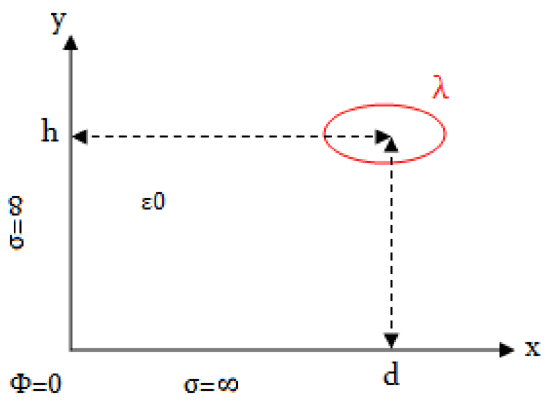
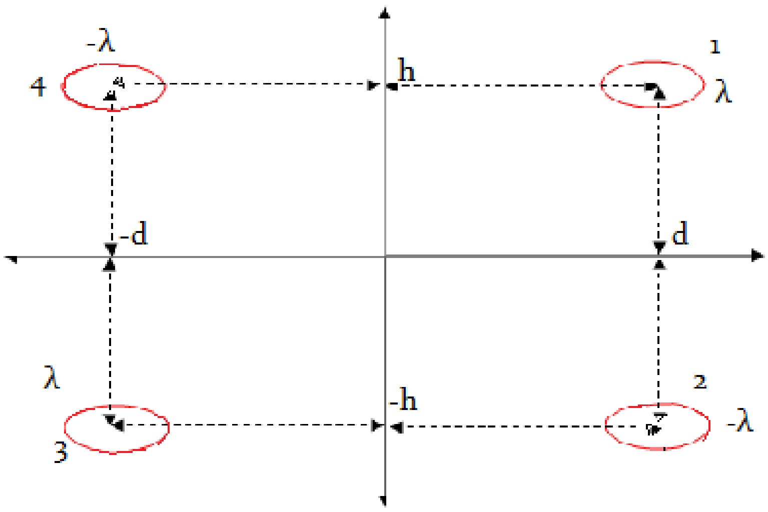
<u>Άσκηση 7:</u>



Σχήμα Α



Σχήμα Β

(α) Εύρεση Δυναμικού Πεδίου

Χρησιμοποιούμε την θεωρία του κατοπτρισμού και σχηματίζουμε τα παραπάνω είδωλα. Τώρα το δυναμικό για x,y>0 μπορεί να γραφτεί ως επαλληλία των δυναμικών των τεσσάρων κύκλων.

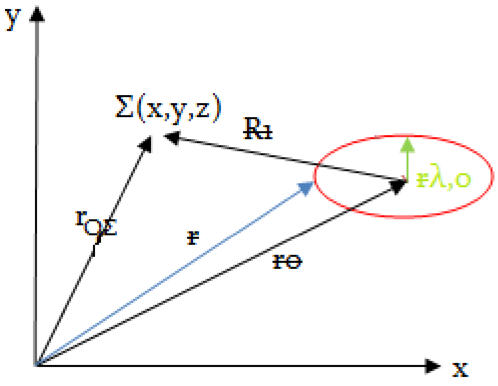
Επομένως, $\Phi(x,y,z)=\Phi_1(x,y,z)+\Phi_2(x,y,z)+\Phi_3(x,y,z)+\Phi_4(x,y,z)$.

Στόχος μας είναι να βρούμε το διάνυσμα R1.Αρχικά ασχολούμαστε με τον δακτύλιο 1 και ορίζουμε τα ακόλουθα διανύσματα:

