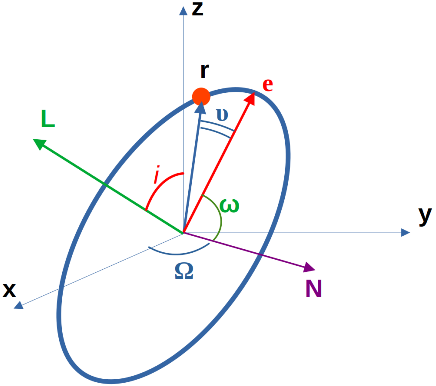


Рис.: Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы орбиты

Далее изложим алгоритм получение кеплеровых элементов из радиус-вектора и скорости. Определим вектор орбитального момента:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

Наклонением орбиты назовем угол между вектором орбитального момента и осью $\boldsymbol{z}$. Ввиду машинной арифметики наклонение лучше вычислять по формуле:

$$cos_L = L_z / |\boldsymbol{L}|$$

$$sin_L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} / |\boldsymbol{L}|$$

$$i = atan2(sin_L, cos_L)$$

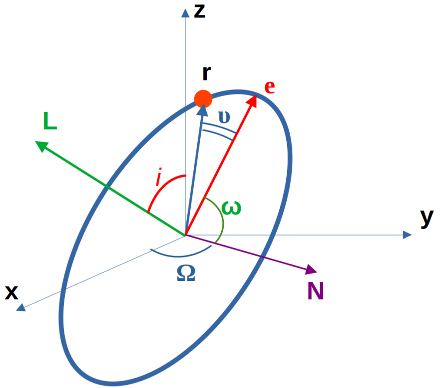


Рис.: Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы орбиты

Направлением на восходящий узел N назовем единичный вектор, лежащий в пересесечении плоскости орбиты и плоскости Oxy, причем тройка $\mathbf{L}, \mathbf{N}, \mathbf{z}$ - правая. Если орбита лежит в плоскости Oxy, то направление на восходящий узел совпадает с вектором $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{N} = \begin{cases} \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{L} / |\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{L}|, & \boldsymbol{z} \nparallel \boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{z} \parallel \boldsymbol{L} \end{cases}$$

Долготу восходящего узла определим как угол между осью $\boldsymbol{x}$ и вектором $\boldsymbol{N}$:

$$\Omega = atan2(N_y, N_x)$$

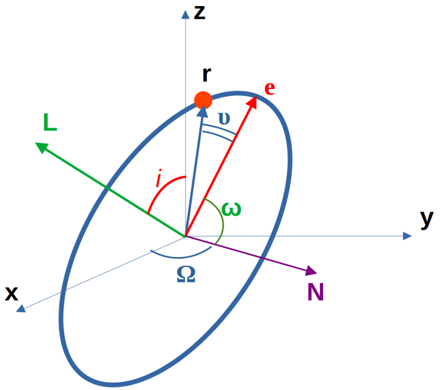


Рис.: Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы орбиты

Векторный эксцентриситет определим равенством:

$$\boldsymbol{e} = \frac{((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) - \frac{\mu}{|\boldsymbol{r}|})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{\mu}$$

Его модуль является эксцентриситетом орбиты, а направление указывает на перицентр. Чтобы исключить вырождение введем вектор $\boldsymbol{e}_1$:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{cases} \boldsymbol{e}/|\boldsymbol{e}|, & \boldsymbol{e} \neq 0 \\ \boldsymbol{N}, & \boldsymbol{e} = 0 \end{cases}$$

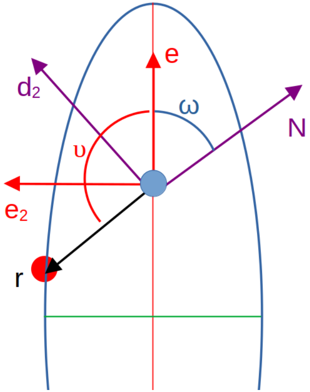


Рис.: Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы орбиты

Далее введем базис в плоскости орбиты:

$$\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{N}, \ \boldsymbol{d}_2 = \frac{\boldsymbol{L}}{|\boldsymbol{L}|} \times \boldsymbol{N}$$

