

# **Отчёт по лабораторной работе №6**

**дисциплина: Математическое моделирование**

Рыбалко Элина Павловна

# Содержание

<b>Цель работы</b>	<b>5</b>
Объект исследования . . . . .	5
Предмет исследования . . . . .	5
<b>Теоретическое введение</b>	<b>6</b>
<b>Задание</b>	<b>8</b>
<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>9</b>
1. Постановка задачи . . . . .	9
2. Построение графиков . . . . .	9
2.1. Листинги программ в OpenModelica . . . . .	9
2.2. Полученный график . . . . .	10
2.4. Анализ результатов: . . . . .	12
<b>Вывод</b>	<b>13</b>
<b>Список литературы</b>	<b>14</b>

## Список иллюстраций

1	Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае с параметром $S$ . . . . .	11
2	Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае 1	11
3	Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае 2	12

## **Список таблиц**

# **Цель работы**

Рассмотреть простейшую модель эпидемии.

## **Объект исследования**

Модель эпидемии.

## **Предмет исследования**

Алгоритм решения задачи об эпидемии.

# Теоретическое введение

Предположим, что некая популяция, состоящая из  $N$  особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через  $S(t)$ . Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их  $I(t)$ . А третья группа, обозначающаяся через  $R(t)$  – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения  $I^*$ , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда  $I(t) > I^*$ , тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа  $S(t)$  меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -aS, I(t) > I^* \\ 0, I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} aS - bI, I(t) > I^* \\ -bI, I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = bI$$

Постоянные пропорциональности  $a, b$  - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени  $t = 0$  нет особей с иммунитетом к болезни  $R(0) = 0$ , а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей  $I(0)$  и  $S(0)$  соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая:  $I(0) \leq I^*$  и  $I(0) > I^*$ . [1]

# Задание

Придумайте свой пример задачи об эпидемии, задайте начальные условия и коэффициенты пропорциональности. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

- 1) Если  $I(0) \leq I^*$
- 2) Если  $I(0) > I^*$



# Выполнение лабораторной работы

## 1. Постановка задачи

[Вариант 22]

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ( $N = 10800$ ) в момент начала эпидемии ( $t = 0$ ) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции)  $I(0) = 208$ , А число здоровых людей с иммунитетом к болезни  $R(0) = 41$ . Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени  $S(0) = N - I(0) - R(0)$ . Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

- 1) Если  $I(0) \leq I^*$
- 2) Если  $I(0) > I^*$

## 2. Построение графиков

### 2.1. Листинги программ в OpenModelica

1. Написала программу на Modelica (с интервалом времени от 0 до 200 и шагом 0.01):

Программа:

```

model lab06

  parameter Real a = 0.01; // коэффициент заболеваемости
  parameter Real b = 0.02; //коэффициент выздоровления
  parameter Real N = 10800; // общая численность популяции
  parameter Real I0 = 208; // количество инфицированных особей в начальный момент
  parameter Real S0 = N - I0 - R0; // количество восприимчивых к болезни особей
  parameter Real R0 = 41; // количество здоровых особей с иммунитетом в начальный момент

  Real S(start=S0); // количество инфицированных особей в начальный момент времени
  Real I(start=I0); // количество восприимчивых к болезни особей в начальный момент
  Real R(start=R0); // количество здоровых особей с иммунитетом в начальный момент

equation

  // случай, когда  $I(0) \leq I^*$ 
  der(S) = 0;
  der(I) = -b*I;
  der(R) = b*I;

  /* случай, когда  $I(0) > I^*$ 
  der(S) = -a*S;
  der(I) = a*S-b*I;
  der(R) = b*I;*/

end lab06;

```

## 2.2. Полученный график

После запуска кода программы получили следующие графики для первого и второго случая соответственно (см. рис. -@fig:001, -@fig:002 и -@fig:003).

