Maths – MP2I

Eliott Paquet

20 août 2025

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Mathématiques de MP2I, ainsi que les TDs (travaux dirigés) les accompagnant. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent. Le document est organisé selon la hiérarchie suivante : chapitre, I), 1), a).

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée). C'est également le cas des références à des éléments antérieurs de la forme, par exemple, « Démonstration 5.22 ».

Dernier TD corrigé : aucun.

Le nombre total de lignes de latex utilisé pour générer tout ce document est : 15420.

Table des matières

Première partie

Cours

Chapitre 1

trigonométrie (Rappels et compléments)

Sommaire

Dans ce chapitre, on rappelle ce qui a été vu en trigonométrie au lycée et on complète avec les formules d'addition et de duplication ainsi que l'étude de la fonction tangente.

I Cercle trigonométrique

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Définition I.0.1 (Cercle trigonométrique)
On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1

Propriétés I.0.2 (enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique)
Soit M un point du plan.
Le point M appartient au cercle trigonométrique si, et seulement si, il existe un réel t tel que les coordonnées de M dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont $(\cos t\ ;\ \sin t)$

I.1 Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$

Définition I.1.1
Deux réels a et b sont dits congrus modulo 2π s'il existe un entier relatif k tel que $a - b = 2k\pi$
Notation : $a \equiv b\ [2\pi]$

Définition/Propriétés I.1.2
On dit que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ car elle vérifie les propriétés suivantes :

(1) Pour tout réel x, on a : $x \equiv x\ [2\pi]$. (réfléxivité)

(2) Pour tout couple de réels (x, y) tel que $x \equiv y\ [2\pi]$, on a :$y \equiv x\ [2\pi]$ (symétrie)

(3) Pour tout triplet de réels (x, y, z) tel que $x \equiv y\ [2\pi]$ et $y \equiv z\ [2\pi]$, on a : $x \equiv z\ [2\pi]$ (transitivité)

II Cosinus et sinus

II.1 Formules et valeur remarquables

Formule II.1.1 (Formule de base)
Pour tout réel t, on a :

(1) $\cos(\pi - t) = -\cos t$ *et* $\sin(\pi - t) = \sin t$

(2) $\cos(\pi + t) = -\cos t$ *et* $\sin(\pi + t) = -\sin t$

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$

(4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque II.1.2
Soient a et b des réels :

- $\cos a = \cos b \iff \begin{cases} a \equiv b\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv -b\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k' \in \mathbb{Z},\ a = -b + 2k'\pi \end{cases}$
- $\sin a = \sin b \iff \begin{cases} a \equiv b\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv \pi - b\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k' \in \mathbb{Z},\ a = \pi - b + 2k'\pi \end{cases}$

Formule II.1.3 (Formule d'addition)
Pour tout couple de réels (a,b) *on a :*

(1) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(2) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

(3) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

(4) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Formule II.1.4 (Formule de simpson)
Pour tout couple de réels (a,b) *on a :*

(1) $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b) \iff \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) = \sin(a)\cos(b)$

(2) $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b) \iff \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) = \cos(a)\cos(b)$

Application II.1.5
Calcul :

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(3x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(4x) + \sin(2x))\,dx = 0$$

Formule II.1.6 (Formule de duplication)
Pour tout réel a*, on a :*

(1) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

(2) $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

Propriétés II.1.7 (Sinus et Cosinus)

- La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2π. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $\cos' = -\sin$
- La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 2π. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $\sin' = \cos$

Propriétés II.1.8 (Inégalité remarquable)
Pour tout réel t, on a : $|\sin(t)| \leqslant |t|$

Définition/Propriétés II.1.9 (Relation fondamentale de la trigonométrie)
$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Démonstration
Soit $f : x \longmapsto \cos^2(x) + \sin^2(x)$
alors on a : $f'(x) = -2\sin(x)\cos + 2\sin(x)\cos(x) = 0$
Donc f est constante ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) = f(0) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1^2 + 0^2 = 1$ ∎

III La fonction tangente

Définition III.0.1
La fonction $\dfrac{\sin}{\cos}$ est appelée la fonction tangente et notée tan

Propriétés III.0.2
La fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, impaire et périodique de période π. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ et sa dérivée vérifie $\tan' = 1 + \tan = \dfrac{1}{tan^2}$

Formule III.0.3
Pour tout réel t, on a :

(1) $tan(\pi - t) = -\tan(t)$

(2) $tan(\pi + t) = \tan(t)$

(3)

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*NULL*

Formule III.0.4 (addition et duplication)
Pour tout couple de réels (a, b) n'appartenant pas à l'ensemble $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :

(1) *Si $a + b$ n'appartient pas à l'ensemble $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ alors* $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

(2) *Si $a - b$ n'appartient pas à l'ensemble $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ alors* $\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

(3) *Si $2a$ n'appartient pas à l'ensemble $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ alors* $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

Exercice/Exemple III.0.5
Soit t réel n'appartenant pas à $\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$:

$$\begin{aligned}\sin(t) &= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\\ &= \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\\ &= \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\times 2\tan\left(\frac{t}{2}\right)\\ &= \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\end{aligned}$$

Chapitre 2

Inégalité et fonction (rappel et compléments)

Sommaire

Dans ce chapitre, sont rassemblés des rappels ou compléments sur les inégalités ainsi que des fondamentaux sur les fonctions de variable réelle à valeurs réelles (sans preuve ni évocation de continuité).

I Inégalité

I.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Définition I.1.1
On dit que la relation $\leqslant$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ car elle vérifie les propriétés suivantes :

(1) Pour tout réel x, on a : $x \leqslant x$. (réfléxivité)
(2) Pour tout couple de réels (x, y) tel que $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, on a :$y = x$ (antisymétrie)
(3) Pour tout triplet de réels (x, y, z) tel que $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, on a : $x \leqslant z$ (transitivité)

Propriétés I.1.2 (Compatibilité avec les opérations)
Soit x, y, z, t et a des réels.

(1) Si $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$ alors $x + z \leqslant y + t$
(2) Si $x \leqslant y$ et $0 \leqslant a$ alors $ax \leqslant ay$
(3) Si $x \leqslant y$ et $a \leqslant 0$ alors $ay \leqslant ax$
(4) Si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant z \leqslant t$ alors $0 \leqslant xz \leqslant yt$

Notation I.1.3 (Intervalles de $\mathbb{R}$)
Les partie I de $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire sous l'une des formes suivantes sont dites intervalles de $\mathbb{R}$:

- $I = \emptyset$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \underset{\text{notation}}{=} [a\ ;\ b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leqslant b$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} \underset{\text{notation}}{=} [a\ ;\ b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ et $a < b$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} \underset{\text{notation}}{=}]a\ ;\ b]$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbb{R}$ et $a < b$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} \underset{\text{notation}}{=}]a\ ;\ b[$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ et $a < b$

Propriétés I.1.4

(1) Passage à l'inverse dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ x \leqslant y \iff \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \ \forall y \in \mathbb{R}_-^*,\ \ x \leqslant y \iff \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$$

(2) Passage au carré dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ x \leqslant y \iff x^2 \leqslant y^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \ \forall y \in \mathbb{R}_-^*,\ \ x \leqslant y \iff y^2 \leqslant x^2$$

(3) Passage à la racine carrée dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ \ x \leqslant y \iff \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$$

(4) Passage à l'exponentielle ou au logarithme népérien dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ x \leqslant y \iff \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \ x \leqslant y \iff \ln x \leqslant \ln y$$

Exercice/Exemple I.1.5
Montrer $\forall x \in [0\,;\,1]\,,\;\; x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Correction I.1.6 (2 Méthode)
Soit $x \in [0\,;\,1]$

(1) Raisonnement par équivalence

$$\begin{aligned} x(1-x) \leqslant \frac{1}{4} &\iff 0 \leqslant \frac{1}{4} - x(1-x) \\ &\iff 0 \leqslant x^2 - x + \frac{1}{4} \\ &\iff 0 \leqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai $\forall x \in [0\,;\,1]\,,$ car $\Delta = 0$ et $x_0 = \dfrac{1}{2}$, on conclut $\forall x \in [0\,;\,1]\,,\;\; x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

(2) étude de la fonction $f: \begin{array}{ccc} [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{4} - x(1-x) \end{array}$

Exercice/Exemple I.1.7

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\;\; x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Correction I.1.8
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geqslant 2 &\iff \frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \\ &\iff (x-1)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on conclut $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\;\; x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Exercice/Exemple I.1.9

Encadrer $\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+\sqrt{x+2}+3}$ pour $x\in[-1\,;\,1]$.

Correction I.1.10
Soit $x\in[-1\,;\,1]$

(1) numérateur :

$$\begin{aligned}-1\leqslant x\leqslant 1 &\iff 0\leqslant x^2\leqslant 1\\&\iff 0\leqslant 2x^2\leqslant 2\\&\iff 0\leqslant 2x^2-x+1\leqslant 4\end{aligned}$$

(2) denominateur :

$$\begin{aligned}-1\leqslant x\leqslant 1 &\iff 0\leqslant x^2\leqslant 1\\&\iff 4\leqslant x^2+\sqrt{x+2}+3\leqslant 4+\sqrt{3}\\&\iff \frac{1}{4+\sqrt{3}}\leqslant\frac{1}{x^2+\sqrt{x+2}+3}\leqslant\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ainsi par produit des deux inégalités on as $0\leqslant\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+\sqrt{x+2}+3}\leqslant 1$ pour $x\in[-1\,;\,1]$.

Exercice/Exemple I.1.11

Encadrer $\dfrac{x-y^2+3}{x^2+y^2-y}$ pour $\forall\,(x,y)\in[1\,;\,2]^2$.

Correction I.1.12
Soit $x\in[-1\,;\,1]$

(1) numérateur :

$$1-4+3\leqslant x-y^2+3\leqslant 2-1+4\iff 0\leqslant x-y^2+3\leqslant 5$$

(2) denominateur :

$$\begin{aligned}0\leqslant y-1\leqslant 1 &\iff 0\leqslant y^2-y\leqslant y\\&\iff 0\leqslant y^2-y\leqslant 2\\&\iff 1\leqslant x^2+y^2-y\leqslant 6\\&\iff \frac{1}{6}\leqslant\frac{1}{x^2+y^2-y}\leqslant 1\end{aligned}$$

Ainsi par produit des deux inégalités on as $0\leqslant\dfrac{x-y^2+3}{x^2+y^2-y}\leqslant 5$ pour $\forall\,(x,y)\in[1\,;\,2]^2$.

Définition I.1.13 (Parties majorées, majorants, maximum)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout réel x de A, on a : $x \leqslant M$. Un tel réel M est alors dit :

- majorant de A dans le cas général.
- maximum de A dans le cas particulier où M appartient à A.

Définition I.1.14 (Parties minorées, minorants, minimum)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout réel x de A, on a : $m \leqslant x$. Un tel réel m est alors dit :

- minorant de A dans le cas général.
- minimum de A dans le cas particulier où m appartient à A.

Exercice/Exemple I.1.15

Que dire de $B = \left\{ \frac{n}{n^2+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$?

Correction I.1.16

- B est minorée car $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{n}{n^2+1}$ par ailleurs $0 \in B$ donc 0 est un minimum.
- B est majorée par $\frac{1}{2}$. En effent en notant $U_n = \frac{n}{n^2+1}$, On voit que (U_n) est strictement décroissante

Exercice/Exemple I.1.17

Que dire de $C = \left\{ \frac{\mathrm{e}^x}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$?