Аргументом перицентра назовем угол между векторами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{e}_1$:

$$cos_\omega = \boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1$$

$$sin_\omega = \boldsymbol{d}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1$$

$$\omega = atan2(sin_\omega, cos_\omega)$$

Полуось орбиты вычисляется из формулы:

$$\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}{2} - \frac{\mu}{|\boldsymbol{r}|} = -\frac{\mu}{2a}$$

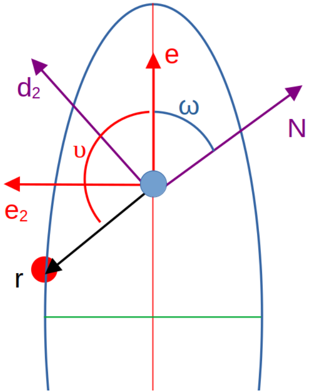


Рис.: Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы орбиты

Истинная аномалия - угол между вектором $\boldsymbol{e}_1$ и радиус-вектором тела. Для ее поиска введем еще один базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ в плоскости:

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{L}}{|\boldsymbol{L}|} \times \boldsymbol{e}_1$$

Формулы для ее вычисления следующие:

$$cos_\nu = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{r}$$
$$sin_\nu = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{r}$$
$$\nu = atan2(sin_\nu, cos_\nu)$$

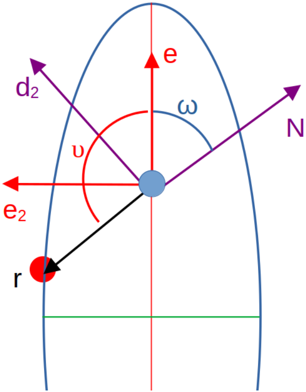


Рис.: Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы орбиты

Введем векторы полуосей и ексцентрическую аномалию (рисунок):

$$\boldsymbol{a} = a\ \boldsymbol{e}_1,$$

$$\boldsymbol{b} = a\sqrt{1-e^2}\ \boldsymbol{e}_2$$

Формулы для связи истинной и эксцентрической аномалии:

$$sin(E) = \frac{sin(\nu)\sqrt{1-e^2}}{1+e\ cos(\nu)}$$

$$cos(E) = \frac{e+cos(\nu)}{1+e\ cos(\nu)}$$

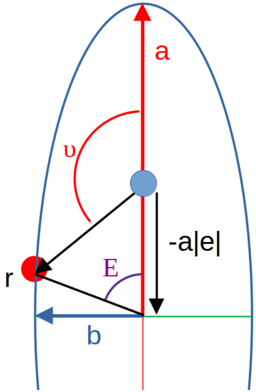


Рис.: Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы орбиты

Формулы для связи истинной и эксцентрической аномалии:

$$sin(\nu) = \frac{sin(E)\sqrt{1-e^2}}{1 - e\ cos(E)}$$

$$cos(\nu) = \frac{cos(E) - e}{1 - e\ cos(E)}$$

Иногда удобным является представление:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\ cos(E) + \boldsymbol{b}\ sin(E) - \boldsymbol{a}e$$

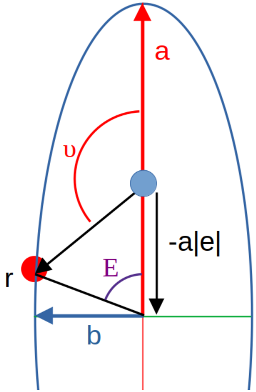


Рис.: Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы орбиты

Для аналитического решения задачи движения в точечном потенциале полезна средняя аномалия:

$$M = E - e\ sin(E)$$

Средняя аномалия при движении в точечном потенциале изменяется линейно:

$$\dot{M} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

Переход между от средней аномалии к эксцентрической осуществляется при помощи решения нелинейного уравнения методом Ньютона:

$$E - esin(E) - M = 0$$

$$E_{i+1} = E_i - \frac{E_i - e\ sin(E_i) - M}{1 - e\ cos(E_i)}$$

Для начального приближения следует выбирать $E_0 = M - e$, если $M > \pi$, иначе $E_0 = M + e$

