MINES ParisTech
http://campus.mines-paristech.fr 2021-2022

Ce mini-projet, à effectuer en binôme au sein du même groupe de PC, fera l'objet d'un rapport incluant notamment équations et graphiques obtenus par des simulations sous Python. La forme de ce rapport est laissée libre (pdf, notebook, version papier...).

Effacement de consommation.

On s'intéresse dans ce sujet au chauffage d'un bâtiment résidentiel. On souhaite piloter ce chauffage de sorte à minimiser la facture électrique du consommateur, tout en garantissant le confort des occupants.

Pour ce faire, on considère un horizon de temps $[t_0, t_f]$, que l'on partitionne en N intervalles de temps $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, \dots, N-1)$ de longueur uniforme Δt, avec $\Delta t = (t_f - t_0)/N$, de sorte que $t_N = t_f$. On suppose que le bâtiment est équipé de convecteurs, dont on contrôle la puissance totale de chauffage, supposée constante sur chaque intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$ et notée P_i. Cette puissance de chauffage est limitée

$$0 \leq P_i \leq P_M\,, \quad i = 0, \dots, N \tag{1}$$

La température moyenne du bâtiment évolue entre les temps t_i et t_{i+1} en fonction de la puissance de chauffage et de la température extérieure (supposé également constante sur l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$) suivant l'équation

$$T_{i+1} = e^{-(k+h)\Delta t} T_i + \frac{1 - e^{-(k+h)\Delta t}}{k+h} (bP_i + hT_i^e)\,, \quad i = 0, \dots, N-1 \tag{2}$$

où k et h sont deux constantes positives. Les conditions initiale/terminale correspondantes sont

$$T_0 = T_{in} \text{ et } P_N = 0 \tag{3}$$

Pour le confort des habitants, cette température doit rester bornée entre une température min et une température max données aux horaires de présence des occupants, soit

$$T_m \leq T_i \leq T_M\,, \quad i \in \mathcal{I}_{occ} \subset \{0, \dots, N\} \tag{4}$$

Enfin, on suppose l'existence d'un tarif heure pleine/heure creuse pour ce bâtiment, correspondant à un tarif d'électricité c_i variant dans le temps et à la facture d'énergie

$$\Delta t \sum_{i=0}^{N} c_i P_i \tag{5}$$

1 Etude du problème d'optimisation

1. Justifier que la facture d'énergie s'écrit bien (5).
2. Interpréter l'équation (2). Quels échanges thermiques incorpore-t-elle ? Cette modélisation vous semble-t-elle raisonnable ?

3. Formuler le problème d'optimisation à résoudre sous la forme

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{tel que } & c_{eq}(x) = 0, \\ & c_{in}(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

On précisera les variables de décision x, leur nombre n, les contraintes c_{eq} et c_{in} ainsi que la fonction objectif f à minimiser.

4. Etudier la convexité de ce problème. Appartient-il à une famille particulière de problèmes d'optimisation ?

2 Etude et résolution numérique du problème individuel

5. Quelles méthodes de résolution peuvent être envisagées pour ce problème ?
6. Développer un algorithme de résolution dans le cas d'un horizon de temps de 24h ($t_0 = 23h$, $\Delta t = 0.5h$), avec :
   - un tarif d'heure creuse ($c_i = c_{cr}$ constant) entre d'une part minuit et $6h$, et d'autre part $12h$ et $14h$ et un tarif d'heure pleine ($c_i = c_{pl}$ constant) le reste du temps ;
   - les horaires de "présence" des occupants $[7h, 9h]$ et $[18h, 23h]$.

   On prendra les valeurs numériques suivantes :

$$c_{cr} = 1\,, \quad c_{pl} = 3/2\,, \quad T_m = 18°C\,, \quad T_M = 30°C, \quad T_{in} = T_m \tag{7}$$

$$h = 0.05h^{-1}\,, \quad k = 0.01h^{-1}\,, \quad b = 1/500C/Wh\,, \quad P_M = 5000W \tag{8}$$

   et l'on supposera que la température extérieure varie suivant la fonction $T_i = 4 + 8e^{-(t_i-12)^2/40}$ (avec t_i modulo 24). Commenter les résultats obtenus.

7. Observer les résultats obtenus pour différents prix d'heure pleine ($c_{pl} = 7/4$ et $c_{pl} = 2$). Commenter le profil optimal obtenu et l'effet incitatif du tarif.

3 Régulation collective

8. On considère maintenant que le logement est mitoyen avec $n_l - 1$ autres (copropriété, immeuble...) et que l'on est en mesure de piloter l'ensemble de ces logements dont on note T_i^j et P_i^j ($j = 1, \ldots, n_l$) les températures et puissances respectives au temps t_i. Des échanges thermiques ayant lieu entre les logements, ceci modifie la dynamique de la température de la maison $j = 1, \ldots, n_l$ suivant l'équation

$$T_{i+1}^j = e^{-(k+h+\sum_{k\neq j} h_{jk})\Delta t} T_i + \frac{1 - e^{-(k+h+\sum_{k\neq j} h_{jk})\Delta t}}{k + h + \sum_{k\neq j} h_{jk}} (bP_i + hT_i^e + \sum_{k\neq j} h_{jk} T_i^k)\,, \quad i = 0, \ldots, N-1 \tag{9}$$

   où $h_{jk} = h_{kj} \geq 0$.