Correction I.1.18

- C est minorée car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ donc 0 est un minorant mais pas un minimum
- Supposons que C est majorée alors $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall c \in C,\ c \leqslant M$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\mathrm{e}^x}{x} \leqslant M$ donc par passage à la limite en $+\infty$ on trouve $+\infty \leqslant M$ ce qui est absurde donc C n'est pas majorée.

Définition I.1.19 (Parties bornées)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite bornée si elle est majorée et minorée autrement dit s'il existe deux réels m et M tel que, pour tout réel x de A, on a : $m \leqslant x \leqslant M$.

II Valeur absolue d'un réel

Définition II.0.1
Pour tout x réel, la valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie par : $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Propriétés II.0.2

(1) Pour tout x réel, on a : $0 \leqslant |x|$ et $x \leqslant |x|$

(2) Pour tout couple(x, y) de réels, on a : $|xy| = |x|\,|y|$

(3) Pour tout couple (x, y) de réels tel que y est non nul, on a : $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Définition/Propriétés II.0.3 (Deux inéquations élémentaires)
Pour tout réel x et tout réel positif α, on a :

(1) $|x| \leqslant \alpha \iff -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \iff x \in [-\alpha\,;\,\alpha]$

(2) $|x| \geqslant \alpha \iff x \leqslant -\alpha$ ou $\alpha \leqslant x \iff x \in\,]+\infty\,;\,-\alpha] \cup [\alpha\,;\,+\infty[$

Définition/Propriétés II.0.4 (Interprétation sur la droite des réels)
Soit a un réel et b un réel positif.
L'ensemble des réels x vérifiant $|x - a| \leqslant b$ (resp. $|x - a| \geqslant b$) est l'ensemble des points de la droite des réels situés à une distance du point a inférieure ou égale (resp. supérieure ou égale) à b.

Propriétés II.0.5 (Inégalité triangulaire)
Pour tout couple (x, y) de réels, on a :

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Démonstration (inégalité triangulaire)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} |x + y| \leqslant |x| + |y| &\iff |x + y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \\ &\iff x^2 + 2xy + y^2 \leqslant x^2 + y^2 + 2\,|x|\,|y| \\ &\iff xy \leqslant |xy| \end{aligned}$$

Ce qui est vrai donc l'inégalité est bien démontrer ■

Exercice/Exemple II.0.6

Encadrer $\dfrac{x\cos(x)+1}{\sin(x)+3}$ pour $x \in [-\pi\ ;\ 2\pi]$

Correction II.0.7
Soit $x \in [-\pi\ ;\ 2\pi]$

- <u>numérateur</u> : $|x\cos(x)+1| \leqslant |x|\,|\cos(x)|+1 \leqslant 2\pi+1 = 2\pi+1$
- <u>dénominateur</u> : $2 \leqslant |\sin(x)+3| \leqslant 4$

Ainsi par produit des deux inégalités on as :$0 \leqslant \dfrac{|x\cos(x)+1|}{|\sin(x)+3|} \leqslant \dfrac{2\pi+1}{2}$
donc $-\dfrac{2\pi+1}{2} \leqslant \dfrac{x\cos(x)+1}{\sin(x)+3} \leqslant \dfrac{2\pi+1}{2}$ pour $x \in [-\pi\ ;\ 2\pi]$.

Propriétés II.0.8
Soit un couple (x,y) de réels.

$$||x|-|y|| \leqslant |x-y|$$

Démonstration
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $x=(x-y)+y$ donc $|x| \underset{\text{inég. triang.}}{\leqslant} |x-y|+|y|$ d'où $|x|-|y| \leqslant |x-y|$
De même, $y=(x-y)+x$ donc $|y| \underset{\text{inég. triang.}}{\leqslant} |x-y|+|x|$ d'où $-|x-y| \leqslant |x|-|y|$

ainsi on a $-|x-y| \leqslant |x|-|y| \leqslant |x-y|$ donc $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$. ∎

III Partie entière d'un réel

Propriétés III.0.1
Pour tout réel x,il existe un unique entier n tel que :

$$n \leqslant x < n+1$$

Définition III.0.2
On appelle partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, l'unique entier n vérifiant la propriété précédente.

Exemple III.0.3
$\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ et $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

IV Généralité sur les fonctions

Définition IV.0.1 (Fonction)
Une fonction de variable réelle à valeurs réelles notée f est un objet mathématique qui, à tout élément x d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, associe un et un seul nombre réel noté $f(x)$.
<u>Notation Fonctionnelle</u> :

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Définition IV.0.2
Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles.

(1) L'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe est appelé ensemble/domaine de définition de f et souvent noté $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x)\text{existe}\}$

(2) Soit $x \in D_f$
La valeur réelle $f(x)$ est appelée image de x par f.

(3) soit $y \in \mathbb{R}$
S'il existe x dans D_f tel que $f(x) = y$ alors x est dit antécédent de y par f

Définition/Propriétés IV.0.3 (égalité entre fonction)
Deux fonctions f et g de variable réelle à valeurs réelles sont dites égales si les deux conditions suivantes sont réunies :

- les fonctions f et g ont le même ensemble de définition D ;
- pour tout x de D, $f(x) = g(x)$.

dans ce cas, on note $f = g$.

Exercice/Exemple IV.0.4
est-ce que les fonctions f et g définies par :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \text{ et } g : x \longmapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Sont égales ?

Correction IV.0.5
Tout d'abord $\forall x \in D_f \cap D_g, \quad f(x) = g(x)$ car :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \\
&= \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\
&= \frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\
&= \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = f(x)
\end{aligned}$$

Donc $f = g$ sur $D_f \cap D_g$ mais $D_f =]-1\,;+\infty]$ or $D_g = [-1\,;+\infty[\setminus\{0\}$ donc $D_f \neq D_g$ donc $f \neq g$.

Définition IV.0.6 (représentation graphique d'une fonction)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble de points C_f défini par

$$C_f = \left\{M(x\,; f(x)) \,\middle|\, x \in D_f\right\}$$

est appelé représentation graphique de f (ou courbe représentative de f).

Définition IV.0.7 (Parité,imparité et périodicité d'une fonction)

- Une fonction f est dite paire si, pour tout x de son domaine de définition, on a : $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est dite impaire si, pour tout x de son domaine de définition, on a : $f(-x) = -f(x)$.
- Une fonction f est dite périodique de période T si, pour tout x de son domaine de définition, on a : $f(x+T) = f(x)$.

Exercice IV.0.8
Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Correction IV.0.9 (Analyse-synthèse)
Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction quelqu'onque

- $\boxed{\text{analyse}}$: Supposons qu'il existe $\begin{cases} p : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \text{ paire} \\ i : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \text{ impaire} \end{cases}$ telles que $f = p + i$

  Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) & (1) \\ f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)(2) \end{cases}$

  — $\frac{1}{2}\big((1)+(2)\big)$ donne $p : x \longmapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

  — $\frac{1}{2}\big((1)\text{-}(2)\big)$ donne $i : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

- $\boxed{\text{synthèse}}$: vérifions que le seul couple trouvé convient :

  — $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = p(x) + i(x)$

  — $p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$

Ainsi f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et impaire

Définition IV.0.10 (opération et composition)
Soit f et g deux fonctions de variable réelle à valeurs réelles de domaines de définition D_f et D_g.

- La somme de f et g est la fonction, notée $f + g$, définie par $f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$.
  Son domaine de définition D_{f+g} vérifie : $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
- La multiplication de f par le réel α est la fonction, notée αf, définie par $\alpha f : x \longmapsto \alpha f(x)$.
  Son domaine de définition $D_{\alpha f}$ vérifie : $D_{\alpha f} = D_f$ si $\alpha \neq 0$.
- Le produit de f et g est la fonction, notée fg, définie par $fg : x \longmapsto f(x)g(x)$.
  Son domaine de définition D_{fg} vérifie : $D_{fg} = D_f \cap D_g$.
- Le quotient de f par g est la fonction , notée $fracfg$, définie par $fracfg : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
  Son domaine de définition D_{fracfg} vérifie : $D_{fracfg} = D_f \cap \big\{x \in D_g | g(x) \neq 0\big\}$.
- La composée de g et f est la fonction, notée $g \circ f$, définie par $g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$.
  Son domaine de définition $D_{g\circ f}$ vérifie : $D_{g\circ f} = \big\{x \in D_f | f(x) \in D_g\big\}$.

Exercice/Exemple IV.0.11
Domaine de définition de : $f : \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} \end{array}$

Correction IV.0.12
Soit $x \in D_f$ alors $x - \frac{1}{x} \geqslant 0 \iff x \neq 0$ et $\frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

ainsi on voit bien que $D_f = [-1\,;0[\,\cup\,[1\,;+\infty[$

V Fonction et relation d'ordre

Définition V.0.1 (Monotonie)
Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles et D une partie de son domaine de définition D_f.

(1) f est dite **croissante** sur D si, pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$.

(2) f est dite **décroissante** sur D si, pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x \leqslant y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$.

(3) f est dite **strictement croissante** sur D si, pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.

(4) f est dite **strictement décroissante** sur D si, pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.

Remarque : f est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur D si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D.

Remarque V.0.2 (Application de la définition)
Sous réserve que cela ait du sens :

- La somme de deux fonctions croissantes(resp. décroissantes) est croissante(resp. décroissante).
- La composée de deux fonctions croissantes(resp. décroissantes) est croissante(resp. décroissante).
- La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante
- Le produit de deux fonctions positives croissantes (resp. décroissantes) est croissante(resp. décroissante).

Définition V.0.3
Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles de domaine de définition D_f.
Soit D une partie non vide de D_f.

(1) f est dite **majorée** sur D si l'ensemble $\{f(x) \mid x \in D\}$ est majoré, c'est-à-dire s'il existe un réel M tel que, pour tout réel x de D, on a : $f(x) \leqslant M$.
Un tel réel M est alors dit :

- **majorant** de f sur D dans le cas général.
- **maximum** de f sur D dans le cas particulier où il existe x_0 dans D tel que $M = f(x_0)$.

(2) f est dite **minoriée** sur D si l'ensemble $\{f(x) \mid x \in D\}$ est minoré, c'est-à-dire s'il existe un réel m tel que, pour tout réel x de D, on a : $m \leqslant f(x)$.
Un tel réel m est alors dit :

- **minorant** de f sur D dans le cas général.
- **minimum** de f sur D dans le cas particulier où il existe x_0 dans D tel que $m = f(x_0)$.

(3) f est dite **bornée** sur D si f est majorée et minoriée sur D, c'est-à-dire s'il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel x de D, on a : $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Propriétés V.0.4
Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles de domaine de définition D_f.
Alors f est bornée sur D si, et seulement si, la fonction $|f|$ est majorée sur D.

VI Dérivation des fonctions d'une variable réelle

Définition VI.0.1 (dérivée en un point)
Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles de domaine de définition D_f et x_0 un point de D_f.
f est dite dérivable en x_0 si la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0.
Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ la valeur de cette limite et on l'appelle la dérivée de f en x_0.
Cela reient à déterminer si la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Définition VI.0.2
fonction dérivée f est dite dérivable sur D_f si elle est dérivable en tout point de D_f.
Dans ce cas, la fonction $x \longmapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f et notée f'.

Définition/Propriétés VI.0.3 (équation de la tangente)
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles et C_f la courbe représentative de f.
Soit x_0 un point de D_f .
Si f est dérivable en x_0, alors la tangente à la courbe C_f au point $M(x_0, f(x_0))$ est la droite d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Définition/Propriétés VI.0.4 (opération sur les fonctions dérivable)
Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ non vide et non réduits à un point.