Кеплеровы элементы орбиты

Введем **фокальный параметр** p:

$$p = a(1 - e^2)$$

и **аргумент истинной широты** u:

$$u = \omega + \nu$$

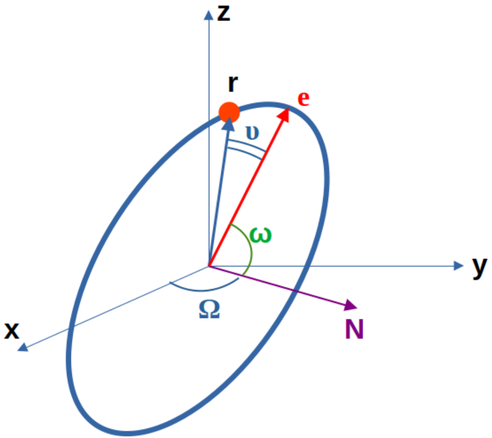


Рис.: Аргумент истинной широты

Кеплеровы элементы орбиты

Теперь займемся обратным переходом. В системе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{L}/|\mathbf{L}|$ радиус-вектор $\mathbf{r}$ имеет координаты:

$$\mathbf{r}_{per} = r\,(cos\nu,\ sin\nu,\ 0)^T = \frac{p}{1 + ecos\nu}(cos\nu,\ sin\nu,\ 0)^T$$

Скорость в этой системе имеет вид:

$$\mathbf{v}_{per} = (\dot{r}\ cos\nu - r\dot{\nu}\ sin\nu,\ \ \dot{r}\ sin\nu + r\dot{\nu}\ cos\nu,\ \ 0)^T$$

$$r\dot{\nu} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left(1 + e\ cos\nu\right), \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} e\ sin\nu$$

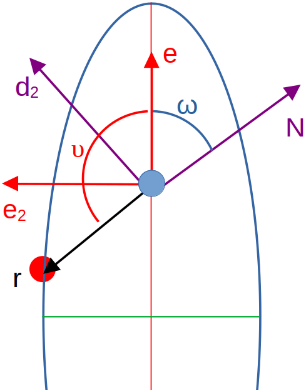


Рис.: Кеплеровы элементы орбиты

Кеплеровы элементы орбиты

Если подставить в формулу для скорости, то получим:

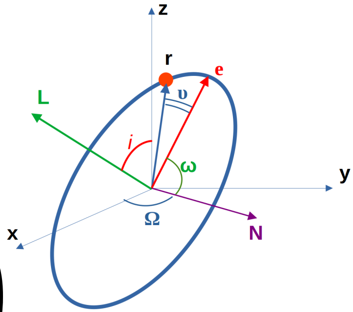
$$\mathbf{v}_{per} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left(-sin\nu,\ e + cos\nu,\ 0\right)^T$$

Теперь переведем положение и скорость в исходную систему:

$$Q = R_3(-\Omega)\ R_1(-i)\ R_3(-\omega)$$

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi & 0 \\ -sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},\ R_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & sin\phi \\ 0 & -sin\phi & cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = Q\mathbf{r}_{per},\quad \mathbf{v} = Q\mathbf{v}_{per}$$



Кеплеровы элементы орбиты

Введем орбитальную системы координат:

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$$
$$\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$$
$$\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{e}_r$$

Пусть $\boldsymbol{a}_{pet}$ - возмущающие ускорения:

$$\boldsymbol{a}_{pet} = \boldsymbol{a} + \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Обозначим компоненты возмущающего ускорения в орбитальной системе следующим образом:

$$f_r = \boldsymbol{a}_{pet} \cdot \boldsymbol{e}_r, \; f_t = \boldsymbol{a}_{pet} \cdot \boldsymbol{e}_t, \; f_n = \boldsymbol{a}_{pet} \cdot \boldsymbol{e}_n$$

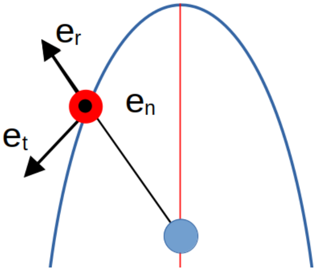


Рис.: Орбитальная система

Кеплеровы элементы орбиты

Уравнения движения в кеплеровых элементах выглядят следующим образом:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} \left(e\ sin(\nu) f_r + \frac{p}{r} f_t \right)$$

$$\dot{e} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(p\ sin(\nu) f_r + \left[(p + r) cos(\nu) + er \right] f_t \right)$$

$$\dot{i} = \frac{r\ cos(u)}{\sqrt{\mu p}} f_n$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r\ sin(u)}{\sqrt{\mu p}\ sin(i)} f_n$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{e\sqrt{\mu p}} \left[-p\ cos(\nu) f_r + (p + r) sin(\nu) f_t \right] - \frac{r\ cos(i)\ sin(u)}{\sqrt{\mu p}\ sin(i)} f_n$$

$$\dot{\nu} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{1}{e\ \sqrt{\mu p}} \left[p\ cos(\nu) f_r - (p + r)\ sin(\nu) f_t \right]$$