- Το διάνυσμα $\vec{r}_{o,1}=d*i_x+h*i_y$, όπου δηλώνει την απόσταση από την αρχή των αξόνων O(0,0) έως το κέντρο του κύκλου,
- Το διάνυσμα $\vec{r}_{\lambda,o}=(\alpha*\cos(\phi)*i_x+(a*\sin(\phi)*i_z$, το οποίο δηλώνει την απόσταση από το κέντρο του κύκλου εώς την περιφέρεια του(σαν να έχω πάρει δηλαδή κυκλικές συντεταγμένες με κέντρο το κέντρο του κύκλου)
- Από τα παραπάνω διανύσματα ορίζω:
  $\vec{r} = \vec{r}_{o,1}+ \vec{r}_{\lambda,o} = (d + a*\cos(\phi))*i_x + h*i_y + a*\sin(\phi)*i_z$
- Ορίζουμε και το διάνυσμα ΟΣ: $\vec{r}_{O\Sigma}=x*i_x+y*i_y+z*i_z$
- Από τα παραπάνω προκύπτει το $\vec{r}_{O\Sigma}=\vec{r}+\vec{R}_1 \Rightarrow \vec{R}_1 = \vec{r}_{O\Sigma} - \vec{r}$
  $= (x*i_x+y*i_y+z*i_z)- [(d + a*\cos(\phi))*i_x + h*i_y + a*\sin(\phi)*i_z] \Rightarrow$

~~R1~~ = [(x – a*cos(ϕ) – d)*i_x + (y-h)*i_y + (z – a*sin(ϕ))*i_z]

~~R1~~ = $|R_1|$=sqrt((x-d)^2+a^2+(y-h)^2+z^2-2*a*((x-d)*cos(ϕ)+z*sin(ϕ)))



Άρα το δυναμικό είναι χάρη στην αρχή της επαλληλίας:

$$\Phi_1(x,y,z) = \frac{1}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{dq}{R1}$$

$$= \frac{1}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda*dl}{R1}$$

$$= \frac{1}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda*a*d\varphi}{R1}$$

$$= \frac{1}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda*a*d\varphi}{\mathrm{sqrt}((x-d)2+a2+(y-h)2+z2-2*a*((x-d)*\cos(\varphi)+z*\sin(\varphi)))}$$

$$\Phi_1(x,y,z) = \frac{1}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda*a*d\varphi}{\mathrm{sqrt}((x-d)2+a2+(y-h)2+z2-2*a*((x-d)*\cos(\varphi)+z*\sin(\varphi)))}$$

Για τον κύκλο 2:

~~r~~$_{o,2}$=d*i_x-h*i_y, ~~r~~$_{\lambda,o}$=(α*cos(ϕ)*i_x+(a*sin(ϕ)*i_z,

~~R2~~ = ~~r~~$_{OΣ}$ – ~~r~~ ➔ ~~R2~~ = [(x – a*cos(ϕ) – d)*i_x + (y+h)*i_y + (z – a*sin(ϕ))*i_z]

~~R2~~ = $|R_2|$=sqrt((x-d)^2+a^2+(y+h)^2+z^2-2*a*((x-d)*cos(ϕ)+z*sin(ϕ)))

Παρατηρούμε ότι το μόνο που αλλάζει στα διανύσματα είναι η τιμή του d,h. Επομένως για τους κύκλους 3,4:

Για τον 3: ~~r~~$_{o,3}$=-d*i_x-h*i_y

~~R3~~= $|R_3|$=sqrt((x+d)^2+a^2+(y+h)^2+z^2-2*a*((x+d)*cos(ϕ)+z*sin(ϕ)))

Για τον 4: ~~r~~$_{o,4}$= - d*i_x+h*i_y

~~R4~~= $|R_4|$=sqrt((x+d)^2+a^2+(y-h)^2+z^2-2*a*((x+d)*cos(ϕ)+z*sin(ϕ)))

Άρα για το δυναμικό του κάθε δαχτυλίου, ισχύει:

$$\Phi_2(x,y,z) = \frac{1}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{-\lambda*a*d\varphi}{\mathrm{sqrt}((x-d)2+a2+(y+h)2+z2-2*a*((x-d)*\cos(\varphi)+z*\sin(\varphi)))}$$

$$\Phi_3(x,y,z) = \frac{1}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda*a*d\varphi}{\mathrm{sqrt}((x+d)2+a2+(y+h)2+z2-2*a*((x+d)*\cos(\varphi)+z*\sin(\varphi)))}$$

$$\Phi_4(x,y,z) = \frac{1}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{-\lambda*a*d\varphi}{\mathrm{sqrt}((x+d)2+a2+(y-h)2+z2-2*a*((x+d)*\cos(\varphi)+z*\sin(\varphi)))}$$