(1) Combinaison linéaire :
Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles et (α, β) deux réels.
Si f et g sont dérivables sur I, alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :
$$\alpha f + \beta g' = \alpha f' + \beta g'$$

(2) Produit :
Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles.
Si f et g sont dérivables sur I, alors fg est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :
$$(fg)' = f'g + fg'$$

(3) quotient :
Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles tel que g est non nulle sur I.
Si f et g sont dérivables sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et sa dérivée vérifie :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(4) Composition :
Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelle tel que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J
Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.
Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J, alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :
$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Définition/Propriétés VI.0.5 (Caractérisation des fonctions constantes ou monotones)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles.

(1) f est constante sur I si, et seulement si, pour tout x de $I, f'(x) = 0$.
(2) f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
(3) f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
(4) f est strictement croissante sur I si, et seulement si, les deux conditions suivante sont réunies :
   (a) pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$;
   (b) il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tels que pour tout x de $[a\ ;b]$, on a $f'(x) = 0$.
(5) f est strictement décroissante sur I si, et seulement si, les deux conditions suivante sont réunies :
   (a) pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$;
   (b) il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tels que pour tout x de $[a\ ;b]$, on a $f'(x) = 0$.

Définition/Propriétés VI.0.6 (dérivées usuelles)

Fonction	Domaine de dérivabilitée	Fonction dérivée
$x \longmapsto a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto x^-n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto -nx^{-n-1}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x$
$x \longmapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos(x)$
$x \longmapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ ou $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Exercice/Exemple VI.0.7

Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3(x)}{\cos^5(x)}dx$

Correction VI.0.8

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3(x)}{\cos^5(x)}dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3(x) \times \frac{1}{\cos^2(x)}dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3(x) \times \left(\tan^2(x)+1\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{4}\left(\tan^4(x)\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{4}\left(\tan^4\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan^4\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{3}\right)^4 - 1^4\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Définition/Propriétés VI.0.9 (étude pratique d'une fonction)
Le plan d'étude d'une fonction f est en général le suivant :

- Détermination du domaine de définition de f
- Réduction éventuelles du domaine d'étude selon les propriétés de f (parité, périodicité, etc.)
- Limites aux bornes du domaine d'étude
- Etude de la monotonie (le plus souvent,mais pas uniquement, après calcul de la dérivée de f et détermination du signe de celle-ci)
- Construction du tableau de variation de f(limites aux bornes, valeurs remarquables, variations)
- Tracé de la courbe représentative de f

Définition/Propriétés VI.0.10 (dérivées d'odre supériéur)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles.
On note
$$f^{(0)} = f$$
puis, pour tout entier naturel k tel que la fonction$f^{(k)}$ existe et est déribable sur I, on pose :
$$f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$$
Si n est un entier naturel, tel que la fonction $f^{(n)}$ existe alors on dit que f est n-fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est la dérivée d'ordre n (ou dérivée n-ième) de f.

Définition VI.0.11 (Fonction réciproque)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans J Si, pour tout y de J, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution x dans I notée $x = f^{-1}(y)$ alors :

- la fonction f est dite bijection de I sur J
- la fonction f^{-1} ainsi définie sur J et à valeurs dans I, est dite bijection réciproque de f.

Exemples :

- $\sqrt{}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ de bijection réciproque $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$.
- exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de bijection réciproque la fonction ln

Propriétés VI.0.12 (Propriétés de la bijection réciproque)
Si f est une bijection de I sur J de bijection réciproque notée f^{-1} alors on a :

(1) pour tout x de I, $f(f^{-1}(x)) = x$;
(2) pour tout y de J, $f^{-1}(f(y)) = y$.

Définition/Propriétés VI.0.13 (représentation graphique)
on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Si f est une bijection de I sur J alors la courbe représentative de f et de sa bijection réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Définition/Propriétés VI.0.14 (dérivée de la bijection réciproque)
Soit f une bijection de I sur J et si f est dérivable sur I alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en tout point y de J tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ avec, dasn ce cas :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Démonstration
Soit f une bijection de I sur J, soit y in J tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$.
on sait que $f(f^{-1}(y)) = y$ donc en appliquant la définition de la dérivée de fonction composée on a :

$$(f(f^{-1}(y)))' = (y)' \iff f'(f^{-1}(y)) \times (f^{-1}(y))' = 1 \iff (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \blacksquare$$

Définition/Propriétés VI.0.15 (Trois fonction usuelles trigonométriques)

- Fonction Arccos :
  La fonction Arccos est la réciproque de la fonction $c : \begin{array}{ccc} [0 ; \pi] & \longrightarrow & [-1 ; 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$ et est donc définie sur $[-1 ; 1]$ à valeurs dans $[0 ; \pi]$ et dérivable sur $]-1 ; 1[$ de dérivée :

$$\arccos' : x \longmapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Fonction Arcsin :
  La fonction Arccos est la réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1 ; 1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ et est donc définie sur $[-1 ; 1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $]-1 ; 1[$ de dérivée :

$$\arcsin' : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- <u>Fonction Arctan</u> :
  La fonction Arccos est la réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$ et est donc définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\arctan' : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration (démonstration de la dérivée de la fonction Arccos*)*
Soit $y \in [-1 ; 1]$, on note $c : \begin{array}{ccc} [0 ; \pi] & \longrightarrow & [-1 ; 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$

$$\begin{aligned} c'(c^{-1}(y)) &= -\sin(c^{-1}(y)) \\ &= -\sqrt{\sin^2(c^{-1}(y))} \qquad \text{car } c^{-1}(y) \in [0 ; \pi] \text{ donc } \sin(c^{-1}(y)) \geqslant 0 \\ &= -\sqrt{1-\cos^2(c^{-1}(y))} \\ &= -\sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

Ainsi d'après la définition de la dérivée de la bijection réciproque on a : $\text{Arccos}'(y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ ■

Remarque VI.0.16 (démonstration d'une relation intéressante entre $\text{Arctan}(x)$ *et* $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$*)*
Soit $f : x \longmapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$, on as $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et f dérivable sur D_f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{Arctan}'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \\ &= \frac{-1}{x^2+1} \end{aligned}$$

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ f'(x) = -\text{Arctan}'(x)$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f'(x) + \text{Arctan}'(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ (f(x) + \text{Arctan}(x))' = 0$
Ainsi il existe c un réel tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f(x) + \text{Arctan}(x) = c$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x = 1, f(1) + \text{Arctan}(1) &= c \\ f(1) + \frac{\pi}{4} &= c \\ c &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\,(x) = \frac{\pi}{2}$

De manière analogue on trouve $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \;\; \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\,(x) = -\frac{\pi}{2}$

Chapitre 3

Calcul algébrique (rappels et compléments)

Sommaire

I Sommes et produit finis

Notation I.0.1
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par un ensemble I fini.
La somme (resp. le produit) de tous les réels de la famille est notée $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ (resp. $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$).

- Si I est l'ensemble vide, on convient que : $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i = 1$.
- Si $I = \{1, 2, \dots, n\}$ avec n un entier naturel non nul, on note $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ ou $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$ au lieu de $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ (resp. $prod_{i=1}^{n} a_i$ ou $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$ au lieu de $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$).

Propriétés I.0.2 (opération et calcul par paquets)

- Pour toutes familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ de réels indexées par I et pour tout couple(α, β) de réels, on a :

$$\sum_{i\in I} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \sum_{i\in I} a_i + \beta \sum_{i\in I} b_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} (a_i b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{b_i}\right)$$

- Pour toute famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels indexée par I avec $I = I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} a_i = \prod_{i\in I_1} a_i \prod_{i\in I_2} a_i$$

Exercice/Exemple I.0.3

Calculer : $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$ avec $n \in \mathbb{N}$

Correction I.0.4

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{2k+1}(2k-+) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k}(2k) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) + \sum_{k=1}^{n} 2k \\
&= -\left(2\sum_{k=0}^{n-1} k + n\right) + 2\sum_{k=1}^{n} k \\
&= -\left(2\frac{(n-1)n}{2} + n\right) + 2\frac{n(n+1)}{2} \\
&= n\,(n+1-n+1-1) \\
&= n
\end{aligned}$$

Définition/Propriétés I.0.5 (téléscopage)
Soit $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de réels avec n supérieur ou égal à 2.

(1) La somme $\sum_{i=1}^{n} b_{i+1} - b_i$ est dire somme télescopique et vaut $b_{n+1} - b_1$.

(2) Si tous les b_i sont non nuls, le produit $\prod_{i=1}^{n} \frac{b_{i+1}}{b_i}$ est dit produit télescopique et vaut $\frac{b_{n+1}}{b_1}$.

Définition/Propriétés I.0.6 (Somme usuelles)
Pour tout entier naturel n et tout réel x différent de 1, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

- Démonstration de $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = n^2 \qquad (*) \qquad \text{(télescopage)}$$

donc via $(*)$ on as :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = n^2 &\iff \sum_{k=1}^{n}(k^2 - k^2 + 2k - 1) = n^2 \\
&\iff 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n = n^2 \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

- Démonstration, via un raisonnement similaire, de $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$, on as :

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3 - (k-1)^3) = n^3 \qquad (*) \qquad \text{(télescopage)}$$

donc via $(*)$ on as :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k^3 - (k-1)^3) = n^3 &\iff \sum_{k=1}^{n}(k^3 - k^3 + 3k^2 - 3k + 1) = n^3 \\
&\iff \sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3 \\
&\iff 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n = n^3 \\
&\iff 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n + n^3 \\
&\iff 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{3n(n+1) - 2n + 2n^3}{2} \\
&\iff 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{n(2n+1)(n+1)}{2} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}
\end{aligned}$$

- Démonstration, via un raisonnement similaire, de $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, on as :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k - x^{k+1} = 1 - x^{n+1} \qquad (*) \qquad \text{(télescopage)}$$

■

donc via $(*)$ on as :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} x^k - x^{k+1} = 1 - x^{n+1} &\iff \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} x^{k+1}\right) = 1 - x^{n+1} \\
&\iff \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) - x\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = 1 - x^{n+1} \\
&\iff (1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) 1 - x^{n+1} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}
\end{aligned}$$

Définition/Propriétés I.0.7 (Factorisation de $a^n - b^n$)
Pour tout n entier naturel non nul et tout couple (a, b) de réels, on a :

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}
\end{aligned}$$

Démonstration (preuve par téléscopage)
Pour tout n entier naturel non nul et tout couple (a, b) de réels, on a :

$$
\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^{n-1-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{n-(k)}b^k - a^{n-(k+1)}b^{k+1}\right) \\
&= a^n b^0 - a^0 b^n \qquad \text{(télescopage)} \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}
$$

Définition/Propriétés I.0.8 (coefficients binomiaux)
Soit n un entier naturel non et k entière relatif, on a :

(1) $\binom{k}{n} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} & \text{si } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0 & \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n \end{cases}$

(2) $\binom{k}{n} = \binom{n-k}{n}$ (symétrie)

(3) $\binom{k}{n} + \binom{k+1}{n} = \binom{k+1}{n+1}$ (relation de Pascal)

(4) $\binom{k}{n}$ est un entier naturel

Définition/Propriétés I.0.9 (Formule du binôme de Newton)
Pour tout couple (a, b) de réels et tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n} a^k b^{n-k}$$

Démonstration (Formule du binôme par récurrence)
Soit a et b des réels

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n} a^k b^{n-k}$

On note $P(n)$ la Propriété « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n} a^k b^{n-k}$ »

- Initialisation : $P(0)$ est vrai car $\begin{cases} (a+b)^0 & = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} a^k b^{-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 & = 1 \end{cases}$
- Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vrai, Montrons que $P(n+1)$ est vrai :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^k b^{n-k} \qquad \text{(Hérédité)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \left(a^{k+1} b^{n-k} + a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{k-1}{n} a^{k+1} b^{n-(k-1)} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} a^k b^{n+1-k} + \binom{0}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n+1} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n+1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{n+1} a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ vrai ■

II Cas des sommes doubles finies

Définition II.0.1

Soit A un ensemble fini de couples et $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ une famille de réels indexée par A. La somme de tous les réels de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ est notée $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ et appelée somme double.