Кеплеровы элементы орбиты

Задание. Вывести уравнение для $\dot{M}$
Задание. Вывести конвертацию из кеплеровых параметров в $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$
Замечания по кеплеровым элементам:

- Кеплеровы элементы имеют вырождения: $i = 0, i = \pi, e = 0$
- Кеплеровы элементы не подходят для интегрирования из-за вырождений
- Интегрирование в элементах получается точнее, так как больший вклад притяжения Земли учитывается аналитически

Равноденственные элементы

Чтобы избавиться от вырождения вводится другой набор элементов - модифицированные равноденственные элементы.

Для нормальных орбит $i \leq \pi/2$:

$$
\begin{aligned}
p &= a(1-e^2)\\
f &= e\ cos(\Omega+\omega)\\
g &= e\ sin(\Omega+\omega)\\
h &= tg(i/2)cos(\Omega)\\
k &= tg(i/2)sin(\Omega)\\
L &= \Omega+\omega+\nu
\end{aligned}
$$

Для ретроградных орбит $i > \pi/2$:

$$
\begin{aligned}
p &= a(1-e^2)\\
f &= e\ cos(-\Omega+\omega)\\
g &= e\ sin(-\Omega+\omega)\\
h &= ctg(i/2)cos(\Omega)\\
k &= ctg(i/2)sin(\Omega)\\
L &= -\Omega+\omega+\nu
\end{aligned}
$$

Равноденственные элементы

Для нормальных орбит уравнения выглядят следующим образом:

$$w = 1 + f\ cos(L) + g\ sin(L),\ s^2 = 1 + h^2 + k^2$$

$$\dot{f} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[f_r sin(L) + \{f + [w+1]cos(L)\}\frac{f_t}{w} - (h\ sin(L) - k\ cos(L))\frac{g\ f_n}{w}\right]$$

$$\dot{g} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-f_r cos(L) + \{g + [w+1]sin(L)\}\frac{f_t}{w} + (h\ sin(L) - k\ cos(L))\frac{f\ f_n}{w}\right]$$

$$\dot{h} = -\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{s^2 f_n}{2w}cos(L),\quad \dot{k} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{s^2 f_n}{2w}sin(L),\quad \dot{p} = \frac{2p}{w}\sqrt{\frac{p}{\mu}}f_t$$

$$\dot{L} = \sqrt{\mu\ p}\,(w/p)^2 - \sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{f_n}{w}\{h\ sin(L) - k\ cos(L)\}$$

Задание. Вывести уравнение движения для ретроградных орбит.

Идеальные элементы

Рассмотрим систему уравнений, описывающую орбитальное движение аппарата:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v},$$
$$\dot{\mathbf{v}} = -\left(\frac{\mu}{r^3}\right)\mathbf{r} + \mathbf{f}$$

Орбитальная система координат:

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$$
$$\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$$
$$\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{e}_r$$

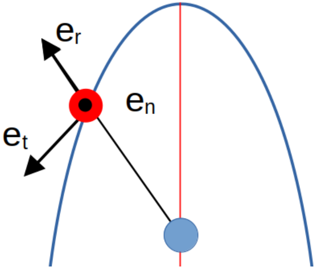


Рис.: Орбитальная система

Идеальные элементы

Дифференцируя выражения для базисных векторов можно получить следующее

$$\dot{\boldsymbol{e}}_n = -\frac{r}{L} f_n \boldsymbol{e}_t,$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \frac{L}{r^2} \boldsymbol{e}_t,$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_t = -\frac{L}{r^2} \boldsymbol{e}_t + \frac{r}{L} f_n \boldsymbol{e}_n.$$

С другой стороны эволюцию можно представить как вращение

$$\dot{\boldsymbol{e}}_n = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_n,$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_r,$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_t = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_t.$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{L}{r^2} \boldsymbol{e}_n + \frac{r}{L} f_n \boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{\omega}_K = \frac{L}{r^2} \boldsymbol{e}_n,\ \boldsymbol{\omega}_I = \frac{r}{L} f_n \boldsymbol{e}_r,\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_K + \boldsymbol{\omega}_I$$

