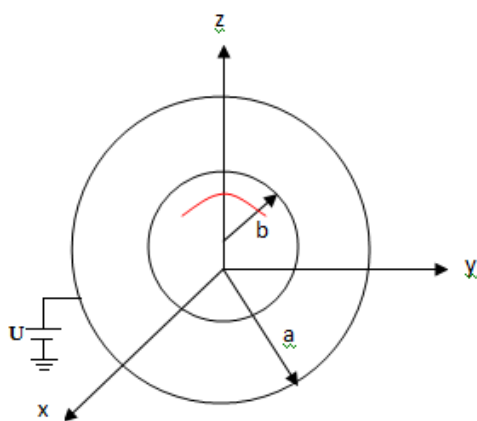


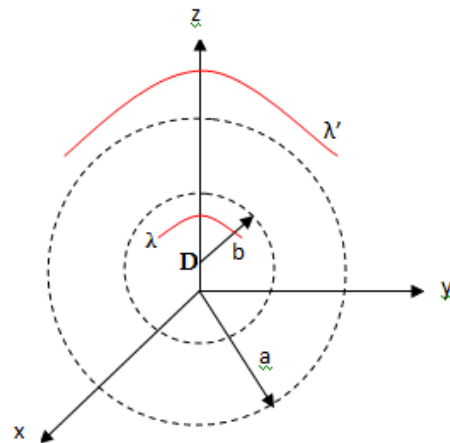
# Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Β

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

### Άσκηση 6:



Σχήμα Α



Σχήμα Β

(α) Εύρεση Δυναμικού Πεδίου:

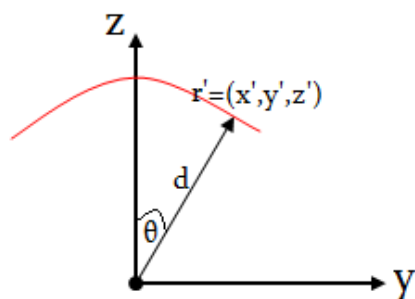
Χρησιμοποιώντας την θεωρία του κατοπτρισμού σχηματίζουμε το είδωλο της γραμμικής πυκνότητας, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Για το τυχαίο σημείο  $\Sigma(x,y,z)$ :

Έστω  $\mathbf{r}$  το διάνυσμα από την αρχή των αξόνων έως το τυχαίο σημείο  $\Sigma$  και έστω  $\mathbf{r}'$  το διάνυσμα από την αρχή των αξόνων μέχρι το  $dS(x',y',z')$ , το οποίο αποτελεί μικροσκοπικό κομμάτι της γραμμικής πυκνότητας  $\lambda$ .

Ορίζω  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  με  $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$  και  $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}_x + d\sin\theta\mathbf{i}_y + (D + d\cos\theta)\mathbf{i}_z$ .

Τα παραπάνω προέκυψαν ως εξής: (Μεγεθύνοντας την επιφάνεια παρατηρούμε)



$$r=d, \cos\theta=z'/d, \sin\theta=y'/d$$

$$\text{Άρα } R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [x^2 + (y - d\sin\theta)^2 + (z - d\cos\theta - D)^2]^{1/2}$$

Για τον υπολογισμό του  $R_{\lambda'}$  πράττουμε αντίστοιχα και έτσι προκύπτει:

$$R_{\lambda'} = |r_{\lambda'} - r'| = [x^2 + (y - d' \sin \theta)^2 + (z - d' \cos \theta - D)^2]^{1/2}$$

Για την Περιοχή 1: Πληκτρολογήστε την εξίσωση εδώ.

Για την εύρεση του δυναμικού εφαρμόζουμε την μέθοδο της επαλληλίας:

- Το δυναμικό του  $\lambda$  είναι:  $\Phi_{\lambda}(x, y, z) =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4 * \pi * \epsilon_0} \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \frac{dq}{R - R_0} \\ & \frac{1}{4 * \pi * \epsilon_0} \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \frac{\lambda * dl}{R} \\ & \frac{1}{4 * \pi * \epsilon_0} \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \frac{\lambda * d * d\varphi}{R} \\ & \frac{\lambda * d}{4 * \pi * \epsilon_0} \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{[x^2 + (y - d * \sin \theta)^2 + (z - d * \cos \theta - D)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

, όπου  $\theta_{max} = L/d$

- Το δυναμικό του  $\lambda'$  είναι:  $\Phi_{\lambda'}(x, y, z) =$

$$\frac{\lambda * d}{4 * \pi * \epsilon_0} \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{[x^2 + (y - d' * \sin \theta)^2 + (z - d' * \cos \theta - D)^2]^{1/2}}$$

- Υπάρχει φυσικά και η επίδραση του ίδιου του πεδίου  $U$ .

