FICHA 3. Plano e Recta no Espaço. Linhas e Superfícies de Segunda Ordem

1) Ache todas as normais do plano $3x - y + 5 = 0$.

2) Escreva, na forma coordenada, a equação do plano $(\vec{r}, \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) + 1 = 0$

3) Como se situam os pontos $A(3;-2;0)$, $B(1;1;1)$ e $C(1;-2;1)$ em relação ao plano $3x + 5y - 2z + 1 = 0$?

4) Deduza a equação do plano que passa pelo ponto $M(1;-1;2)$ e paralelo ao plano OXY. **R**: $z = 2$

5) Deduza a equação do plano que passa pelo ponto $M(4;-1;2)$, paralelo ao eixo OX e passa pela origem. * **R**: $2y + z = 0$

6) Deduza a equação do plano que passa pelos pontos $M(7;2;-3)$ e $N(5;6;-4)$ e paralelo ao eixo OX. **R**: $y + 4z + 10 = 0$

7) Ache os pontos de intersecção do plano $2x - y + 3z - 6 = 0$ com os eixos coordenados. **R**: $(3;0;0)$, $(0;-6;0)$ *e* $(0;0;2)$

8) Componha a equação do plano que passa pelo ponto $M(3;2;4)$ e que intersecta os eixos coordenados em segmentos de igual medida.

9) Componha a equação do plano que passa pelo ponto $M(1;2;-1)$ e é perpendicular ao vector $\vec{n} = \{1,1,2\}$.

10) Dados os pontos $M_1(1;2;-1)$ e $M_2(0;3;1)$ componha a equação do plano que passa pelo ponto M_1 e é perpendicular ao vector M_1M_2. * **R**: $x - y - 2z - 1 = 0$

11) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto $M(1;0;-1)$ e é paralelo aos vectores $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$. **R**: $(\vec{r} - \vec{i} + \vec{k}, -\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}) = 0$

12) Componha a equação do plano que passa pelos pontos $M_1(1;-1;2)$ e $M_2(3;0;-3)$ e é paralelo ao vector $\vec{a} = \{2,1,-1\}$. * **R**: $x - 2y - 3 = 0$

13) Componha a equação do plano sabendo seus três pontos $A(1;-3;2)$, $B(5;1;-4)$ e $C(2;0;3)$.

14) Reduza para a forma normal a equação $\sqrt{3}(x-1) + (y + 10 + \sqrt{3}) = 0$. **R**: $-(\sqrt{3}/2)x - y/2 - 5 = 0$

15) Reduza para a forma normal a equação $(\vec{r}, \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}) - 10 = 0$ e ache os ângulos que forma o seu vector normal com os eixos coordenados. * **R**: $(\vec{r}, \vec{i}/2 + \vec{k}/2) - 5 = 0$, $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $\gamma = \pi/3$

16) Calcule a distância do ponto $M_0(1;2;-3)$ até ao plano $(\vec{r}, 5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) + 4 = 0$. **R**: 0

17) Escreva a equação do plano que se encontra a mesma distância de dois planos paralelos $3x + 2y - z - 3 = 0$ e $3x + 2y - z - 1 = 0$. **R**: $3x + 2y - z - 2 = 0$

18) Ache o ângulo formado pelos planos $(\vec{r}, 3\vec{j} - \vec{k}) = 0$ e $(\vec{r}, 2\vec{j} + \vec{k}) - 1 = 0$. **R**: $\pi/4$

19) Estabeleça como estão situados entre si os planos $\sqrt{2}x - y + 3z + \sqrt{2} = 0$, $2x - \sqrt{2}y + 3\sqrt{2}z + 2 = 0$.

20) Estabeleça como estão situados entre si os planos $(\vec{r}, 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + 2 = 0$, $(\vec{r}, 6\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) + 3 = 0$. *

21) Estabeleça como estão situados entre si os planos $(\vec{r}, 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + 1 = 0$, $(\vec{r}, \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) + 2 = 0$.

22) Componha a equação do plano que passa por $M(-2;7;3)$ e é paralelo a $(\vec{r}, \vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}) - 1 = 0$. * **R**: $(\vec{r}, \vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}) + 15 = 0$

23) Componha a equação do plano que passa pelo ponto $M(3;4;0)$ e é perpendicular a dois planos $x+y+5z-9=0$ e $2x+y+2z+1=0$. **R**: $3x-8y+z+23=0$

24) Componha a equação do plano que passa pelos pontos $M_1(1;-1;-2)$ e $M_2(3;1;1)$ e perpendicular ao plano $(\vec{r},\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k})-5=0$. * **R**: $(\vec{r}-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k},3\vec{j}-2\vec{k})=0$