Идеальные элементы

- Система, эволюция которой относительно неподвижной описывается вращением с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_I = r/L f_n \boldsymbol{e}_r$, называется **идеальной системой**. Обозначение $(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{y}_I, \boldsymbol{z}_I)$.
- Навзание происходит из того, что в ней движение орбитальной системы описывается угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_K = L/r^2 \boldsymbol{e}_n$, которая не зависит от возмущений.

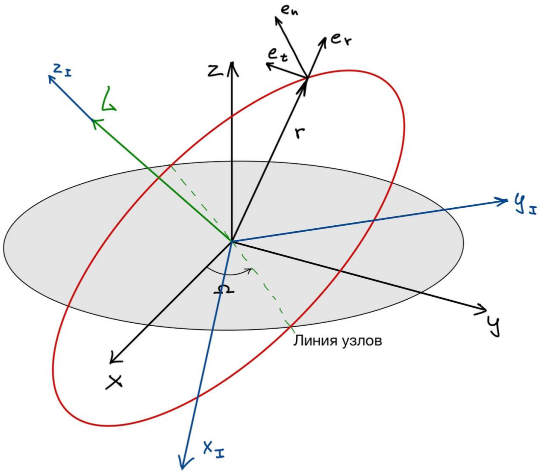


Рис.: Идеальная система обозначена синим

Идеальные элементы

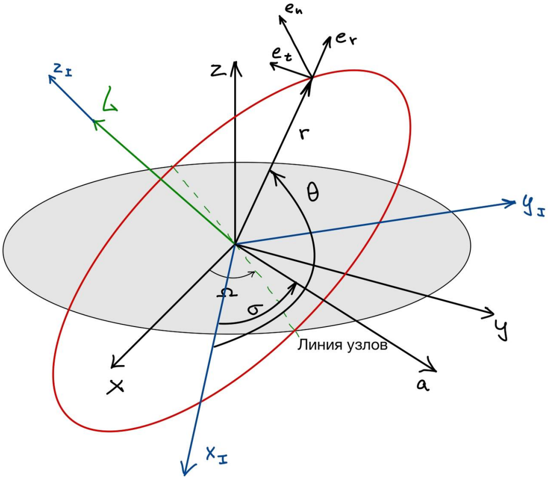
Определим следующие величины:

$$\cos\sigma = \boldsymbol{x}_I \cdot \boldsymbol{a}$$

здесь a - нормированный вектор Лапласа

$$C = \frac{\mu e}{L}\cos\sigma$$
$$S = \frac{\mu e}{L}\sin\sigma$$
$$\cos\theta = \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{x}_I$$
$$Q = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ -}$$

кватернион перехода из неподвижной системы в идеальную



Идеальные элементы. Уравнения движения

$$2\dot{\lambda}_1 = f_n(\lambda_0 u - \lambda_3 v)$$
$$2\dot{\lambda}_2 = f_n(\lambda_0 v + \lambda_3 u)$$
$$2\dot{\lambda}_3 = f_n(\lambda_0 v - \lambda_2 u)$$
$$2\dot{\lambda}_0 = f_n(-\lambda_1 u - \lambda_2 v)$$
$$u = r/L\cos\theta \;\; v = r/L\sin\theta$$
$$r = \frac{L}{\mu/L + C\cos\theta + S\sin\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{r^2}$$
$$\dot{C} = f_r\sin\theta + f_t(1 + \frac{r}{p})\cos\theta$$
$$\dot{S} = -f_r\cos\theta + f_t(1 + \frac{r}{p})\sin\theta$$
$$\dot{L} = rf_t$$
$$p = \frac{L^2}{\mu}$$

Идеальные элементы. Замечания

- По сути σ, θ - это аналоги аргумента перицентра и аргумента широты соответственно для соприкасающегося эллипса в идеальной системе, а C, S есть масштабированные координаты вектора эксцентриситета. Таким образом, однозначно задается положение объекта в идеальной системе.
- Начальное положение идеальной системы относительно неподвижной не фиксировано, так как её движениие задается кинематическим соотношением. Можно выбирать любую начальную ориентацию.
- При более детальном рассмотрении оказывается, что можно модифицировать переменные таким образом, что независимых уравнения остается всего 7. Подробнее в "Note on the ideal frame formulation"(Lara, 2017)