Άρα έχουμε

$$\Phi(x,y,z) = \begin{cases} \Phi_1(x,y,z) + \Phi_2(x,y,z) + \Phi_3(x,y,z) + \Phi_4(x,y,z), & x>0 \ \&\& y>0 \\ 0, & x<0 \ || \ y<0 \end{cases}$$

Το δυναμικό είναι ίσο με μηδέν για $x<0$ είτε $y<0$ είτε $x<0$ και $y<0$, από τον ορισμό της άσκησης. Η μέθοδος των ειδώλων είναι απλά για διευκόλυνση στην εύρεση του δυναμικού ($x>0, y>0$).

(β) Για την εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου:

$$E_1(x,y,z) = \frac{\lambda*a}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{((x-d)2+a2+(y-h)2+z2-2*a*\left((x-d)*\cos(\varphi)+z*\sin(\varphi)\right))\hat{}(\frac{3}{2})}$$

$$E_2(x,y,z) = \frac{-\lambda*a}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{((x-d)2+a2+(y+h)2+z2-2*a*((x-d)*\cos(\varphi)+z*\sin(\varphi)))\hat{}(\frac{3}{2})}$$

$$E_3(x,y,z) = \frac{\lambda*a}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{((x+d)2+a2+(y+h)2+z2-2*a*((x+d)*\cos(\varphi)+z*\sin(\varphi)))\hat{}(\frac{3}{2})}$$

$$E_4(x,y,z) = \frac{-\lambda*a}{4*\pi*\varepsilon 0}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{((x+d)2+a2+(y-h)2+z2-2*a*((x+d)*\cos(\varphi)+z*\sin(\varphi)))\hat{}(\frac{3}{2})}$$

