FICHA 1. Álgebra Linear

1) Dadas as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

calcule:

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; **R**: $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $3\mathbf{A}$; **R**: $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $3\mathbf{A} + 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C} + \mathbf{D}$; **R**: $\begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{AB}$; **R**: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $\mathbf{C}(\mathbf{AB})$. **R**: $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & -21 \end{pmatrix}$

2) Dadas as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -12 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

calcule:

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; **R**: $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 10 & 4 & 8 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A}'$, i.e. a matriz transposta de $\mathbf{A}$; **R**: $\begin{pmatrix} 13 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. **R**: $\begin{pmatrix} -142 & 66 & 49 \\ -86 & 41 & 34 \\ -56 & 25 & 15 \end{pmatrix}$

3) Dada a função $f(x) = x^2 - 2x$, calcule $f(\mathbf{A})$, onde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **R**: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) Dada a função $f(x) = x^2 - 2x$, calcule $f(\mathbf{A})$, onde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **R** : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) Seja $\mathbf{A}$ uma matriz de dimensão 3×5 e $\mathbf{B}$ uma matriz de dimensão 5×2. Quais dos produtos estão definidos: $\mathbf{AB}$ ou $\mathbf{BA}$?

6) Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$ tal, que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} + \mathbf{I}_n$, onde $\mathbf{I}_n$ é uma matriz unitária de dimensão n. Ache as constantes a e b de modo que $\mathbf{A}^3 = a\mathbf{A} + b\mathbf{I}_n$. **R**: $a = 2,\ b = 1$

7) Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

calcule $(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})(\mathbf{I}_3 + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2)$, onde $\mathbf{I}_3$ é matriz unitária de ordem 3. **R**: *Matriz unidade* $\mathbf{I}_3$

8) Calcule os seguintes determinantes: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3^t & 2^t \\ 3^{t-1} & 2^{t-1} \end{vmatrix}$. **R**: $18,\ 0,\ 4ab,\ 6^{t-1}$

9) Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Mostre que $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

10) Ache duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de dimensão 2×2 tais que $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$.

11) Calcule os seguintes determinantes: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$. **R**: $-2,\ -2,\ adf,\ e(ad - bc)$

12) Sejam $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{AB}$, $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$, $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ e $|\mathbf{AB}|$.

13) Mostre que $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc + ab + ac + bc$.

14) Dada a matriz $\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$, calcule $|\mathbf{A}_t|$ e mostre que nunca é igual a 0. Mostre que para um certo valor de t tem-se $\mathbf{A}_t^3 = \mathbf{I}_3$.

15) Use a definição de determinante e calcule: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \end{vmatrix}$. **R**: 24, $d - a$, 0

16) Suponha que duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de ordem $n \times n$ são ambas triangular superior. Mostre que $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.

17) Sejam $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ e $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$. Mostre que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$ e $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$. É correcta a igualdade $|\mathbf{A}'\mathbf{B}'| = |\mathbf{A}'| \cdot |\mathbf{B}'|$?

18) Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Escreva $\mathbf{A}'$ e depois mostre que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$.

19) Calcule os seguintes determinantes: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$.

R: 0, 0, $x^4 - a_1 x^3$

20) Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes de ordem 3×3 cujos determinantes são $|\mathbf{A}| = 3$ e $|\mathbf{B}| = -4$. Onde for possível ache os valores de $|\mathbf{AB}|$, $3|\mathbf{A}|$, $|-2\mathbf{B}|$, $|4\mathbf{A}|$, $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ e $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$.

21) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ 2 & 1 & a^2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, calcule $\mathbf{A}^2$ e $|\mathbf{A}|$.

22) Prove que cada um dos seguintes determinantes é igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x-y & x-y & x^2-y^2 \\ 1 & 1 & x+y \\ y & 1 & x \end{vmatrix}.$$

23) Seja $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ e $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$.

24) Se $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a^2+1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $|\mathbf{A}_a|$ e $|\mathbf{A}_1^6|$.

25) Mostre que o determinante duma matriz ortogonal $\mathbf{P}$ é igual a 1 ou -1.

26) Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ de ordem n chama-se **involutiva** se $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n$.

   (a) Mostre que o determinante duma matriz involutiva é igual a 1 ou -1;

   (b) Mostre que $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & 1-a^2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ são involutivas (para todos a);

   (c) Mostre que $\mathbf{A}$ é involutiva $\iff (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

27) Prove que a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ é $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}$.

28) Prove que a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ é $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 8/7 & -1 & 3/7 \\ -2/7 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$.

29) Ache os valores de a e b de modo que $\mathbf{A}$ seja a matriz inversa de $\mathbf{B}$ se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ a & 1/4 & b \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   R: $a = -3/4$, $b = 3/4$

30) Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $|\mathbf{A}|$, $\mathbf{A}^2$ e $\mathbf{A}^3$. Mostre que $\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz unidade de ordem 3 e $\mathbf{0}$ é a matriz nula. Mostre que $\mathbf{A}$ possui inversa e $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$.

31) Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{AA}'$, $|\mathbf{AA}'|$ e $(\mathbf{AA}')^{-\mathbf{1}}$.

32) Suponha que $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{D}$ são matrizes quadradas tais que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Mostre que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}$. Usando o método de indução mostre que $\mathbf{A}^m = \mathbf{PD}^m\mathbf{P}^{-1}$ para qualquer inteiro m.

33) Dada a matriz $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$, calcule $\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^3 - 2\mathbf{B} + \mathbf{I}$ e, depois, ache $\mathbf{B}^{-1}$.

34) Suponha que $\mathbf{X}$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ tal que $|\mathbf{X}'\mathbf{X}| \neq \mathbf{0}$. Mostre que a matriz

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_m - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'$$

   é idempotente, isto é, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

35) Sejam $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{T} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} s & t & 3 \\ 7 & -8 & 3 \\ 1 & t & -3 \end{pmatrix}$, onde s e t são números reais. Prove que $\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}$ para valores apropriados de s e t.

36) Seja $\mathbf{D}$ uma matriz de dimensão $n \times n$ tal que $\mathbf{D}^2 = 2\mathbf{D} + 3\mathbf{I}$. Prove que $\mathbf{D}^3 = a\mathbf{D} + b\mathbf{I}$ para valores apropriados de a e b. Ache uma expressão similar para $\mathbf{D}^6$ e $\mathbf{D}^{-1}$ (isto é, expressa na forma $\alpha\mathbf{D} + \beta\mathbf{I}$).

37) Ache a matriz inversa, caso exista, para : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & -16 & 8 \end{pmatrix}$.

38) Ache a matriz inversa de $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

39) Seja

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ache $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. **R**: $\dfrac{5}{62}\begin{pmatrix} 18 & 16 & 10 \\ 2 & 19 & 8 \\ 4 & 7 & 16 \end{pmatrix}$.

40) Ache as inversas, caso existam, das matrizes: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 8 \\ -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

R: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}$ *não tem inversa*

41) Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ t & -2 & 2 \\ 2 & -1 & t \end{pmatrix}$$

ache o(s) valor(es) de t de modo que exista a matriz inversa A^{-1}. **R**: $t \neq 1,\ t \neq 2$

42) Diga quais das seguintes equações com variáveis x, y, z e w são lineares e quais não são. (Na alínea (f), a e b são constantes não negativas.)

(a) $3x - y - z - w = 50$;

(b) $\sqrt{3}x + 8xy - z + w = 0$;

(c) $3(x + y - z) = 4(x - 2y + 3z)$;

(d) $3.33x - 4y + \dfrac{800}{3}z = 3$;

(e) $(x - y)^2 + 3z - w = -3$;

(f) $2a^2x - \sqrt{b}y + (2 + \sqrt{a})z = b^2$.

43) Sejam x_1, y_1, x_2 e y_2 valores constantes e consideremos as seguintes equações com incógnitas a, b, c e d:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + d &= 0 \\ ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + d &= 0 \end{aligned}$$

Será este sistema linear em ordem a a, b, c e d?