Методы интегрирования

Вернемся к рассмотрению задачи Коши:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$$
$$\boldsymbol{y}(t_0) = y_0$$

Существует 2 классификации численных методов. По расположению используемых значений функции и правой части:

- Одношаговые методы
  1. Используют значения функции и правой части только внутри одного шага
  2. Легко изменяют шаг
- Многошаговые методы
  1. Используют значения функции и правой части с предыдущих шагов
  2. Тяжело менять шаг
  3. Требуется разгон метода вначале интегрирования

Методы интегрирования

По необходимости решения решения нелинейных уравнений

- Явные методы. Решение нелинейных уравнений не требуется
- Неявные методы. Требуется рещение нелинейных уравнений

Наиболее часто используемые методы:

1. Метод Рунге-Кутты 4 порядка
2. Методы Дорманда-Принца 4(5) и 7(8)
3. Методы Эверхарта
4. Метод Гаусса-Джексона

Методы Рунге-Кутты

Методы Рунге-Кутты являются одношаговыми методами. Интегрирование на одном шаге h осуществляется по следующей схеме:

$$\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}\left(t + c_i h, y_j + h\sum_{n=1}^{s} a_{in}\boldsymbol{k}_n\right), \quad i = \overline{1, s}$$

$$\boldsymbol{y}_{j+1} = \boldsymbol{y}_i + h\sum_{n=0}^{s} b_n\boldsymbol{k}_n$$

В общем случае методы Рунге-Кутты требуют решения нелинейной системы уравнений

Коэффициенты довольно удобно задавать при помощи таблицы Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & \dots & a_{2s} \\ & & & \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

Если верхнедиагональная часть матрицы нулевая, то метод является явным и не требует рещения нелинейных уравнений.

Методы Рунге-Кутты

Преимущество явных методов становится несущественным из-за барьеров Бутчера. С увеличением порядка аппроксимации p стремительно растет количество вычислений функции правой части s:

p	1	2	3	4	5	6	7	8
s_{min}	1	2	3	4	6	7	9	11

Первый барьер Бутчера $p = 4$, второй барьер Бутчера $p = 7$, теретий барьер Бутчера $p = 8$

При использовании неявных методов количество вычислений правой части не равно s (нелинейная система). Однако порядок неявных методов может быть существенно выше s, а именно $2s$ или $2s - 1$ (более удобно на практике)

p	3	5	7	9	11
s	2	3	4	5	6
$eval.$	2-3	4-6	6-9	8-12	10-15

$eval.$ - количество вычислений правой части за шаг

Методы Рунге-Кутты

Как выбирать шаг интегрирования?
Универсальный метод - **правило Рунге**.
Пусть интегрирование ведется с порядком p, $\boldsymbol{y}^h$ - результат интегрирования с шагом h, а $\boldsymbol{y}^{h/2}$ - результат шагом $h/2$

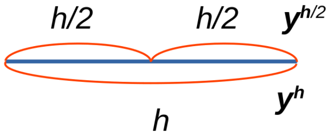


Рис.: Правило Рунге

Тогда ошибка интегрирования:

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{y}^{h/2} - \boldsymbol{y}^h}{2^p - 1}$$

Если задана точность интегрирования tol, то шаг можно выбирать по формуле

$$h_{new} = h \sqrt[p]{\frac{tol}{\|\boldsymbol{e}\|}}$$

При этом можно воспользоваться **экстраполяцией Ричардсона** для увеличения порядка метода на 1:

$$\boldsymbol{y}^{h/2} + \frac{\boldsymbol{y}^{h/2} - \boldsymbol{y}^h}{2^p - 1}$$

Классический метод Рунге-Кутты

Классический метод Рунге-Кутты имеет порядок аппроксимации $p = 4$ и стадийность $s = 4$. Таблица Бутчера метода:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6
\end{array}
$$