$$E_1(x,y,z) + E_2(x,y,z) + E_3(x,y,z) + E_4(x,y,z), \ (x,y)>0$$

Άρα, E(x,y,z) =

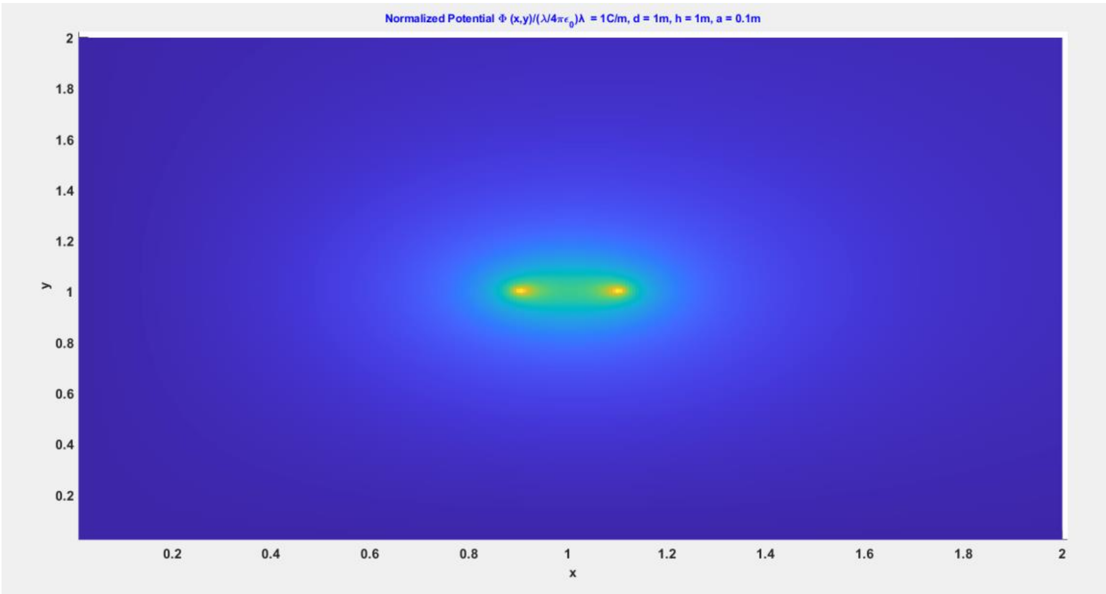
0 , x<0 || y<0

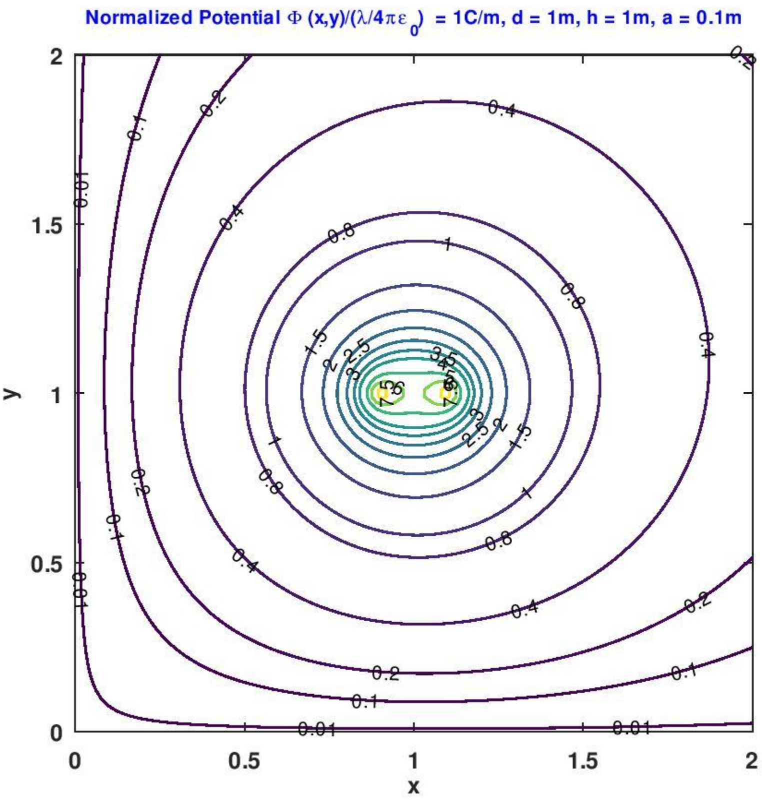
(γ) Η επιφανειακή πυκνότητα στο γειωμένο επίπεδο y=0

Χρησιμοποιούμε την οριακή συνθήκη για την κάθετη συνιστώσα του D: $D = i_n(D_2 - D_1)$

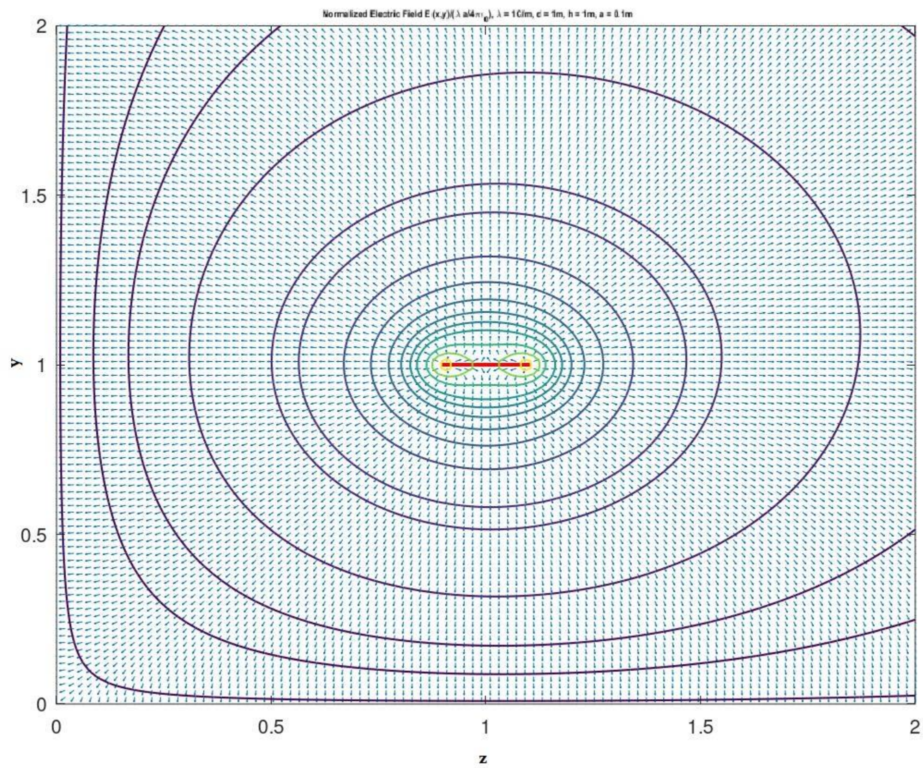
$\sigma = \varepsilon_0 * E_y(y=0) = \frac{\lambda * a * h}{4 * \pi} \int_0^{2\pi} \{ -\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3} \} d\phi$