25) Dada a recta

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$$

escreva-a na forma canónica. **R**: $x/9=y/5=z+3$

26) Uma recta é dada pela equação $\vec{r}=\vec{i}+2\vec{k}+(2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})t$. Escreva esta equação na forma canónica. **R**: $(x-1)/2=y/-1=(z-2)/-1$

27) Componha a equação da recta que passa pelos pontos $M_1(1;-1;3)$ e $M_2(1;1;-1)$. **R**: $(x-1)/0=(y+1)/-2=(z-3)/4$

28) Componha a equação da recta que passa pelo ponto $M(2;-1;0)$ e paralela ao vector $\vec{s}=\{3,-5,1\}$. **R**: $(x-2)/3=(y+1)/(-5)=z/1$

29) Componha a equação da recta que passa pelo ponto $M(2;0;1)$ e paralela a recta $x=-1+t$, $y=2+2t$, $z=-t$. **R**: $x=2+t$, $y=2t$, $z=1-t$

30) Calcule o ângulo formado pelas rectas

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0. \; * \end{cases} \quad \mathbf{R}: \ \pi/2$$

31) Pela recta $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ faça passar um plano, paralelo à recta $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$. **R**: $x-y-z+4=0$

32) Componha a equação da recta que passa pelo ponto $M(1;1;1)$ e perpendicular aos vectores $\vec{s_1}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{s_2}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$. **R**: $(x-1)/5=(y-1)/(-1)=(z-1)/(-7)$

33) Verifique se o plano $4x-8y+17z-8=0$ pertence ao feixe de planos $\alpha(5x-y+4z-1)+\beta(2x+2y-3z+2)=0$. *

34) Escreva a equação da circunferência sabendo que um dos diâmetros é o segmento MN, onde $M(2;-3)$, $N(-6;3)$. **R**: $(x+2)^2+y^2=25$

35) Reduza à forma canónica a equação da circunferência $x^2+y^2+2x-10y+1=0$. **R**: $(x+1)^2+(y-5)^2=25$

36) Que linha define a equação $x^2+y^2+10x-4y+29=0$? * **R**: *Ponto* $(-5;2)$

37) Escreva a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(0;2)$, $B(1;1)$ e $C(2;-2)$. * **R**: $x^2+y^2+6x+4y-12=0$

38) Escreva a equação da tangente à circunferência $x^2+y^2=5$ no ponto $M(1;-2)$. **R**: $x-2y-5=0$

39) Escreva a equação da tangente à circunferência $x^2+y^2+6x-8y+17=0$ no ponto $A(0;5)$. * **R**: $y=-x+5$

40) Escreva a equação da circunferência $x^2+2x+y^2-6y-6=0$ na forma paramétrica. **R**: $x=-1+4\cos t$, $y=3+4\sin t$, *onde* $0\le t<2\pi$

41) Escreva a equação da circunferência $x^2 + y^2 = ax$ no sistema de coordenadas polares. **R**: $\rho = a\cos\theta$, *onde* $0 \le \theta < 2\pi$

42) Componha a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(5;0)$ e $B(1;4)$, e cujo centro pertence à recta $x + y - 3 = 0$.

43) Dada a equação da elipse $25x^2 + 169y^2 = 4225$, calcule o comprimento dos seus semi-eixos, ache as coordenadas dos focos. **R**: $a = 13$, $b = 5$, $F_1(0;-12)$, $F_2(0;12)$, $e = 12/13$, $x = \pm 169/12$, $d = 169/6$

44) Escreva a equação canónica da elipse simétrica em relação à origem do sistema coordenado, cujos focos se encontram no eixo das ordenadas e cuja distância entre as directrizes é igual a 9 e a distância entre os focos é 4. * **R**: $(x^2/5) + (y^2)/9 = 1$

45) Ache a condição para a qual a recta $Ax+By+C = 0$ é tangencial à elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$. **R**: $A^2a^2+B^2b^2 = C^2$

46) Escreva a equação da tangente à elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ no ponto $M(-1;3/2)$. **R**: $x - 2y + 4 = 0$

47) Escreva a equação da tangente à elipse $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{24} = 1$ paralela à recta $2x-y+17 = 0$. * **R**: $y = 2x+12$, $y = 2x - 12$

48) Dada a equação da hipérbole $7x^2 - 9y^2 = 63$, calcule o comprimento dos semi-eixos, as coordenadas dos focos e a excentricidade. **R**: $a = 3$, $b = \sqrt{7}$, $c = 4$, $F_1(0;-4)$, $F_2(0;4)$, $e = 4/3$

49) Escreva a equação da hipérbole cujos focos se encontram no eixo OY simetricamente em relação à origem do sistema coordenado e a distância entre as directrizes é 8, a excentricidade é $\sqrt{5}/2$. **R**: $(-x^2/5) + (y^2/20) = 1$