Remarque : Si A est l'ensemble vide, on convient que $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j} = 0$

Définition/Propriétés II.0.2 (Sommes double rectangulaires)

Dans le cas où $A = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ avec n et m des entiers naturels non nuls,

- la somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ est rectangulaire

- le somme double $\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ s'écrit aussi $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j}$
- la somme double $\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ vaut :

$$sum_{(i,j)\in A} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

- si $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(c_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ sont des familles finies de réels, alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} b_i c_j$$

Définition/Propriétés II.0.3 (somme double triangulaire)
Dans le cas où $A = \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 | 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\right\}$ avec n un entier naturel non nul,

- La somme double $\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ est dite triangulaire.
- La somme double $\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ s'écrit aussi $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$ et vaut :

$$\sum_{(i,j)\in A} a_{i,i} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)$$

III Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Définition/Propriétés III.0.1 (rappel de première)
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, toute droite D admet une équation de la forme

$$ax + by = c$$

où a, b et c sont des réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$.
Avec ces notations,

- le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a,b) est un vecteur normal à D ;
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b,a)$ est un vecteur directeur de D.

Définition/Propriétés III.0.2 (Système linéaire de deux équations à deux inconnues)
Soit a, b, c, a', b' et c' des réels. Le système d'équations

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

d'inconnues les réels x et y est dit système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Définition/Propriétés III.0.3 (Interprétation géométrique)
Dans le cas où $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$, résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection entre deux droites D et D' du plan. Trois cas se présentent :

- Les droites sont confondues donc (S) a une infinité de solutions qui forment une droite ;
- Les droites sont sécantes donc (S) a une unique solution ;
- Les droites sont parallèles non confondues donc (S) n'a pas de solutions.

IV Système linéaire de trois équations à trois inconnues

Définition/Propriétés IV.0.1 (rappel de terminale)
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout plan P admet une équation de la forme

$$ax + by + cz = d$$

où a, b, c et d sont des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

- le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a, b, c) est un vecteur normal à P ;
- deux vecteurs non colinéaires pris parmi les vecteurs de coordonnées $(-b, a, 0)$, $(0, -c, b)$ et $(-c, 0, a)$ donnent la direction de P.

Définition/Propriétés IV.0.2 (Système linéaire de deux équations à trois inconnues)
Soit a, b, c, d, a', b', c' et d' des réels. Le système d'équations

$$(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

d'inconnues les réels x, y et z est dit système linéaire de deux équations à trois inconnues.

Définition/Propriétés IV.0.3 (Interprétation géométrique)
Dans le cas où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection entre deux plans P et P' de l'espace. Trois cas se présentent :

- Les plans sont confondus donc (S) a une infinité de solutions qui forment un plan ;
- Les plans sont sécants donc (S) a une infinité de solutions qui forment une droite ;
- Les plans sont parallèles non confondus donc (S) n'a pas de solutions.

Définition/Propriétés IV.0.4 (Système linéaire de trois équations à trois inconnues)
Soit a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'' et d'' des réels. Le système d'équations

$$(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

d'inconnues les réels x, y et z est dit système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Définition/Propriétés IV.0.5 (Interprétation géométrique)
Dans le cas où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ et $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$, résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection entre trois plans P, P' et P'' de l'espace. Cela conduit à distinguer huit cas de figures qui donnent quatre types d'ensemble-solution pour (S) :

- Le système (S) a une infinité de solutions qui forment un plan ;
- Le système (S) a une infinité de solutions qui forment une droite ;
- Le système (S) a une unique solution ;
- Le système (S) n'a pas de solutions.

V Algorithme du Pivot

Remarque V.0.1 (Remarque préliminaire)
En cycle terminal, de petits systèmes linéaires ont été rencontrés et résolus dans des cas simples, le plus souvent par "substitution".
En MP2I, nous utiliserons en priorité la méthode de résolution par "pivot". Plus efficace et élégante, cette technique sera reprise au semestre 2 dans le chapitre "Matrices" pour résoudre plus généralement des systèmes linéaires de n équations à p inconnues.

Définition/Propriétés V.0.2 (Opérations élémentaires)
On reprend les notations des paragraphes III. et IV. et on note L_i la i-ème ligne du système (S).
On appelle opérations élémentaires sur les lignes du système linéaire (S) :

(1) l'échange de deux lignes distinctes : $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$;
(2) la multiplication d'une ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$;
(3) l'addition à une ligne du produit d'une autre ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$ et $\lambda \neq 0$.

Propriétés V.0.3 (Propriété importante)
Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire le transforme en un système linéaire équivalent c'est-à-dire un système ayant le même ensemble de solutions.

Définition/Propriétés V.0.4 (résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot)
La résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot se déroule en deux phases :

- phase de descente : en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes du système, on transforme le système en un système de forme "triangulaire" ou "trapézoïdale" comme, par exemple,

$$(S1) : \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ b'_1 y = c'_1 \end{cases}$$

$$(S2) : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ b'_1 y + c'_1 z = d'_1 \end{cases}$$

$$(S3) : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ b'_1 y + c'_1 z = d'_1 \\ c''_1 z = d''_1 \end{cases}$$

- phase de remontée : Le système obtenu est équivalent au système initial ; il est facile à résoudre ce qui permet d'obtenir l'ensemble des solutions du système initial. Dans cette phase de remontée, on peut au choix :
  - effectuer des substitutions successives (moins élégant) ;
  - utiliser à nouveau des opérations élémentaires sur les lignes pour réduire le système sous forme "diagonale" (plus élégant et facile à coder).

Remarque V.0.5
Les opérations élémentaires effectuées lors de la résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot (phases de descente et de remontée) doivent systématiquement être indiquées en marge du système étudié pour faciliter la lecture des correcteurs et permettre de retrouver les éventuelles erreurs de calcul.

Remarque V.0.6 (Pour aller plus loin (pour ceux qui ont suivi l'option maths expertes))

- Les petits systèmes linéaires décrits au III. et IV. peuvent se traduire matriciellement par une équation matricielle du type $AX = B$ avec A et B des matrices à préciser et X une matrice colonne inconnue.
- L'effet des opérations élémentaires sur les lignes de ces systèmes peut se traduire matriciellement par des multiplications de la matrice A à gauche par des matrices inversibles bien

Chapitre 4

Nombres complexes

Sommaire

I Généralité

Définition I.0.1 (Propriété de $\mathbb{C}$)
On ADMET l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés nombres complexes, tel que :

(1) $\mathbb{C}$ contient$\mathbb{R}$

(2) $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$ qui étendent les opérations $+$ et $\times$ connues sur $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul que celles-ci

(3) $\mathbb{C}$ contient un élément noté i vérifiant $i^2 = -1$

(4) Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière uneique sous la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Remarque I.0.2

- La forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est dite forme algébrique du nombre complexe z
  - le réel a est dit partie réelle du nombre complexe z et noté $a = \mathrm{Re}\,(z)$
  - le réel b est dit partie imaginaire du nombre complexe z et noté $b = \Im z$
- L'unicité d'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique se traduit par :
  Pour tout réels a, b, a' et b', on a :

$$a + ib = a' + ib'\text{si, et seulement si, } a = a' \text{ et } b = b'$$

Définition/Propriétés I.0.3 (Opériation sur $\mathbb{C}$)
L'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est muni deux opérations + et + et × définies par, pour tout nombre complexe z de forme algébrique $a+ib$ et tout nombre complexe z' de forme algébrique $a'+ib'$:

$$\begin{cases} z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') \\ z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \end{cases}$$

Définition/Propriétés I.0.4 (Extension des résultat vus dans $\mathbb{R}$)

(1) Pour tout n entier naturel et tout nombre complexe z différent de 1, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}$$

(2) Pour tout n entier naturel et tout couple (z, z') nombres complexes , on a :

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} z^k (z')^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} z^{n-k} (z')^k$$

(3) Pour tout n entier naturel et tout couple (z, z') nombres complexes , on a :

$$z^n + (z')^n = (z - z')\left(z^{n-1} + z^{n-1}z' + \cdots + z(z')^{n-2} + (z')^{n-1}\right) = (z - z')\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}(z')^k = (z - z')\sum_{k=0}^{n-1} z^k (z')^{n-1-k}$$

Définition/Propriétés I.0.5 (Plan complexe : affixe d'un point, d'un vecteur)
Dans toute la suite, on considère le plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.

- A tout complexe z, on peut associer le point M de coordonnées $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ dit image de z.
- A tout point M de coordonnées (x, y), on peut associer le complexe $z = x + iy$ dit affixe de M .

On identifie donc $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct et on parle de "plan complexe".

A tout complexe z, on peut aussi associer le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ dit image de z et à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y), on peut associer le complexe $z = x + iy$ dit affixe de $\vec{u}$. Ainsi :

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ d'affixe z et tout réel α, le vecteur $\alpha\vec{u}$ a pour affixe αz.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ d'affixes respectives z et z', le vecteur $\vec{u} + \vec{u'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Pour tous points M et M' d'affixes respectives z et z' , le vecteur $\vec{MM'}$a pour affixe $z' - z$.

II Conugué d'un nombre complexe

Définition II.0.1
On appelle conjugué d'un nombre complexe z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe défini par :

$$\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z)$$

Pour tout nombre complexe z, le point d'affixe $\overline{z}$ et le point d'affixe z sont symétriques par rapport à l'axe des réels dans le plan complexe.

Définition/Propriétés II.0.2
Pour tous nombres complexes z et z', on a les propriétés suivantes :

(1) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(a)$

(2) $z - \overline{z} = -2\,\mathrm{Im}\,(z)$

(3) $\overline{\overline{z}} = z$

(4) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

(5) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

(6) $\overline{\dfrac{z}{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

III module d'un nombre complexe

Définition/Propriétés III.0.1
On appelle module d'un nombre complexe z et on note $|z|$ le nombre réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2}$$

Définition/Propriétés III.0.2 (interprétation géometriques)

- Pour tout nombre complexe z, le module $|z|$ est :
  - — la distance entre le point d'affixe 0 et le point d'affixe z ;
  - — la norme de tout vecteur d'affixe z
- Pour tous nombres complexes z et z' le module $|z - z'|$ est :

— la distance entre les points d'affixe z et z' ;
— la norme du vecteur d'affixe $z' - z$

- Soit r un réel positif, z_0 un nombre complexe et M_0 le point d'affixe z_0.
  — Les points du plan dont l'affixe z vérifie $|z - z_0| = r$ forment le cercle de centre M_0 et de rayon r.
  — Les points du plan dont l'affixe z vérifie $|z - z_0| \leqslant r$ forment le disque de centre M_0, de rayon r

---

Propriétés III.0.3
Pour tous nombres complexes z et z', on a les propriétés suivantes :

- $|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$
- $|z|^2 = z\overline{z}$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ Dans le cas où z' est non nul
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\,|z'|}{|z'|^2}$
- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ avec égalité si, et seulement si il existe un réel positif α tel que $z' = \alpha z$

IV Nombre complexe de module 1 et trigonométrie

Définition IV.0.1 (Cercle trigonométrique)
On identifie le cercle trigonométrique et l'ensemble des nombres complexes de module 1 que l'on note :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Définition/Propriétés IV.0.2
Pour tout nombre réel t, on appelle exponentielle imaginaire de t et on note e^{it} le nombre complexe défini par :

$$e^{it} = \cos(t) + i\,\sin(t)$$

Pour tous nombres réels t et t', on a l'égalité :

$$e^{i\,(t+t')} = e^{it}e^{it'}$$

Définition/Propriétés IV.0.3 (Formule D'Euler)
Pour tout nombre réel t, on a les égalités suivantes dites formules d'Euler

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ et } \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$$

Propriétés IV.0.4 (Technique de l'angle moitié)
La technique de l'angle moitié permet l'obtention de factorisations classiques à savoir retrouver :

- pour tout t réel, $1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}}\right) = 2\cos\left(-\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}} = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}}$
- pour tout t réel, $1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right) = 2\sin\left(-\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}} = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}}$
- pour tout réel p et q, $e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$
- pour tout réel p et q, $e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$

Remarque :
En écrivant la partie réelle et la partie imaginaire de $e^{ip} \pm e^{iq}$ à partir des deux dernières factorisations, on trouve des formules de factorisation pour $\cos(p) \pm \cos(q)$et $\sin(p) \pm \sin(q)$

Linéarisation
A l'aide des formules d'Euler et du binôme de Newton, on peut transformer une expression du type $cos(t)^n$ ou $sin(t)^n$ avec t réel et n entier naturel en une combinaison linéaire de $cos(pt)$ ou de $sin(pt)$ avec p un entier naturel. Cela est notamment utile pour du calcul de primitives.