44) Dado o modelo linear

$$\begin{aligned} c &= 0.712y + 95.05 \\ s &= 0.158(c + x) - 34.30 \\ y &= c + x - s \\ x &= 93.53 \end{aligned}$$

escreva-o na forma canónica quando as variáveis aparecem na ordem x, y, s, c. **R**: $x \approx 93.53$, $y \approx 482.11$, $s \approx 49.73$, $c \approx 438.31$

45) Escreva o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - \ x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

na forma matricial.

46) Numa empresa trabalham 40 empregados (homens e mulheres). Cada homem ganha 50 contos por dia e cada mulher 30 contos. Os empregados recebem conjuntamente 1600 contos. Usando o método de substituição diga quantos homens e mulheres trabalham na empresa. **R**: $(20, 20)$

47) Use a regra de Cramer e resolva o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} 3x - \ y &= 8 \\ x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

em ordem a (e.o.a) x e y. Verifique a resposta obtida por meio de substituição.

48) Use a regra de Cramer e resolva o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 3x - 2y &= 14 \end{aligned}$$

em ordem a (e.o.a) x e y. Verifique a resposta obtida por meio de substituição.

49) Use a regra de Cramer e resolva o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 2 \end{aligned}$$

em ordem a (e.o.a) x e y. Verifique a resposta obtida por meio de substituição.

50) Use a regra de Cramer para achar Y e C se

$$Y = C + I_0 + G_0, \quad C = a + bY,$$

onde Y é o produto nacional e C é o consumo privado. Os símbolos I_0 (investimento privado), G_0 (consumo público e investimento), a e b representam constantes, com $b < 1$. (Realmente, isto é um caso típico para o qual *não* se deveria usar a regra de Cramer, porque Y e C podem ser encontrados dum modo mais simples. Como?)

51) Considere os seguintes modelos macroeconómicos (ligados) de duas nações $i = 1, 2$, que comercializam somente entre si:

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_1 + A_1 + X_1 - M_1, \qquad C_1 = c_1 Y_1, \quad M_1 = m_1 Y_1, \\ Y_2 &= C_2 + A_2 + X_2 - M_2, \qquad C_2 = c_2 Y_2, \quad M_2 = m_2 Y_2. \end{aligned}$$

Aqui, para $i = 1, 2$, Y_i é o rendimento, C_i é o consumo, A_i é a despesa autónoma (exógena), X_i denota as exportações e M_i denota as importações do país i. Interprete as duas equações $X_1 = M_2$ e $X_2 = M_1$. Calcule os correspondentes valores de equilíbrio de Y_1 e Y_2 como funções das variáveis exógenas. Como é que um aumento em A_1 afectará Y_2? Interprete a sua resposta. **R**: $Y_1 = \dfrac{1}{D}[A_2 m_2 + A_1(1 - c_2 + m_2)]$, $Y_2 = \dfrac{1}{D}[A_1 m_1 + A_2(1 - c_1 + m_1)]$

52) Use a regra de Cramer e resolva o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{aligned}$$

R: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

53) Use a regra de Cramer e resolva o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

R: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

54) Use a regra de Cramer e resolva o sistema de equações

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 1 \\ 3x - 2y + 5z &= 14 \\ 2x - 5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

R: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

55) Considere o macro modelo descrito por três equações

$$Y = C + A_0, \qquad C = a + b(Y - T), \qquad T = d + tY,$$

onde Y é a renda, C é o consumo, T é o imposto da receita, A_0 é a despesa autónoma (exógena) constante e a, b, d e t são todos parâmetros positivos. Ache os valores de equilíbrio das variáveis endógenas Y, C e T:

(a) por meio de eliminações sucessivas ou substituição;

(b) escrevendo as equações na forma matricial e aplicando as regras de Cramer.

56) Utilizando o método da matriz inversa resolva o sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ 3x - 4y &= 5 \end{aligned}$$

57) Os preços de equilíbrio para três mercados são dados pelo sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} 11P_1 & - & P_2 & - & P_3 & = & 31 \\ -P_1 & + & 6P_2 & - & 2P_3 & = & 26 \\ -P_1 & - & 2P_2 & + & 7P_3 & = & 24 \end{array}$$

Ache o preço de equilíbrio para cada mercado. **R**: $(4, 7, 6)$

58) Use a regra de Cramer e resolva o sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= -5 \\ 2x - y + z &= -6 \\ x - y - 3z &= -3 \end{aligned}$$

R: $x = 1\,,\ y = -2\,,\ z = 2$

59) Use a regra de Cramer e resolva o sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + z &= 2 \\ y + z + u &= 6 \\ y + u &= 1 \end{aligned}$$

R: $x = -3\,,\ y = 6\,,\ z = 5\,,\ u = -5$

60) Use a regra de Cramer e prove que o sistema de equações

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

possui uma única solução para quaisquer valores de b_1, b_2 e b_3, depois ache a solução.

61) Prove que o sistema homogéneo de equações

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ bx + cy + az &= 0 \\ cx + ay + bz &= 0 \end{aligned}$$

possui uma solução não trivial se e somente se $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$.

62) Forneça uma prova matemática para o facto de que se ζ é uma solução particular de um sistema linear não homogéneo e ζ_0 é a solução do respectivo sistema linear homogéneo associado, então $\zeta + \zeta_0$ é a solução geral do sistema não homogéneo.

63) Dado o sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ tx & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & tz & = & 0, \end{array}$$

determine o(s) valor(es) de t de modo que existam soluções diferentes de $x = y = z = 0$. **R**: $t = 1 \vee t = 2$

64) Dado o sistema

$$\begin{aligned} 5x+8y+6z &= 7 \\ 3x+5y+4z &= 5 \\ 7x+9y+4z &= 1 \\ 2x+3y+2z &= 2, \end{aligned}$$

verifique se ele é consistente e ache as soluções caso sua resposta seja afirmativa. **R**: $(-5+2t, 4-2t, t)$

65) Dado o sistema

$$\begin{array}{ccccccccccc} x & + & 3y & + & 5z & + & 7u & + & 9w & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & 4u & + & 5w & = & 2 \\ 2x & + & 11y & + & 12z & + & 25u & + & 22w & = & 4 \\ & & 5y & + & 2z & + & 11u & + & 4w & = & -1, \end{array}$$

verifique se ele é consistente e ache as soluções caso sua resposta seja afirmativa. **R**: *Inconsistente*

66) Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule o seu determinante $|A|$; **R**: -2

(b) Verifique que

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix};$$

(c) Use o resultado da alínea b) e resolva o sistema

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \quad \mathbf{R}: \left(-\frac{5}{2}, -1, -\frac{11}{2}\right)$$

67) Usando o método de eliminação de Gauss resolva o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 5 \end{aligned}$$

R: $x_1 = 5,\ x_2 = -2$

68) Usando o método de eliminação de Gauss resolva o sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

R: $x_1 = (2/5)t,\ x_2 = (3/5)t,\ x_3 = t,$ *onde* t *é um real arbitrário*

69) Usando o método de eliminação de Gauss resolva o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

R: $x_1 = 20/9,\ x_2 = -1/3,\ x_3 = 22/9$

70) Discuta as possíveis soluções do sistema

$$\begin{aligned} x + \ \ y - \ \ z \quad &= 1 \\ x - \ \ y + 2z \quad &= 2 \\ x + 2y + az \quad &= b \end{aligned}$$

para diferentes valores de a e b, usando a eliminação de Gauss.

71) Ache os valores de c para os quais o sistema

$$\begin{aligned} 2w + \ \ x + 4y + 3z \quad &= 1 \\ w + 3x + 2y - \ \ z \quad &= 3c \\ w + \ \ x + 2y + \ \ z \quad &= c^2 \end{aligned}$$

possui solução e ache a solução para estes valores de c. **R**: *Para* $c = 1$ *e para* $c = -2/5$ *a solução é:* $x = 2c^2 - 1 + t$, $y = s$, $z = t$, $w = 1 - c^2 - 2s - 2t$, *onde* s *e* t *são reais arbitrários*

Ensinar é lembrar aos outros que eles sabem tanto quanto você...