Рассчетные формулы:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{f}(t_i, \boldsymbol{y}_i) \\
\boldsymbol{k}_2 &= \boldsymbol{f}(t_i + h/2, \boldsymbol{y}_i + h\ \boldsymbol{k}_1/2) \\
\boldsymbol{k}_3 &= \boldsymbol{f}(t_i + h/2, \boldsymbol{y}_i + h\ \boldsymbol{k}_2/2) \\
\boldsymbol{k}_4 &= \boldsymbol{f}(t_i + h, \boldsymbol{y}_i + h\ \boldsymbol{k}_3) \\
\boldsymbol{y}_{i+1} &= \boldsymbol{y}_i + (\boldsymbol{k}_1 + 2(\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3) + \boldsymbol{k}_4)/6
\end{aligned}
$$

При использовании правила Рунге и экстраполяции Ричардсона порядок увеличивается до $p = 5$, а количество вычислений правой части до 12

Вложенные методы

Вложенные методы имеют еще одну строку в таблице Бутчера:

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & \dots & 0 \\
c_2 & a_{21} & \dots & 0 \\
 & & & \\
c_s & a_{s1} & \dots & 0 \\
\hline
 & b_1 & \dots & b_s \\
 & b_1^* & \dots & b_s^*
\end{array}
$$

Подсчет векторов $\boldsymbol{k}$ аналогичен обычным методам Рунге-Кутты:

$$\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{f}\left(t + c_i h,\ y_j + h\sum_{n=1}^{s} a_{in}\boldsymbol{k}_n\right),\ i = \overline{1, s}$$

После вычисления коэффициентов $\boldsymbol{k}$ вычисляется ошибка:

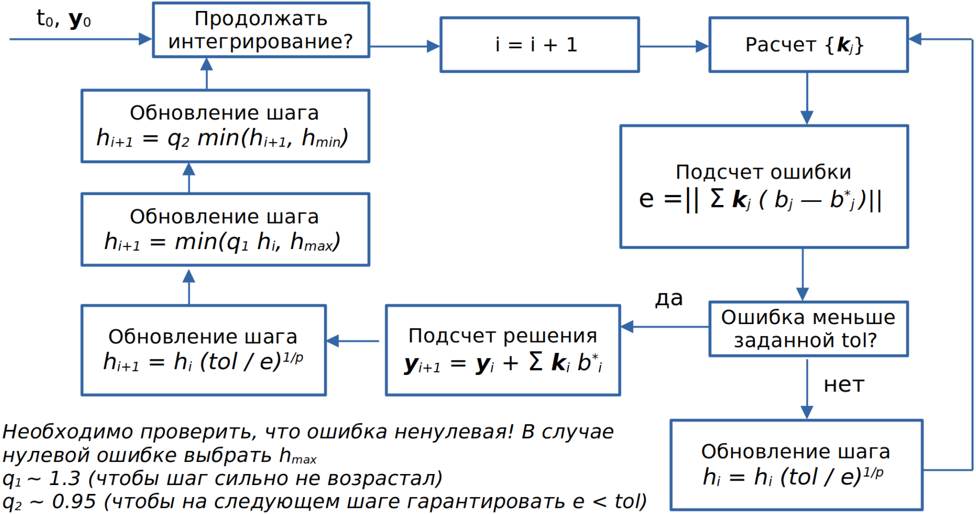
$$\boldsymbol{e} = \sum_{n=1}^{s}(b_n - b_n^*)\boldsymbol{k}_n$$

Если норма ошибки $\|\boldsymbol{e}\|$ меньше заданной, то оценивается длина следующего шага и решение на этом шаге:

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + h\sum_{n=1}^{s} b_n^*\boldsymbol{k}_n,\ \ h_{new} = h\ \sqrt[p]{tol/\|\boldsymbol{e}\|}$$

Иначе изменяется шаг и итерация повторяется вновь

Вложенные методы



Необходимо проверить, что ошибка ненулевая! В случае нулевой ошибке выбрать h_{max}
$q_1 \sim 1.3$ (чтобы шаг сильно не возрастал)
$q_2 \sim 0.95$ (чтобы на следующем шаге гарантировать $e < tol$)

Вложенные методы

Замечания:

- Метод Дорманда-Принца 5 порядка точности имеет стадийность 7, а метод Рунге-Кутты с экстраполяцией Ричардсона 12.
- Оценка ошибки строго не гарантирует, что на каждом шаге ошибка будет меньше заданной tol. Однако подбор шага гаратирует, что на каждом шаге ошибка будет одинаковой - важно для эллиптических орбит.