Exercice/Exemple IV.0.5

Soit $f(x) = (\sin(x))^3$ avec $x \in \mathbb{R}$. Calculer la primitive de f

Correction IV.0.6

$$\begin{aligned}(\sin(x))^3 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{1}{-8i}\left(e^{3ix} + 3\left(e^{-ix}\right) - 3\left(e^{ix}\right) - e^{-3ix}\right) \\ &= \frac{1}{-4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\end{aligned}$$

Donc $F_\lambda(x) = \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x) + \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

Définition/Propriétés IV.0.7 (Formule de Moivre)
Pour tout nombre réel t et tout entier relatif n, on a $e^{int} = \left(e^{it}\right)^n$, c'est-à-dire :

$$\cos(nt) + i\sin(nt) = (cos(t) + i\sin(t))^n$$

Démonstration (Moivre par récurrence)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ Montrons que $\forall(n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\ \ e^{int} = \left(e^{it}\right)^n$
On note $P(n)$ la Propriété « $e^{int} = \left(e^{it}\right)^n$ »

- Initialisation : $P(0)$ est vrai car $\begin{cases} \left(e^{it}\right)^0 & = 1 \\ e^{it0} & = 1 \end{cases}$
- Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vrai, Montrons que $P(n+1)$ est vrai :

$$\begin{aligned} e^{i(n+1)t} &= e^{i(n+1)t} \\ &= e^{int} \times e^{it} \\ &= \left(e^{it}\right)^n \times e^{it} \\ &= \left(e^{it}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ Vrai. ■

Application IV.0.8 (Applications usuelles importantes)

Soit $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $S = \sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$
On Obtient des expressions simplifiées des sommes C et S par le calcul annexe suivant

$$C + iS = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{it}\right)^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } t \equiv 0\ [2\pi] \\ \dfrac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} & \text{sinon} \end{cases}$$

qui donne

$$C + iS = \begin{cases} n+1 & \text{si } t \equiv 0\ [2\pi] \\ \dfrac{\left(1-e^{i(n+1)t}\right)\left(1-e^{it}\right)}{2\left(1-\cos(t)\right)} & \text{sinon} \end{cases}$$

On conclut alors sur les valeurs de C et S en exhibant les parties réelle et imaginaire de $C + iS$.

V Forme trigonométrique pour les nombres complexes non nuls

Définition/Propriétés V.0.1
Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme

$$z = re^{i\theta}$$

avec r un réel strictement positif et θ un réel. Cette écriture est dite forme trigonométrique de z.
Attention
Dans cette écriture de z.

- le réel strictement positif r est unique car il est nécessairement égal à $|z|$
- le réel θ n'est pas unique car si le réel θ convient alors les réels $\theta' \equiv \theta\ [2\pi]$ conviennent.

Démonstration
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors $|z| \neq 0$ donc $\dfrac{z}{|z|}$ existe avec $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{|z|}{||z||} = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$
Donc $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta} \iff z = |z|\, e^{i\theta}$
Ceci prouve l'existence de l'écriture.
r est unique car : $\begin{cases} z &= re^{i\theta} \\ z &= r'e^{i\theta} \end{cases} \implies \begin{cases} |z| &= r \\ |z| &= r' \end{cases} \implies r = r'$ ■

Définition/Propriétés V.0.2 (Arguments)
Soit z un nombre complexe non nul. Tous les nombres réels θ tels que z peut s'écrire

$$z = re^{i\theta}$$

avec r réel strictement positif sont dits arguments de z
Remarque
Si θ est un argument de z complexe non nul, on peut écrire $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

Propriétés V.0.3
Pour tous nombres complexes non nuls z et z', on a :

(1) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

(2) $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

Définition/Propriétés V.0.4 (Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \varphi)$)
Soit a, b et t des nombres réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On peut écrire

$$a\cos(t) + b\sin(t) = \mathrm{Re}\left((a - ib)\left(\cos(t) + i\sin(t)\right)\right) = \mathrm{Re}\left((a - ib)e^{it}\right)$$

puis $a - ib = Ae^{-i\varphi}$ avec A réel strictement positif et φ un réel ce qui donne :

$$a\cos(t) + b\sin(t) = \mathrm{Re}\left((a - ib)e^{it}\right) = \mathrm{Re}\left(Ae^{i(t-\varphi)}\right)$$

Donc $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi)$

VI Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes

Définition VI.0.1
Une fonction de variable réelle à valeurs complexes notée f est un objet mathématique qui, tout élément x d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, associe un et un seul nombre complexes noté $f(x)$.

Définition/Propriétés VI.0.2 (Ce qui s'étend aux fonctions de variable réelle à valeurs comple

- Notation fonctionnelle
- Domaine de définition
- Image d'un réel, antécédent d'un complexe
- Parité, imparité, périodicité
- Somme, produit, quotient de fonctions et multiplication d'une fonction par un complexe
- Dérivation

Définition/Propriétés VI.0.3 (Ce qui ne s'étend pas aux fonctions de variable réelle à valeurs c

- Composition de fonctions
- Monotonie
- Fonction majorée, minorée ou bornée
- Fonction réciproque

Définition/Propriétés VI.0.4 (Dérivation)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit f une fonction définie sur I à valeurs complexe.
On note $\mathrm{Re}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles définies par :

$$\forall x \in I, \quad (\mathrm{Re}(f))(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \text{ et } (\mathrm{Im}(f))(x) = \mathrm{Im}(f(x))$$

On dit que :

- f est dérivable en x_0 si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en x_0
- f est dérivable sur I si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur I

Selon le cas de figure, on appelle :

- nombre dérvée de f en x_0 et on note $f'(x_0)$ le nombre complexe suivant :
$$f'(x_0) = \left(\mathrm{Re}(f)'(x_0)\right) + \left(\mathrm{Im}(f)'(x_0)\right)$$
- fonction dérivée de f sur I et on note f' la fonction de variable réelle à valeurs complexes suivante :
$$f' = \left(\mathrm{Re}(f)'\right) + \left(\mathrm{Im}(f)'\right)$$

Propriétés VI.0.5

(1) Combinaison linéaire
Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs complexes et (α, β) un couple de complexes. Si f et g sont dérivables sur I alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

(2) Produit
Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs complexes . Si f et g sont dérivables sur I alors fg est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :
$$(fg)' = f'g + fg'$$

(3) Quotient
Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs complexes tel que g ne s'annule pas sur I. Si f et g sont dérivables sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Application VI.0.6 (exemple important)
Soit φ une fonction définie sur I à valeurs complexes. On note $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie sur I par :
$$\forall t \in I, f(t) = e^{\mathrm{Re}(\varphi(t))} e^{i\,\mathrm{Im}(\varphi(t))}$$
Si φ est dérivable sur I alors f est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :
$$\forall t \in I, f'(t) = \varphi'(t) f(t)$$

Remarque
La fonction f sera aussi notée $f = \exp(\varphi)$ après étude de l'exponentielle complexe dans le chapitre « Nombres complexes (2) » ce qui permettra d'écrire $(\exp(\varphi))' = \varphi' \exp(\varphi)$ et donc d'étendre une propriété déjà connue dans le cas où φ est à valeurs réelles.

Chapitre 5

Fonctions usuelles : Rappel et complément

Sommaire

I Fonction exponentielle

Définition/Propriétés I.0.1
Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$
Cette fonction, appelée fonction exponentielle et notée $x \longmapsto \exp(x)$ ou $x \longmapsto e^x$ vérifie :

- Pour tout x et y des réels, $e^{x+y} = e^x e^y$
- Pour tout x réel, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- Pour tout x réel et tout n entier relatif, $e^{nx} = (e^x)^n$
- Pour tout x réel, $e^x > 0$
- La fonction exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La dérivée de exp sur $\mathbb{R}$ est exp.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- pour tout réel x, $e^x \geqslant 1 + x$

II Fonction logarithmes

Définition/Propriétés II.0.1
La fonction réciproque de la fonction exponentielle est appelée fonction logarithme népérien et notée ln .
Elle vérifie :

- pour tous x et y réels strictement positifs, $\ell n(xy) = \ell n(x) + \ell n(y)$
- pour tout x réel strictement positif, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln(1) = 0$
- pour tout x réel strictement positif et tout n entier relatif, $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- la fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- la dérivée de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \frac{1}{x}$.
- la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \geqslant x$

Définition/Propriétés II.0.2 (logarithme en base 2 et en base 10)
Les fonctions logarithme en base 2, notée $\log_2$, et logarithme en base 10 notée $\log_{10}$ sont définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par, pour tout réel x strictement positif :

$$\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \text{ et } \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

On as aussi :

- $\log_2(2) = 1$ et $\log_{10}(10) = 1$
- pour tout x entier relatif, $\log_2(2^n) = n$ et $\log_{10}(10^n) = n$
- $\log_2$ et $\log_{10}$ ont même monotonie et même limites aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$ que la fonction ln

III Fonctions hyperboliques

Définition/Propriétés III.0.1

(1) On appelle cosinus hyperbolique la fonction, notée ch définie $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel,

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(2) On appelle sinus hyperbolique la fonction, notée sh définie $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel,

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Définition/Propriétés III.0.2 (Relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique)
Pour tout réel x,on a :

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

Démonstration

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))\,(\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)) = (e^x)\,(e^{-x}) = e^0 = 1$$ ■

Définition/Propriétés III.0.3 (étude de la fonction ch)

(1) La fonction ch est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

(2) la dérivée de ch sur $\mathbb{R}$ est la fonction sh

(3) la fonction ch est paire avec $\operatorname{ch}(0) = 1$

(4) la fonction ch est :

  (a) strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$

  (b) strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

(5) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$

(6) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$

Définition/Propriétés III.0.4 (étude de la fonction sh)

(1) La fonction sh est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

(2) la dérivée de sh sur $\mathbb{R}$ est la fonction ch

(3) la fonction sh est impaire avec $\operatorname{sh}(0) = 0$

(4) la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(5) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$

(6) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$

IV Tangente hyperbolique

Définition/Propriétés IV.0.1
On appelle tangente hyperbolique la fonction, notée, th, définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

.