50) Pela hipérbole $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{9} = 1$ passe uma tangente ao ponto $M(2;0)$. **R**: $3x+2y-6 = 0$ *e* $-3x+2y+6 = 0$

51) Pela hipérbole $\dfrac{x^2}{15} - \dfrac{y^2}{6} = 1$ passe uma tangente ao ponto perpendicular à recta $x - 2y = 0$. * **R**: $y = -2x \pm \sqrt{54}$

52) Ache as coordenadas do foco e a equação da directriz da parábola $y^2 = 8x$. Calcule o comprimento do raio focal do ponto $M(2;4)$. **R**: $p = 4$, $F(2;0)$, $x = -2$, $r = 4$

53) Escreva a equação da parábola simétrica em relação ao eixo OY com centro na origem do sistema coordenado e que passa pelo ponto $B(1;-2)$. * **R**: $x^2 = -y/2$

54) Na parábola $y^2 = \dfrac{9x}{2}$ ache o ponto que se encontra a uma distância $d = 9,125$ até à directriz. **R**: $(8;6)$ *e* $(8;-6)$

55) Pelo ponto $M(5;-7)$ passe uma tangente à parábola $y^2 = 8x$. **R**: $x + y + 2 = 0$ *e* $2x + 5y + 25 = 0$

56) Pela parábola $y^2 = 12x$ passe uma tangente paralela à recta $3x - y + 5 = 0$. * **R**: $y = 3x + 1$

57) Classifique a equação $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$, reduza-a à forma canónica e esboce a linha. **R**: *Elipse*

58) Classifique a equação $4x^2 - 25y^2 + 50y - 24x + 89 = 0$, reduza-a à forma canónica e esboce a linha. **R**: *Hipérbole*

59) Classifique a equação $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 20 = 0$, reduza-a à forma canónica e esboce a linha. * **R**: *Hipérbole*

60) Classifique a equação $4y^2 - 8y - 2x - 1 = 0$, reduza-a à forma canónica e esboce a linha. **R**: *Parábola*

61) Reduza a equação $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 6y + 3 = 0$ à forma canónica e classifique a linha. **R**: *Elipse*

62) Reduza a equação $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ à forma canónica e classifique a linha. * **R**: *Par de rectas coincidentes*

63) Ache as coordenadas do centro e o raio da esfera dada pela equação $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$. **R**: $(1/2; -1)$, $R = 1/2$

64) Componha a equação da esfera que passa pelos pontos $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$ e $C(2; 2; 3)$ e cujo o centro se situa no plano XOY. **R**: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + 9z^2 = 26$

65) Componha a equação da esfera se os pontos $M(4; -1; -3)$ e $N(0; 3; -1)$ são os extremos de um dos seus diâmetros.

66) Classifique a superfície dada pela equação $x^2 + y^2 = 4$.

67) Classifique a superfície dada pela equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. *

68) Classifique a superfície dada pela equação $x^2 - y^2 = 1$.

69) Classifique a superfície dada pela equação $y^2 = 2x$. *

70) Qual o sentido geométrico da equação $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy - 4x - 8y - 12z + 3 = 0$? **R**: *Par de planos*

71) Reduza à forma canónica a equação da superfície $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$. **R**: $(x - 1)^2/9 + (y - 1)^2/4 + (z - 1)^2 = 1$

72) Reduza à forma canónica a equação da superfície $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0$. * **R**: $(x - 2)^2 - (y - 4)^2 = 2(z - 6)$

73) Reduza à forma canónica a equação da superfície $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0$. **R**: $4(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 4(z + 1)^2 = 0$

74) Mostre que o elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ admite a forma paramétrica

$$x = a \cos u \sin v, \quad y = b \cos u \sin v, \quad z = c \sin u.$$

75) Ache o corte cilíndrico do hiperbolóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. *

Nota: os exercícios marcados com * deverão ser resolvidos, obrigatoriamente, pelos estudantes na qualidade de TPC.

Parte dos exercícios foram retirados dos livros:

[1] K. Sydsaeter, P. Hammond (com a colaboração de M. Alves), *Matemática Essencial para Análise Económica. Parte II*, Texto Editores, 2007.

[2] D. Lay, *Linear Algebra and its Applications*, Addison Wesley, London, 2003.

[3] P. Danko et al, *Matemática Superior em Exercícios e Problemas.* Parte I, Editora Visha Shkola, 1974.

[4] V. Volkova et al, *Manual de Exercícios de Geometria Analítica e Álgebra Superior*, Saint-Petersburg State University Press, 1986.

Ensinar é lembrar aos outros que eles sabem tanto quanto você...