Για την εύρεση του  $\lambda'$  και του  $d'$  χρησιμοποιούμε Απολλώνιους κύκλους και έχουμε ότι:

$$d' = \frac{b^2}{d} \text{ και } \lambda' = \frac{-b * \lambda}{d}$$

Άρα το δυναμικό στην περιοχή 1, δηλαδή για  $r_p = [x^2 + y^2 + (z - D)^2]^{1/2} \leq b$  είναι:

$$\Phi_1(x,y,z)=\frac{\lambda*d}{4*\pi*e0}\int_{-\theta max}^{\theta max}\frac{d\theta}{[x^2+(y-d*\sin\theta)^2+(z-d*\cos\theta-D)^2]^{1/2}}+\frac{\lambda*d}{4*\pi*e0}\int_{-\theta max}^{\theta max}\frac{d\theta}{[x^2+(y-d'*\sin\theta)^2+(z-d'*\cos\theta-D)^2]^{1/2}}+U$$

Για την περιοχή 2:

Επειδή η σφαίρα είναι αγωγίμη και ο όγκος της είναι ισοδυναμικός:  $\Phi_2(x,y,z)=U$ ,  $r_p \geq b$  και  $r_p \leq a$ .

Για την περιοχή 3:

$$\Phi_3(x,y,z)=\frac{U*a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad r \geq a$$

(β) Εύρεση του Ηλεκτρικού Πεδίου:

Θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση  $E = -\nabla*\Phi$

Ύστερα από πράξεις, τις οποίες παραθέτω στο pdf – αρχείο προκύπτει:

Για την περιοχή 1,  $r_p=[x^2+y^2+(z-D)^2]^{1/2} \leq b$  :

$$E_1(x,y,z)=\frac{\lambda*d}{4*\pi*e0}\int_{-\theta max}^{\theta max}\frac{(xix+(y-d*\sin\theta)iy+(z-D-d*\cos\theta)iz)*d\theta}{[x^2+(y-d*\sin\theta)^2+(z-d*\cos\theta-D)^2]^{3/2}}+\frac{\lambda*d}{4*\pi*e0}\int_{-\theta max}^{\theta max}\frac{(xix+(y-d'*\sin\theta)iy+(z-D-d'*\cos\theta)iz)*d\theta}{[x^2+(y-d'*\sin\theta)^2+(z-d'*\cos\theta-D)^2]^{3/2}}$$

Για την περιοχή 2:

$$E_2(x,y,z)=0, \quad r_p \geq b \text{ και } r_p \leq a$$

Για την περιοχή 3:

$$E_3(x,y,z)=\frac{U*a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}*(xi_x+y\dot{i}_y+z\dot{i}_z), \quad r \geq a$$

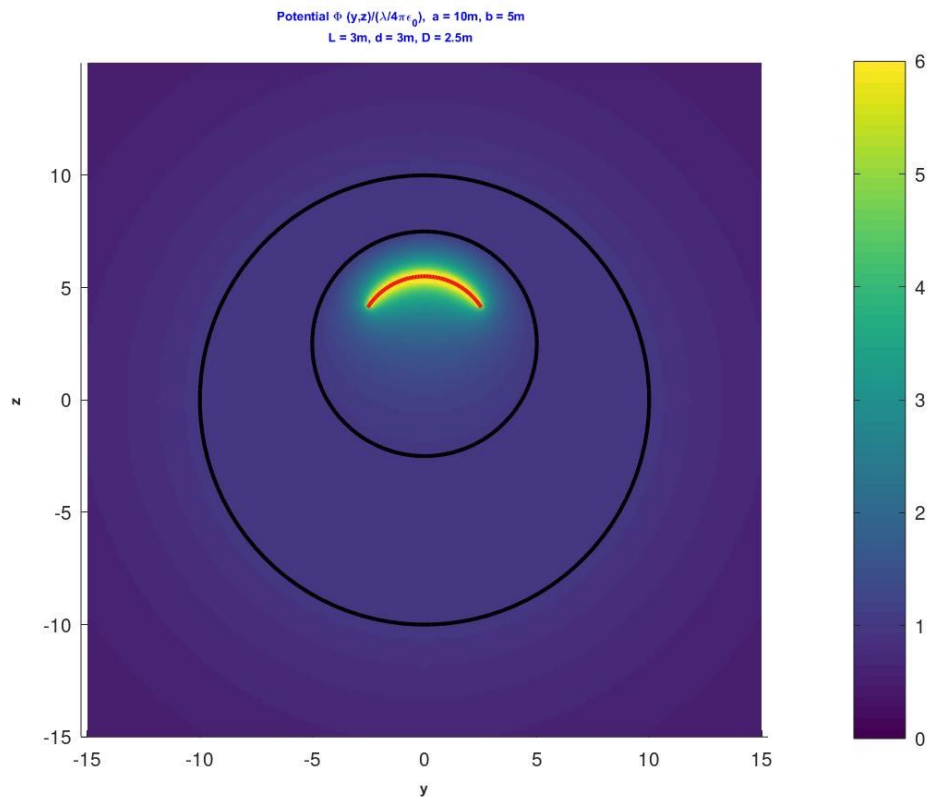
(ε) Εύρεση επαγόμενης επιφανειακής πυκνότητας φορτίου πάνω στο επίπεδο yz στο σύνορο της σφαιρικής κοιλότητας με την αγωγίμη σφαίρα:

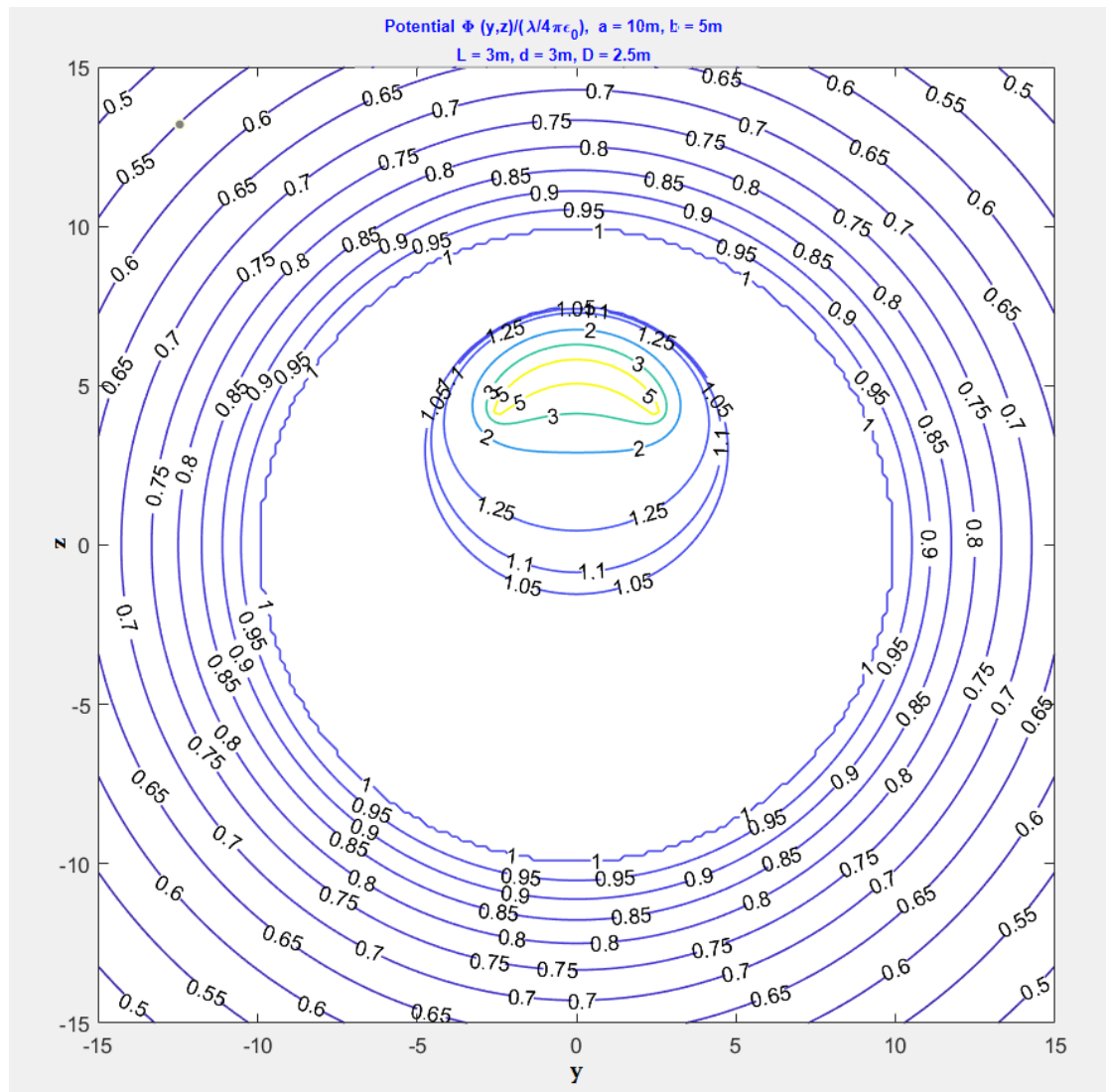
Θέλουμε μόνο για  $\theta=\pi/2$  και για  $\chi=0$ , γιατί θέλω να υπολογίσω το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς στο σύνορο της κοιλότητας και της αγωγίμης σφαίρας. Χρησιμοποιούμε την οριακή συνθήκη για την κάθετη συνιστώσα του D:  $D=i_n(D_2-D_1)$