Définition/Propriétés IV.0.2 (étude de la fonction th)

(1) La fonction th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

(2) la dérivée de th sur $\mathbb{R}$ est la fonction $1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$

(3) la fonction th est impaire avec donc $\operatorname{th}(0) = 0$

(4) la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(5) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$

(6) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$

Définition/Propriétés IV.0.3 (formule d'addition et de duplication)
Pour tout couple de réel (a, b), on a :

(1) $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$

(2) $\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$

(3) $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)$

(4) $\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)$

(5) $\operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$

(6) $\operatorname{th}(a-b) = \dfrac{\operatorname{th}(a) - \operatorname{th}(b)}{1 - \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$

(7) $\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2(a) - \operatorname{sh}^2(a) = 2\operatorname{ch}^2(a) - 1 = 2\operatorname{sh}^2(a) + 1$

(8) $\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(a)$

(9) $\operatorname{th}(2a) = \dfrac{2\operatorname{th}(a)}{1 + \operatorname{th}^2(a)}$

V Arccos

Définition/Propriétés V.0.1
La fonction $c : [0\ ;\ \pi] \longrightarrow [-1\ ;\ 1]$ définie par :

$$\text{Pour tout } x \text{ dans },\ c(x) = \cos(x)$$

est une bijection de $[0\ ;\ \pi]$ sur $[-1\ ;\ 1]$ de bijection réciproque $c^{-1} : [-1\ ;\ 1] \longrightarrow [0\ ;\ \pi]$ notée Arccos
Autrement dit :

- pour tout réel y dans $[-1\ ;\ 1]$, l'équation $y = \cos(x)$ admet une unique solution dans $[0\ ;\ \pi]$
- pour tout réel y dans $[-1\ ;\ 1]$, $\text{Arccos}(y)$ est l'unique réel de $[0\ ;\ \pi]$ donc le cosinus est égal à y

Par ailleurs la fonction Arccos possède ces propriétés :

(1) la fonction Arccos est définie sur $[-1\ ;\ 1]$ et dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$

(2) la dérivée de Arccos sur $]-1\ ;\ 1[$ est la fonction $\text{Arccos}' : x \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) la fonction Arccos est strictement décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$

VI Arcsin

Définition/Propriétés VI.0.1
La fonction $s : \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1\ ;\ 1]$ définie par :

$$\text{Pour tout } x \text{ dans },\ s(x) = \sin(x)$$

est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\ ;\ 1]$ de bijection réciproque $s^{-1} : [-1\ ;\ 1] \longrightarrow \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ notée Arcsin
Autrement dit :

- pour tout réel y dans $[-1\ ;\ 1]$, l'équation $y = \sin(x)$ admet une unique solution dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$
- pour tout réel y dans $[-1\ ;\ 1]$, $\text{Arcsin}(y)$ est l'unique réel de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc le sinus est égal à y

Par ailleurs la fonction Arcsin possède ces propriétés :

(1) la fonction Arcsin est définie sur $[-1\ ;\ 1]$ et dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$

(2) la dérivée de Arcsin sur $]-1\ ;\ 1[$ est la fonction $\text{Arcsin}' : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) la fonction Arcsin est impaire sur $]-1\ ;\ 1[$

(4) la fonction Arcsin est strictement croissante sur $[-1\ ;\ 1]$

VII Arctan

Définition/Propriétés VII.0.1

La fonction $t : \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\text{Pour tout } x \text{ dans }, t(x) = \tan(x)$$

est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ de bijection réciproque $t^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ notée Arctan
Autrement dit :

- pour tout réel y dans $\mathbb{R}$, l'équation $y = \tan(x)$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$
- pour tout réel y dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}(y)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ donc la tangente est égal à y

Par ailleurs la fonction Arctan possède ces propriétés :

(1) la fonction Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

(2) la dérivée de Arctan sur $\mathbb{R}$ est la fonction $\mathrm{Arctan}' : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

(3) la fonction Arctan est impaire sur $\mathbb{R}$

(4) la fonction Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(5) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{Arctan}(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

(6) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$

VIII Fonction puissances réelles

Définition VIII.0.1
Soit α un réel.

La fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)}$$

est notée $f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ et appelée fonction puissances (réelle). Elle respecte ces propriétés :

- la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
- la dérivée de $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$
- la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est :
  - strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha > 0$
  - strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha < 0$

- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{pour } \alpha < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{pour } \alpha > 0 \\ 0 & \text{pour } \alpha < 0 \end{cases}$

Propriétés VIII.0.2
Pour tout couple de réels α, β et tout couple de réels strictement positifs (x, y), on a :

$$\ln(x^{\alpha}) = \alpha \ln(x) \qquad (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} \qquad x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} \qquad (x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$$

Définition/Propriétés VIII.0.3 (cas particulier des puissances entières)
Les fonctions vues ci-dessus étendent les notions de puissances entières déjà connues sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$:

- pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \longmapsto \prod_{k=1}^{n} x$ est notée $x \longmapsto x^n$
  elle est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$
- pour tout entier relatif strictement négatif n, la fonction $f_n : x \longmapsto \prod_{k=1}^{-n} x^{-1}$ est notée $x \longmapsto x^n$
  elle est définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$

IX croissance comparées

Définition/Propriétés IX.0.1 (Cas des fonctions $x \longrightarrow \ln(x), x \longrightarrow x^{\alpha}$ et $x \longrightarrow e^x$ avec $\alpha > 0$)
Pour tout α réel strictement positif, lems croissances comparées des fonctions $x \longmapsto \ln(x), x \longmapsto x^{\alpha}$ et $x \longmapsto e^x$ se résument à :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} x^{\alpha} \ln(x) = 0$$

Remarques : On en déduit les croissances comparées en $+\infty$ des fonctions précédentes prises deux à deux :

- comparaison du logarithme népérien avec les puissances réelles ou l'exponentielle en $+\infty$:
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$$
- comparaison des puissances réelles avec le logarithme népérien ou l'exponentielle en $+\infty$
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha}}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^x} = 0$$
- comparaison de l'exponentielle avec le logarithme népérien ou les puissances réelles en $+\infty$
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = \alpha$$

Définition/Propriétés IX.0.2 (Cas des fonctions $x \longrightarrow |\ln(x)|^{\beta}, x \longrightarrow x^{\alpha}$et $x \longrightarrow e^{\gamma x}$)
Pour tous réels strictement positifs α, β et γ, les croissances comparées des fonctions $x \longmapsto |\ln(x)|^{\beta}, x \longmapsto x^{\alpha}$et $x \longmapsto e^{\gamma x}$ se résument à :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{|\ln(x)|^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{\gamma x}} = 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} x^{\alpha} |\ln(x)|^{\beta} = 0$$

Chapitre 6

Nombres complexes (2)

Sommaire

I Équations algébreiques

I.1 Préliminaires

Définition I.1.1 (Définition d'une fonction polynomiale)
Une fonction $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite fonction polynomiale à coefficients complexes s'il existe un entier naturel n et un $n+1$-uplet de nombres complexes $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ tel que pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$P(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$$

Propriétés I.1.2 (Propriétés de factorisation)
Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes et a un nombre complexe.
Si a est une racine de P , autrement dit si $P(a) = 0$, alors il existe une fonction polynomiale à coefficients complexes Q tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

I.2 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition/Propriétés I.2.1 (cas particulier des équations du type $z^2 = z_0$)
Soit z_0 et z des nombres complexes de formes algébriques respectives $x_0 + iy_0$ et $x + iy$

$$z^2 = z_0 \text{ six et seulement si }, \begin{cases} x^2 - y^2 & = x_0 \\ x^2 + y^2 & = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ 2xy & = y_0 \end{cases}$$

Définition/Propriétés I.2.2 (Cas général)
soit a, b et c des nombres complexes avec a non nul.

- <u>Racines</u>
  Les solutions de l'équations polynomiale $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue le nombre complexe z sont :

  $$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

  où δ est une "racine carré" de $\Delta = b^2 - 4ac$, autrement dit où δ est un nombre complexe vérifiant :

  $$\delta^2 = \Delta$$

- <u>Somme et produit des racines (formules de Viète)</u>
  Les racines z_1 et z_2 de la fonction polynomiale $P : z \longmapsto az^2 + bz + c$ vérifient :

  $$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration (Formule des solutions du cas général)
soit a, b et c des nombres complexes avec a non nul.
Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right) && \text{on pose } \Delta = b^2 - 4ac \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) && \text{on pose } \delta \text{ comme étant la "racine carré" de } \Delta \\
&= a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) \\
&= a\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right) \text{ avec } \begin{cases} z_1 &= \dfrac{-b - \delta}{2a} \\ z_2 &= \dfrac{-b + \delta}{2a} \end{cases}
\end{aligned}$$

Démonstration (Formule de viète)
soit a, b et c des nombres complexes avec a non nul.
Soit $P : z \longmapsto az^2 + bz + c$

$$P(z) = az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = a(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2)$$

donc par identification :

$$\begin{cases} b &= -a(z_1 + z_2) \\ c &= az_1 z_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{b}{a} &= z_1 + z_2 \\ \dfrac{c}{a} &= z_1 z_2 \end{cases}$$

■

I.3 Résolution des équations du type $z^n = z_0$ dans $\mathbb{C}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Définition I.3.1
Soit n un entier naturel non nul et z_0 un nombre complexe.
On appelle racine n- ième de z_0 tout nombre complexe tel que $z^n = z_0$

Définition/Propriétés I.3.2 (Cas particulier où $z_0 = 1$)

- Racines

  Il y a n racine n-ième de l'unité qui sont les nombres complexes suivants :

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0\,;n-1]\!]$$

- L'ensemble des raicnes

  — L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{R} \mid z^n = 1\}$$

  — Les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, de centre O et inscrit dans $\mathbb{U}$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$

$z = 0$ n'est pas solution donc $\exists (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \ z = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
z^n = 1 &\iff r^n e^{i\theta n} = 1e^{i\times 0} \\
&\iff \begin{cases} r^n & = 1 \\ n\theta & \equiv 0[2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r & = 1 \\ \theta \equiv 0 \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] & \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi $S = \mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{k2\pi}{n}} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

On note $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ k & \longmapsto & e^{i\frac{k2\pi}{n}} \end{array}$ alors on sait que f est n périodique car $\forall k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} k+n & \in \mathbb{Z} \\ k-n & \in \mathbb{Z} \end{cases}$ et

$$\begin{aligned}
f(k+n) &= e^{i\frac{2(k+n)\pi}{n}} \\
&= e^{i\frac{2k\pi}{n}} \times e^{i\frac{2n\pi}{n}} \\
&= e^{i\frac{2k\pi}{n}} \times 1 \\
&= f(k)
\end{aligned}$$

Donc $S = \mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{k2\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}$.