   (a) On souhaite concevoir un pilotage centralisé du chauffage de ces logements. Ecrire le nouveau problème d'optimisation à résoudre.

   (b) D'un point de vue théorique, cela modifie-t-il les propriétés du problème d'optimisation précédemment considéré ? D'un point de vue pratique, quels inconvénients/avantages cette solution de pilotage vous semble-t-elle présenter ?

   (c) Développer un algorithme de résolution dans le cas $n_l = 2$. On prendra $h_{12} = h_{21} = h$ et les mêmes paramètres pour les deux maisons (avec les valeurs données en (7)–(8)), à l'exception de la température minimale pour le second logement qui est $T_m^2 = 20°C$, contre $T_m^1 = 18°C$ pour le premier.

9. On étudie maintenant comment réaliser cette régulation de façon décentralisée, en utilisant la technique de décomposition-coordination détaillée en Annexe. Pour ce faire, on réécrit (9) sous la forme équivalente

$$T_{i+1}^j = e^{-(k+h+\sum_{k\neq j} h_{jk})\Delta t} T_i + \frac{1 - e^{-(k+h+\sum_{k\neq j} h_{jk})\Delta t}}{k+h+\sum_{k\neq j} h_{jk}} (bP_i + hT_i^e + w_i)\,, \quad i = 0, \ldots, N-1 \qquad (10)$$

$$w_i = \sum_{k\neq j} h_{jk} T_i^k \qquad (11)$$

et l'on ajoute un terme quadratique au coût (avec $\epsilon \ll c_i \Delta t$)

$$\sum_{j=1}^{n_l} \sum_{i=0}^{N} \left(\Delta t c_i P_i^j + \varepsilon (P_i^j)^2 \right) \qquad (12)$$

(a) Ecrire l'algorithme de décomposition-coordination pour le problème considéré.

(b) Les problèmes (14) et (15) sont résolus séparément par chaque logement, sous l'hypothèse de la connaissance [1] de la quantité $\sum_{k\neq j} h_{jk} T_i^k$. Comparer les avantages et inconvénients de cette solution par rapport à la précédente.

(c) Implémenter l'algorithme de décomposition-coordination dans le même cas que précédemment. (On pourra prendre $\varepsilon = 0.01$, $\rho = 0.1$ et $N_{iter} = 40$.)

(d) Comparer les résultats obtenus et conclure.

Annexe : Algorithme de décomposition/coordination

L'algorithme de décomposition/coordination par méthode d'Uzawa permet de résoudre le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} &\min_x \quad f(x) \\ &\text{tel que } c(x) \leq 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

dans le cas où :

- le coût f se décompose comme une somme de différentes termes ne dépendant que d'une variable de décision

$$f(x) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$$

- les containtes inégalités (et égalités) c se décomposent comme une somme de différentes termes ne dépendant que d'une variable de décision

$$c(x) = c_1(x_1) + \ldots + c_n(x_n)$$

Le principe de l'algorithme est alors de "décomposer" le problème à l'aide du Lagrangien, de résoudre n problèmes d'optimisation sous contraintes à l'aide des multiplicateurs de Lagrange et de "coordonner" les solutions pour mettre à jour les variables couplées (les multiplicateurs).

Il prend la forme suivante :

Algorithme 1 (Décomposition/coordination)

1. *Initialisation ($k = 0$) : on choisit le multiplicateur λ_0 et le pas ρ.*
2. *Décomposition : on résout les n problèmes :*

$$\min_{x_i} \left[f_i(x_i) + \lambda^k c_i(x_i) \right] \qquad (14)$$

dont on note x_i^k les solutions.

1. Dans le cas $n_l \geq 3$, il est possible pour les logements d'échanger la quantité $\sum_k h_{jk} T_i^k$, sans être capable d'identifier séparément chaque $h_{jk} T_i^k$, par un algorithme de somme sécurisée par exemple.

3. *Coordination : effectuer les mises à jour des multiplicateurs*

$$\lambda^{k+1} = P(\lambda^k + \rho \left[c_1(x_1^k) + \ldots + c_n(x_n^k)\right]) \tag{15}$$

où P est la projection sur $(\mathbb{R}^+)^m$

4. *Test d'arrêt : si $|\lambda^{k+1} - \lambda^k|$ est suffisamment petit ou $k+1$ supérieur à N_{iter}, on arrête l'algorithme. Sinon, $k = k+1$ et on revient à l'étape 2.*