$$\sigma(\theta, \phi=\pi/2) = -\epsilon_0 (y^* E_y(y, z) + (z-D)^* E_z(y, z)),$$

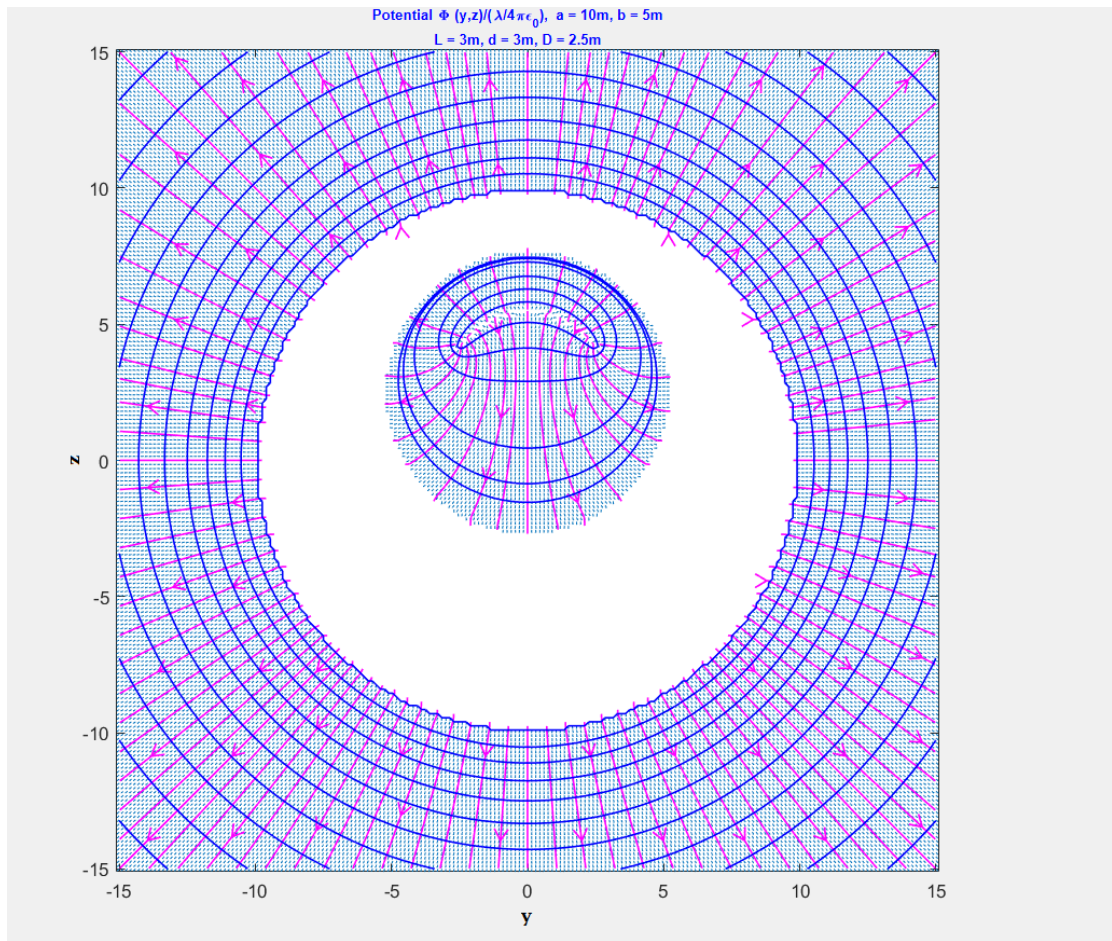
όπου  $E_y$  η y-συνιστώσα και  $E_z$  η z – συνιστώσα. (Αναλυτικά ο τύπος και οι πράξεις για να προκύψει βρίσκονται στο pdf-αρχείο).