Montrons que $\mathbb{U}_n$ contient n élément autrement dit que :

$$\forall (k, k') \in [\![0\,;n-1]\!]^2,\ \ k < k',\ \ \Longrightarrow\ e^{i\frac{k2\pi}{n}} \neq e^{i\frac{k'2\pi}{n}}$$

Par l'absurde :

Soit k et k' dans $[\![0\,;n-1]\!]$ avec $k < k'$, supposons que $e^{i\frac{k2\pi}{n}} = e^{i\frac{k'2\pi}{n}}$

alors $\dfrac{k2\pi}{n} \equiv \dfrac{k'2\pi}{n}\ [2\pi]$
donc il existe $k'' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{k2\pi}{n} - \dfrac{k'2\pi}{n} = 2k''\pi$ car $k'-k>0$
Ainsi $k'-k = nk''$ avec $\begin{cases} k'-k \in [\![1\ ;\ n-1]\!] & \text{car } 0 \leqslant k < k' \leqslant n-1 \\ nk'' \in [\![n\ ;\ +\infty[\![& \text{car } k'' \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
Ce qui est absurde et prouve que $e^{i\frac{k2\pi}{n}} \neq e^{i\frac{k'2\pi}{n}}$
$\boxed{\text{conclusion}}$
Il y as exactement n racine n-ièmes de l'unité qui sont les $\omega_k = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$ ■

Définition/Propriétés I.3.3 (Cas général)
Il y a n racines n- ièmes pour le nombre complexe non nul z_0 de forme trigonométrique $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ qui sont les nombres complexes suivants :

$$\sqrt[n]{r_0}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in [\![0\ ;\ n-1]\!]$$

Exemple I.3.4

$$\mathbb{U}_3 = \left\{1, \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right), \exp\left(\frac{4i\pi}{3}\right)\right\}$$

$$\mathbb{U}_4 = \left\{1, \exp\left(\frac{2i\pi}{4}\right), \exp\left(\frac{4i\pi}{4}\right), \exp\left(\frac{6i\pi}{4}\right)\right\} = \{1, i, -1, -i\}$$

$$\mathbb{U}_4 = \left\{1, \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right), \exp\left(\frac{4i\pi}{5}\right), \exp\left(\frac{6i\pi}{5}\right), \exp\left(\frac{8i\pi}{5}\right)\right\}$$

II Exponentielle complexe

Définition II.0.1
Pour tout nombre complexe z, on appelle exponentielle de z le nombre complexe noté e^z le nombre complexe e^z défini par :

$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$$

dont le module est $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et les arguments vérrfient $\arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}\,(z)\ [2\pi]$

Propriétés II.0.2
Soit un couple de nombres complexe (z, z')

- on as l'égalité suivante :
$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$
on en déduit les propriétés suivantes :
  — $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
  — pour tout entier relatif n, on a : $e^{nz} = (e^z)^n$
- $e^z = e^{z'}$ si et seulement si, $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$ en notant $2i\pi\mathbb{Z} = \{2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Définition/Propriétés II.0.3 (Résolution de l'équations $e^z = a$ avec a un nombre complexe)
Soit a un nombre complexe.

- Si a est nul alors l'équation $e^z = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$
- Si a est non nul alors l'équation $e^z = a$ possède une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont les nombres complexes
$$z = \ln(z) + i\theta$$
avec r le module de a et θ un argument de a.

III Interprétations géométriques

Définition/Propriétés III.0.1 (Module et arguments de $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$)
Soit ω, z et z' des nombres complexes tel que $\omega \neq z$ et $\omega \neq z'$ de points images notés Ω, M et M'.
Alors :
$$\left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = \frac{\Omega M'}{\Omega M} \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) [2\pi]$$

Définition/Propriétés III.0.2 (Traduction de l'alignement et l'orthogonalité)
Soit Ω, M et M' trois points du plan tels que $\Omega \neq M$ et $\Omega \neq M'$ d'affixes respectivement notées ω, z et z'

- Les points Ω, M et M' sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ est un réel
- Les droites ΩM et $\Omega M'$ sont orthogonales si, et seulement si, $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ est un imaginaire pur.

Définition/Propriétés III.0.3 (Ecriture complexe de transformations du plan vues au collège)
Dans ce paragraphe, M et M' sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'.

- Translation
  Soit b un nombre complexe.
  M' est l'image par M par la translation de vecteur d'affixe b si, et seulement si
$$z' = z + b$$
- Homothétie
  Soit α un nombre réel et Ω un point du plan d'affixe ω.
  M' est l'image par M par l'Homothétie de centre Ω et de rapport α si, et seulement si
$$z' - \omega = \alpha(z - \omega)$$
- Rotation
  Soit θ un nombre réel et Ω un point du plan d'affixe ω.
  M' est l'image par M par la rotation de centre Ω et d'angle θ si, et seulement si
$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

Définition/Propriétés III.0.4 (Applicaitons $z \longrightarrow az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$)
Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.L'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par
$$f(z) = az + b$$
est dite similitude directe.
Interprétation géométrique : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $z' = f(z)$

- Cas où $a = 1$
  On a alors l'équivalence suivante : $z' = f(z)$ so et seulement si, $z' - z = b$
  L'application f est donc la translation de vecteur d'affixe b.
- Cas où $a \neq 1$
  f admet alors un point fixe ω donné par $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ dont le point image image est noté Ω
  On en déduit les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} z' = f(z) \text{ si, et seulement si, } & z' - \omega = a'(z - \omega) \\ \text{si, et seulement si, } & z' - \omega = |a| \left(e^{i\arg(a)}(z - \omega)\right) \\ \text{si, et seulement si, } & z' - \omega = e^{i\arg(a)}\left(|a|(z - \omega)\right) \end{aligned}$$

L'application f est donc la composée commutative :

- de l'Homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$
- de la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$

Définition/Propriétés III.0.5 (Applicaitons $z \longrightarrow a\overline{z} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$)
Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
L'application g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = a\overline{z} + b$$

est dite similitude indirect. Elle peut s'écrire sous la forme de la composée non commutative.

$$g = f \circ s$$

avec :

- $s : z \longmapsto \overline{z}$ qui est la symétrie axiale d'axe de la droite des réels
- $f : z \longmapsto az + b$ qui est une similitude directe.

Chapitre 7

Calcul de primitives

Sommaire

Notation .0.1

- I et J désige des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point
- $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Primitives

Définition/Propriétés I.0.1
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction quelconque.
On dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I de dérivée f
Si f admet une primitive F sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est $\{x \longmapsto F(x) + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$

Théorème I.0.2 (Théorème fondamental de l'analyse)
*Si f **CONTINUE** sur I alors :*

- *pour tout x_0 réel, la fonction $F : \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est une primitive de f sur I*
- *la fonction f admet des primitives sur I*

Définition/Propriétés I.0.3 (Application au calcul d'intégrales sur un segment)
Si f est **CONTINUE** sur I et F uine primitive de f sur I alors, pour tout réels a et b dans I, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \underset{\text{notation}}{=} [F]_b^a$$

II Primitives usuelles

Définition/Propriétés II.0.1 (Puissances entière ou réelles)

Si la fonction f est ...	alors une primitive de f est ...	sur tout intervalle I inclus dans ...
$x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}_- \setminus \{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(\lvert x \rvert)$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \longmapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$

Définition/Propriétés II.0.2 (Exponentielle à valeurs réelles ou complexes et logarithme népér

Si la fonction f est ...	alors une primitive de f est ...	sur tout intervalle I inclus dans ...
$x \longmapsto e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$

Définition/Propriétés II.0.3 (Fonctions hyperboliques)

Si la fonction f est ...	alors une primitive de f est ...	sur tout intervalle I inclus dans ...
$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto 1-\mathrm{th}^2(x)$	$x \longmapsto \mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$x \longmapsto \mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$

Définition/Propriétés II.0.4 (Fonctions circulaires et fonctions circulaires réciproques)

Si la fonction f est ...	alors une primitive de f est ...	sur tout intervalle I inclus dans ...
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto 1+\tan^2(x)$	$x \longmapsto \tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \,\middle\vert\, k\in\mathbb{Z}\right\}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \longmapsto \tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \,\middle\vert\, k\in\mathbb{Z}\right\}$
$x \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \longmapsto \mathrm{Arccos}(x)$	$]-1\,;1[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(x)$	$]-1\,;1[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$

III Calculs de primitives

Définition/Propriétés III.0.1

- Primitives d'une combinaison linéaire de fonctions
  Si $f : I \longmapsto \mathbb{K}$ et $g : I \longmapsto \mathbb{K}$ sont des fonctions qui admettent des primitives sur I notées F et G alors, pour tous α et β dans $\mathbb{K}$, la fonction$\alpha f + \beta g : I \longmapsto \mathbb{K}$ admet pour primitive sur I la fonction $\alpha F + \beta G$
- Primitives d'une fonction dérivée de fonctions composées
  Si $u : I \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I tel que pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J et si $g : J \longmapsto \mathbb{K}$ est une fonction dérivable sur I alors une primitive de la fonction $f : x \longmapsto u'(x)g'(u(x))$ sur I est la fonction $F : x \longmapsto g(u(x))$.
  Dans le tableau ci-dessous (à savoir retrouver à partir des primitives usuelles), I désigne un intervalle sur lequel u est dérivable et tel que, pour tout x de I, $u(x)$ appartient au domaine de dérivabilité de F .

Si la fonction f est ...	alors une primitive de f est ...
$x \longmapsto u'(x)\,(u(x))^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}\,(u(x))^{\alpha+1}$
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \longmapsto \ln(\lvert u(x)\rvert)$
$x \longmapsto u'(x)e^{\lambda u(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\lambda}e^{\lambda u(x)}$
$x \longmapsto u'(x)\ln(u(x))$	$x \longmapsto u(x)\ln(u(x)) - u(x)$
$x \longmapsto u'(x)\,\mathrm{ch}\,(u(x))$	$x \longmapsto \mathrm{sh}(u(x))$
$x \longmapsto u'(x)\,\mathrm{sh}\,(u(x))$	$x \longmapsto \mathrm{ch}(u(x))$
$x \longmapsto u'(x)\left(1+\mathrm{th}^2(u(x))\right)$	$x \longmapsto \mathrm{th}(u(x))$
$x \longmapsto u'(x)\cos(u(x))$	$x \longmapsto \sin(u(x))$
$x \longmapsto u'(x)\sin(u(x))$	$x \longmapsto -\cos(u(x))$
$x \longmapsto u'(x)\left(1+\tan^2(u(x))\right)$	$x \longmapsto \tan(u(x))$
$x \longmapsto \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$x \longmapsto \mathrm{Arccos}(u(x))$
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$x \longmapsto \mathrm{Arcsin}(u(x))$
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$x \longmapsto \mathrm{Arctan}(u(x))$

III.1 Deux théorème important

Définition III.1.1 (préliminaire)
Une fonction $f : I \longmapsto \mathbb{K}$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et de dérivée continue sur I

Théorème III.1.2 (Intégration par parties)
Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I alors, pour tous réels a et b dans I, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Démonstration
Soit u et v deux applications de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ alors $\forall (a,b) \in I^2$:

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (u'v + uv')(t)dt$$

$$[uv]_a^b = \int_a^b (u'v)(t)dt + \int_a^b (uv')(t)dt$$

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b (uv')(t)dt$$

■

Théorème III.1.3 (Changement de variable)
Si $\varphi : J \longmapsto \mathbb{R}$ est fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur J tel que, pour tout t de J, $\varphi(t)$ appartient à I et
Si $f : I \longmapsto \mathbb{K}$ est fonction continue sur I tel que, pour touts α et β dans J, on a :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Démonstration
Soit $\varphi : J \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur J tel que, pour tout t de J, $\varphi(t)$ appartient à I et $f : I \longmapsto \mathbb{K}$ une fonction continue sur I tel que, pour touts α et β dans J, alors :

f possède une primitive sur I (car f est continue I) que l'on note F.
On note aussi $G : t \longmapsto F(\varphi(t))$ qui est dérivable sur J par composition ainsi $G' : t \longmapsto F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int_{min}^{max} G'(t)dt \\
&= [G(t)]_\alpha^\beta \\
&= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
&= [F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx
\end{aligned}$$

■

III.2 Primitives de $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$

Définition/Propriétés III.2.1 ()