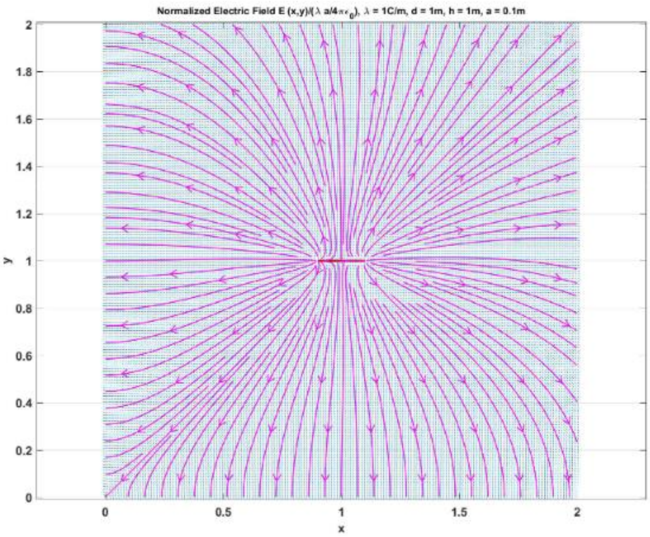
Τα επόμενα ερωτήματα έχουν υλοποιηθεί σε Octave:



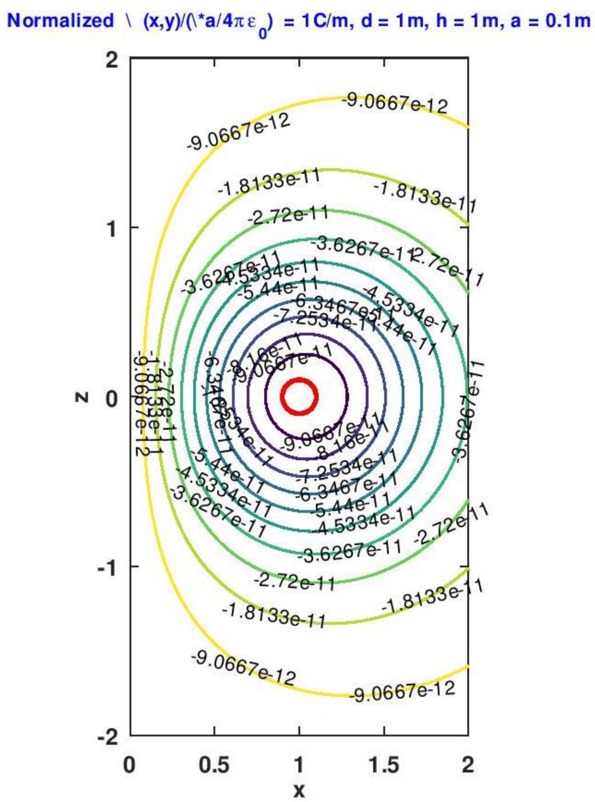


Σχήμα 1: Δυναμικό φορτισμένου δακτυλίου στο χώρο μεταξύ δύο γειωμένων επιπέδων





Σχήμα 3: Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου δακτυλίου



Σχήμα 4: Επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου πάνω στο y= 0 γειωμένο επίπεδο