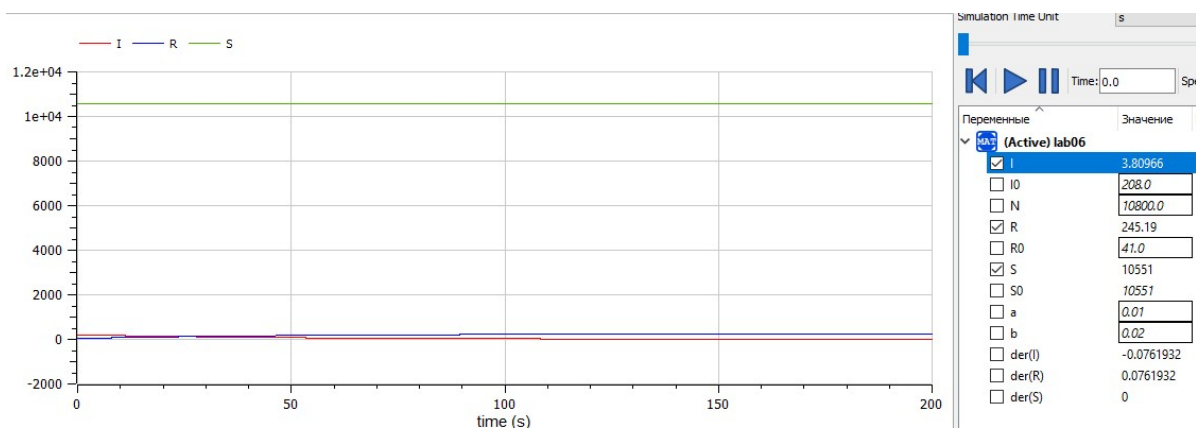


Рис. 1: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае с параметром S

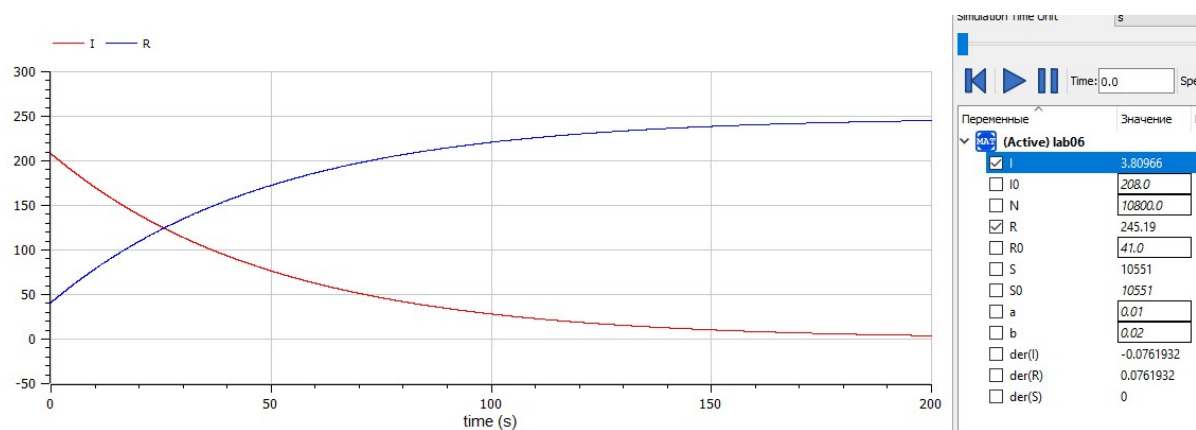


Рис. 2: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае 1

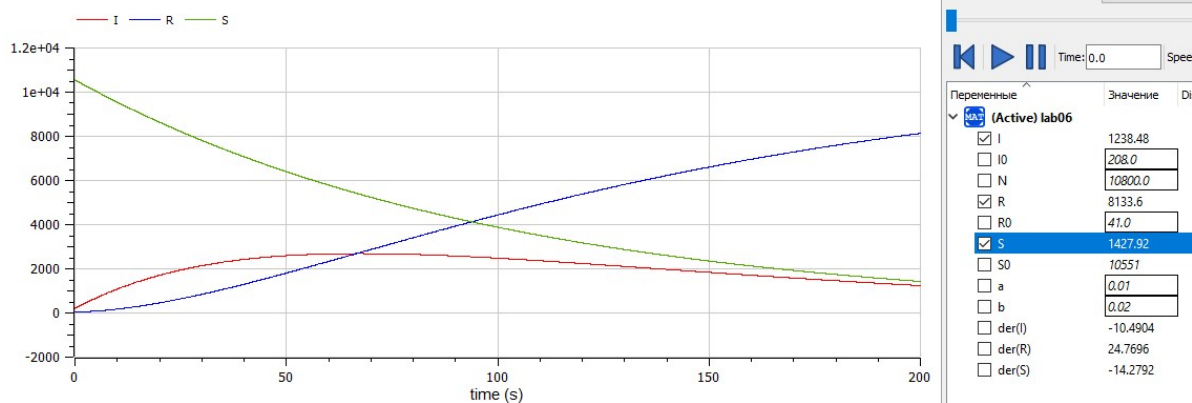


Рис. 3: Динамика изменения числа людей в каждой из трех групп в случае 2

## 2.4. Анализ результатов:

Как можно заметить из рис. -@fig:001 и -@fig:002 количество инфицированных  $I$  уменьшается со временем, а количество особей с иммунитетом  $R$  возрастает по мере преодоления эпидемии. Во втором случае (см. рис. -@fig:003) при количестве инфицированных  $I$  больше критического значения, сначала возрастает число инфицированных, но затем идёт на спад. Соответственно, по мере уменьшения инфицированных увеличивается число с иммунитетом и уменьшается число особей, восприимчивых к болезни.

# Вывод

Рассмотрели простейшую модель эпидемии.

# Список литературы

1. Задача об эпидемии
2. Руководство по формуле Cmd Markdown
3. Математическое моделирование при решении задач
4. С.В. Каштаева, Математическое моделирование / Учебное пособие
5. Руководство по оформлению Markdown файлов