Τα ερωτήματα (γ) και (δ) απαντώνται παρακάτω:

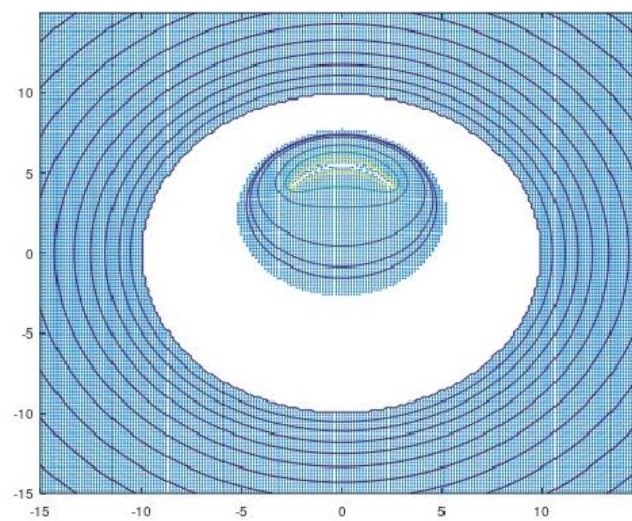


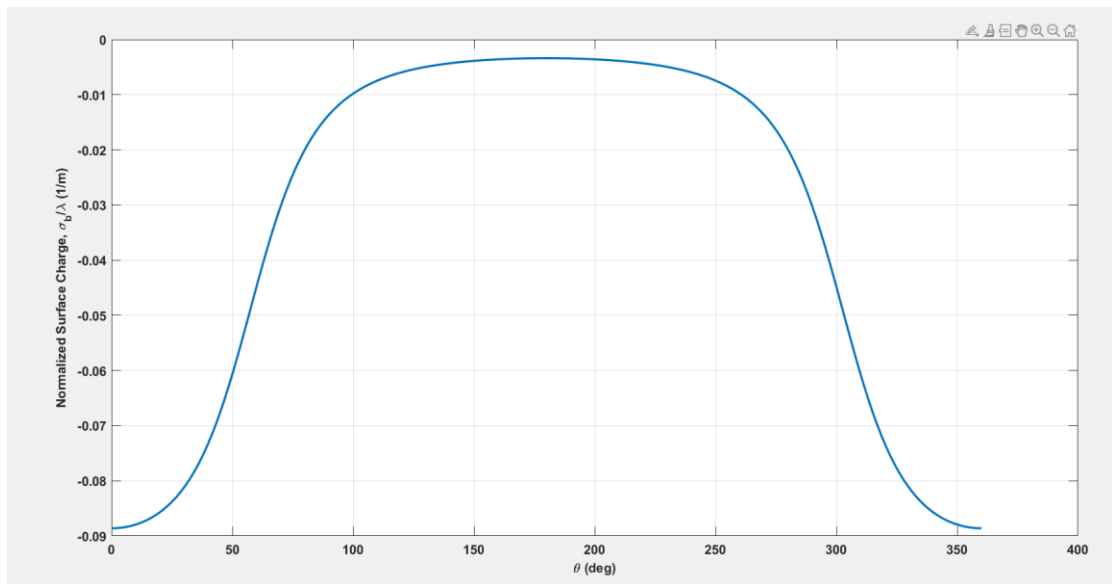


Σχήμα 1:[Θέμα 1α] Δυναμικό εντός και εκτός της κοιλότητας.



Σχήμα 2:[Θέμα 1β] Το ηλεκτρικό πεδίο εντός και εκτός της κοιλότητας.





Σχήμα 3:[Θέμα 1γ] Η επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην εσωτερική επιφάνεια της αγωγίμης σφαίρας

Και ο κώδικας στην Octave βρίσκεται παρακάτω: