Отчёт по лабораторной работе №4

дисциплина: Математическое моделирование

Рыбалко Элина Павловна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

Цель работы

Рассмотреть модель линейного гармонического осциллятора, построить фазовые портреты гармонического осциллятора и решенить уравнения гармонического осциллятора.

Объект исследования

Моедль линейного гармонического осциллятора.

Предмет исследования

Задачи о моделе гармонических колебаний.

Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$x'' + 2\gamma x' + w_0^2 x = 0$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), w_0 – собственная частота колебаний, t – время.

Предыдущее уравнение - линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени: $x'' + w_0^2 x = 0$.

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия $x(t_0) = x_0$ и $x'(t_0) = y_0$.

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -w_0^2 x \end{cases}$$

и тогда начальные условия примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

[1]

Задание

1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания.
2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.
3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внешняя сила, построить его решение. Построить фазовый портрет колебаний с действием внешней силы.

Выполнение лабораторной работы

1. Постановка задачи

[Вариант 22]

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $x'' + 10x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $x'' + 1.5x' + 3x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $x'' + 0.6x' + x = cos(1.5t)$

На интервале t = [0;62] (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0.8, y_0 = -1$

2. Построение графиков

2.1. Листинги программ в OpenModelica

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $x'' + 10x = 0$

Программа для первого случая.

```
model lab04_1
//Параметры осциллятора
//x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
//w - частота
//g - затухание
  parameter Real w = sqrt(10.00); // 3; 1.00
  parameter Real g = 0.00; // 1.5; 0.6

  parameter Real x0 = 0.8;
  parameter Real y0 = -1;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);

//правая часть уравнения f(t)
function f
  input Real t;
  output Real res;
algorithm
  res := 0; //1 и 2 случай
  // res := cos(1.5*t); // 3 случай
end f;

equation
  der(x) = y;
  der(y) = -w*w*x - g*y - f(time);

end lab04_1;
```

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $x'' + 1.5x' + 3x = 0$

```
model lab04_2
//Параметры осциллятора
//x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
//w - частота
//g - затухание
  parameter Real w = sqrt(3.00); // 1.00
  parameter Real g = 1.5; // 0.6

  parameter Real x0 = 0.8;
  parameter Real y0 = -1;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);

//правая часть уравнения f(t)
function f
  input Real t;
  output Real res;
algorithm
  res := 0; //1 и 2 случай
  // res := cos(1.5*t); // 3 случай
end f;

equation
  der(x) = y;
  der(y) = -w*w*x - g*y - f(time);
```

```
end lab04_2;
```

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $x'' + 0.6x' + x = cos(1.5t)$

```
model lab04_3
//Параметры осциллятора
//x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
//w - частота
//g - затухание
  parameter Real w = sqrt(1.00);
  parameter Real g = 0.6;

  parameter Real x0 = 0.8;
  parameter Real y0 = -1;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);

//правая часть уравнения f(t)
function f
  input Real t;
  output Real res;
algorithm
  res := cos(1.5*t);
end f;

equation
  der(x) = y;
  der(y) = -w*w*x - g*y - f(time);
```

```
end lab04_3;
```

2.2. Полученные графики

После запуска кода программы получили следующие графики для первого и второго случая соответственно (см. рис. -@fig:001, -@fig:002 и -@fig:003).

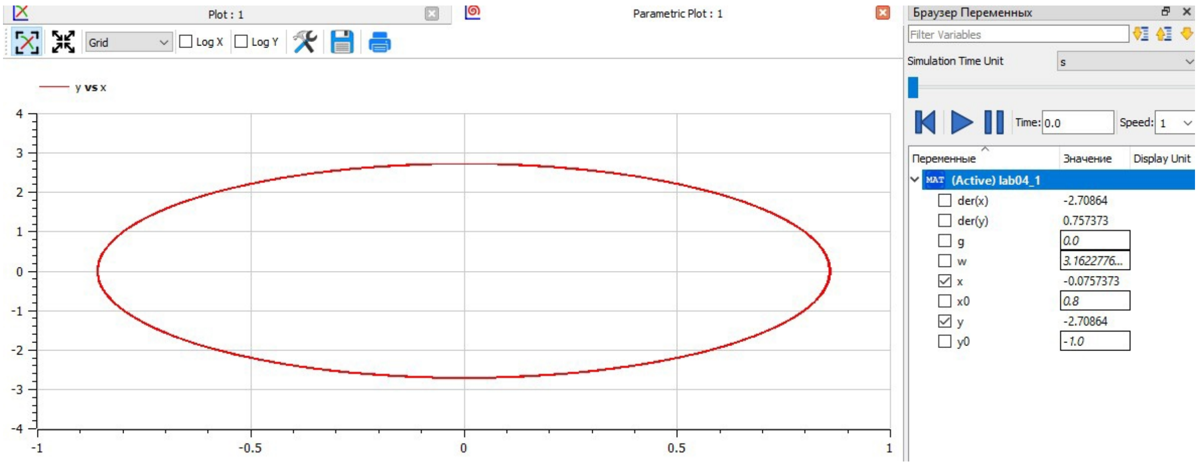

Рис. 1: Фазовый портрет гармонического осциллятора для первого случая без затухания и внешних сил

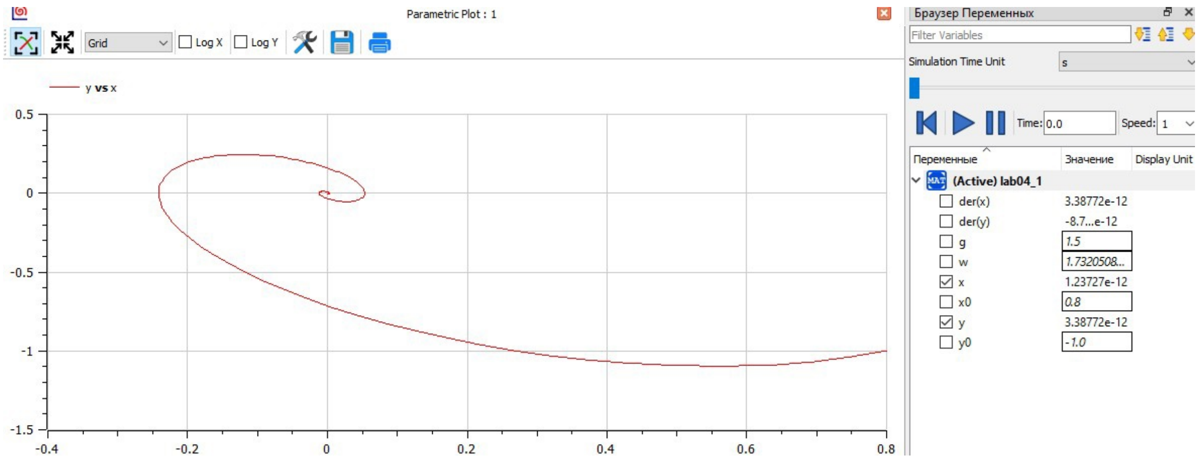

Рис. 2: Фазовый портрет гармонического осциллятора для второго случая с затуханием

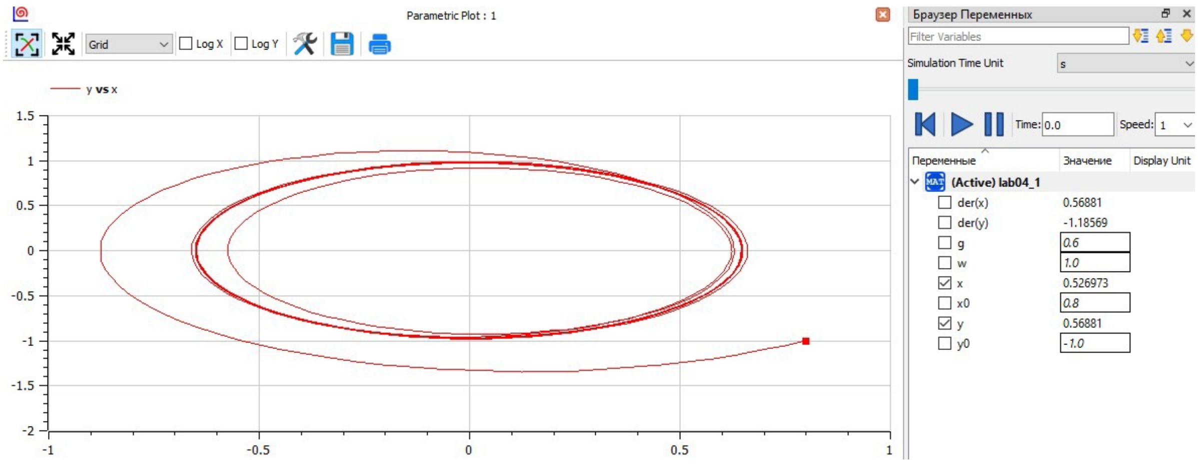

Рис. 3: Фазовый портрет гармонического осциллятора для третьего случая с затуханием и внешней силой

2.3. Анализ результатов:

Как можно заметить из рис. -@fig:001 из-за отсутствия затухания график зацикленный. В двух остальных случая график изменятся благодаря затуханию (см.рис. -@fig:002), а также благодаря воздействию внешних сил (см.рис. -@fig:003).

Вопросы к лабораторной работе

1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний.

$x'' + 2\gamma x' + w_0^2 x = 0$ Или же при отсутствии затухания $x'' + w_0^2 x = 0$

2. Дайте определение осциллятора.

Осциллятор - это модель, в качестве которой выступает дифференциальное уравнение, описывающего движение чего-либо (грузика на пружинке, маятника, заряда и т.д.) или эволюцию во времени многих систем при определённых предположения в теории колебаний.

3. Запишите модель математического маятника.

$x'' + 2\gamma x' + w_0^2 x = 0$

4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка.

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -w_0^2 x \end{cases}$$

и тогда начальные условия примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовая траектория - это гладкая кривая в фазовой плоскости, отвечающая решению уравнения движения как функции времении. Фазовый портрет - это набор фазовых траекторий или же множество различных решений на одной фазовой плоскости.

Вывод

Рассмотрели модель линейного гармонического осциллятора, построили фазовый портреты гармонического осциллятора и решенили уравнения гармонического осциллятора.

Список литературы

1. Модель гармонических колебаний
2. Руководство по формуле Cmd Markdown
3. Математическое моделирование при решении задач
4. С.В. Каштаева, Математическое моделирование / Учебное пособие
5. Руководство по оформлению Markdown файлов