- Préliminaire
  Soit f et F des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs complexes.
  (1) f admet des primitives sur I si, et seulement si, $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ admettent des primitives sur I.
  (2) F est une primitive de f sur I si, et seulement si, $\begin{cases}\mathrm{Re}\,(F) \text{ est une primitive de } \mathrm{Re}\,(f) \text{ sur } I\\ \mathrm{Im}\,(()\,F) \text{ est une primitive de } \mathrm{Im}\,(f) \text{ sur } I\end{cases}$.
- Une application usuelle du résultat précédent
  Soit a et b des réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$.
  On note $\lambda = a + ib$ et f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel

$$f_\lambda(x) = e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx) = e^{ax}e^{bx} \underset{\text{def}}{=} e^{(a+ib)x} = e^{\lambda x}$$

  La fonction $F_\lambda : x \longmapsto \dfrac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}$ donc :
  — la fonction $\mathrm{Re}\,(F_\lambda)$ est une primitive de la fonction $\mathrm{Re}\,(F_\lambda) : x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ sur $\mathbb{R}$
  — la fonction $\mathrm{Im}\,(F_\lambda)$ est une primitive de la fonction $\mathrm{Im}\,(F_\lambda) : x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$ sur $\mathbb{R}$

III.3 Primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec a, b et c des réels et a non nul

Application III.3.1
Soit a, b et c des réels avec a non nul et g la fonction $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$
Trois cas se présentent :

(1) Si g admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors il existe deux réels α_1 et α_2 tel que :

$$\forall x \in R\backslash\{r_1, r_2\}, \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha_1}{x-r_1} + \frac{\alpha_2}{x-r_2}$$

Dans ce cas,
une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur tout intervalle I inclus dans $R\backslash\{r_1, r_2\}$ est :

$$x \longmapsto \alpha_1 \ln|x-r_1| + \alpha_2 \ln|x-r_2|$$

(2) si g admet une racine réelle double r alors il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in R\backslash\{r\}, \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha}{(x-r)^2}$$

Dans ce cas,
une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ sur tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R}\backslash\{r\}$ est :

$$x \longmapsto \frac{-\alpha}{x-r}$$

(3) Si g n'admet pas de racines réelles alors, en écrivant g sous forme canonique, on peut trouver trois réels α, β et γ tel que :

$$\forall \in \mathbb{R}, \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{\alpha}{\left(\frac{x+\beta}{\gamma}\right)^2 + 1}$$

Dans ce cas,
une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ sur tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ est :

$$x \longmapsto \alpha\gamma \arctan\left(\frac{x+\beta}{\gamma}\right)$$

Chapitre 8

Compléments sur les nombres réels

Sommaire

I Parties denses de $\mathbb{R}$

Définition/Propriétés I.0.1 (Généralité)
Une partie X de R est dite dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

En pratique :
Pour étable qu'une partie X de R est dense dans R à l'aide de cette définition, on montre que tout intervalle du type $]a\,;b[$ avec a et b des réels tel que $a < b$, contient au moins un élément de X.

Exemple I.0.2

- Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas denses dans $\mathbb{R}$
- Les ensemble $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont des parties de $\mathbb{R}$ qui sont denses dans $\mathbb{R}$

Démonstration (Preuve de Q dense dans $\mathbb{R}$)
Soit a et b des réels avec $a < b$.
Montrons que $]a\,;b[$ contient un élément de $\mathbb{Q}$, c'est à dire $\exists(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $a < \dfrac{p}{q} < b$ autrement dit $qa < p < qb$
Ainsi pour que p existe il faut que :

$$
\begin{aligned}
qa - qb &> 1 && \text{car } p \in \mathbb{Z}\\
q(a-b) &> 1\\
q &> \frac{1}{b-a} && \text{car } b > a\\
\text{Prenons } q &= \left\lfloor \frac{1}{b-a} \right\rfloor + 1 && \text{car } \frac{1}{b-a} > \left\lfloor \frac{1}{b-a} \right\rfloor + 1
\end{aligned}
$$

Prenons $p = \lfloor qa \rfloor + 1$, donc $p - 1 \leqslant qa < p$
or $p < qb$ car $q > \dfrac{1}{b-a} \iff qb - qa > 1 \iff qb > qa + 1 \geqslant \lfloor qa \rfloor + 1 = p$
Ainsi $qa < p < qb \implies a < \dfrac{p}{q} < b < b$ avec $q = \left\lfloor \dfrac{1}{b-a} \right\rfloor + 1$ et $p = \lfloor qa \rfloor + 1$.

$\boxed{\text{conclusion}}$
Tout intervalle réel de type $]a\,;\,b[$ avec $a < b$ contient un rationnel donc par définition, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Démonstration (preuve que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

- Préliminaire : Démonstration que $\sqrt{2}$ est irrationnel
  On suppose qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec p et q premier entre eux tel que $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$ alors :

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} = \sqrt{2} &\iff \sqrt{2}q = p\\
&\implies 2q^2 = p^2 && \text{donc } p^2 \text{ est pair ce qui explique } p \text{ pair}\\
&\implies 2q^2 = (2k)^2 && \text{en posant } p = 2k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\\
&\implies 2q^2 = 4k^2\\
&\implies 2k^2 = q^2 && \text{donc } q^2 \text{ est pair et donc } q \text{ aussi}
\end{aligned}
$$

  Ce qui est absurde car p et q sont premier entre eux donc ils ne peuvent pas être tous les deux pair. $\boxed{\text{conclusion}}$ $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- Preuve que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

  Soit a et b des réels avec $a < b$.
  Montrons que $]a\,;\,b[$ contient un irrationnel :
  Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\left]\dfrac{a}{\sqrt{2}}\,;\,\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right[$ contient un rationnel r
  on a donc $\dfrac{a}{\sqrt{2}} < r < \dfrac{b}{\sqrt{2}} \implies a < \sqrt{2}r < b$
  — Si $r \neq 0$
    $\sqrt{2}r \in]a\,;\,b[$ et $\sqrt{2}r$ est irrationnel car sinon $\sqrt{2}r$ serait rationnel et alors $\underbrace{\sqrt{2}r}_{\in\mathbb{Q}} \times \underbrace{\frac{1}{r}}_{\in\mathbb{Q}} = \sqrt{2}$
    donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux.
    Donc $]a\,;\,b[$ contient un irrationnel.

— Si $r = 0$

On résone de même manière mais sur avec un intervalle $]0\,;b[$ et $\left]0\,;\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right[$

Ainsi on trouve $r' \in \left]0\,;\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right[\cap \mathbb{Q}$ puis $r'\sqrt{2} \in]0\,;b[\cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$

Donc $]a\,;b[$ contient un irrationnel.

$\boxed{\text{conclusion}}$ Tout intervalle réel de type $]a\,;b[$ avec $a < b$ contient un irrationnel donc par définition, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■

Théorème I.0.3 (Caractérisation séquentiel des parties denses dans $\mathbb{R}$)
Une partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, tout réel est limite d'une suite d'élément de X

Démonstration
Soit X une partie de $\mathbb{R}$ On procède par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que X est dense dans $\mathbb{R}$, soit x un réel et $n \in \mathbb{N}$
alors $\left]x - \dfrac{1}{n+1}\,;x\right[$ contient un élément de (u_n) de X par densité de X dans $\mathbb{R}$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x - \dfrac{1}{n+1} < u_n < x$ or $x - \dfrac{1}{n+1} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$ et $x \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$ donc par théorème d'encadrement $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} x$

$\boxed{\text{conclusion}}$
tour réel x est limite d'une suite (u_n) d'élement de X

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que tout réel est limite d'une suite d'élement de X
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\ell \in]a\,;b[$
par hypothèse, il existe une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in X$ et $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \ell$
par définition de la limite, $]a\,;b[$ qui contient ℓ contient aussi tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang d'où l'existence de $\begin{cases} u_{n_0} & \in X \\ u_{n_0} & \in]a\,;b[\end{cases}$

$\boxed{\text{conclusion}}$
X est dense car pour tout $]a\,;b[$ avec $a < b$ il existe un élément (ici u_{n_0}) de X dans $]a\,;b[$

$\boxed{\text{conclusion}}$
Par double implication le théorème est vérifié ■

II Approximation décimale d'un réel

Définition/Propriétés II.0.1 (rappel)
L'ensemble des nombres décimaux est notée $\mathbb{D}$ et définie par $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{p}{10^n} \,\middle|\, (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$

Propriétés II.0.2 (Approximation décimales d'un réel)
Soit x un réel et n un entier naturel. Il existe un unique nombre décimal d_n tel que :

$$10^n d_n \in \mathbb{Z} \text{ et } d_n \leqslant x \leqslant d_n + 10^{-n}$$

Par ailleurs pour tout réel x les suites de nombres décimaux (d_n) et $(d_n + 10^{-n})$ définie ci-dessus sont convergentes de limite égal àx donc, par caractérisation séquentielle, l'ensemble $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Définition/Propriétés II.0.3 (Dévellopement décimal d'un réel)
Soit x un réel et (d_n) la suite des valeurs décimales approchées de x à 10^{-n} près par défaut.
Alors :

- Pour tout k dans Ns, il existe un unique entier a_k dans $[\![0\,;\,9]\!]$ tel que $d_k - d_{k-1} = \dfrac{a_k}{10^k}$
- Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $d_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ avec $a_0 = \lfloor x \rfloor$

Puisque la suite (d_n) converge vers x, on peut donc écrire que :

$$x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \right) \underset{Notation}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0, a_1 a_2 \ldots$$

ce qu'on appelle un "dévellopement décimal illimié de x".
Par ailleurs :
L'existence et l'unicité d'un tel a_k résulte du fait que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 10^k(d_k - d_{k-1}) \in [\![0\,;\,9]\!]$. L'expression de d_n sous forme de somme finie s'obtient alors par sommation des égalités $d_k - d_{k-1} = \dfrac{a_k}{10^k}$ et télescopage

III Borne inférieur et supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition III.0.1
Soit X une partie de $\mathbb{R}$. S'il existe :

- le plus petit des majorants de X est appelé borne supérieure de X et noté $\sup X$
- le plus grand des minorants de X est appelé borne inférieure de X et noté $\inf X$

Remarques :

- les bornes supérieure ou inférieure de X ne sont pas nécessairement dans X.
- En revanche,
  — si X admet un maximum alors X admet une borne supérieure, égale au maximum de X ;
  — si X admet un minimum alors X admet une borne inférieure, égale au minimum de X.

Propriétés III.0.2 (Propriété dite de la borne supérieure/inférieur)

- toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Définition/Propriétés III.0.3 (Traduction séquentielle de la borne supérieure/inférieure)
Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

- Si X est non vide et minorée alors il existe une suite d'éléments de X de limite $\inf X$.
- Si X est non vide et majorée alors il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$.
- Si X est non vide et non minorée alors il existe une suite d'éléments de X de limite $-\infty$.
- Si X est non vide et non majorée alors il existe une suite d'éléments de X de limite $+\infty$.

Définition/Propriétés III.0.4 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$)
On appelle droite achevée l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ défini par :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

On y étend la relation d'ordre $\leqslant$, l'addition et la multiplication connues sur $\mathbb{R}$ avec les conventions :

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x + \infty$

(2) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

(3) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}, x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$

(5) $\forall x \in \mathbb{R}, x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$

(6) $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ -\infty & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(7) $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x < 0 \\ -\infty & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Définition/Propriétés III.0.5 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tous réels a et b dans X tels que $a \leqslant b$ le segment $[a\ ;\ b]$ est inclus dans X

Démonstration
On rappelle que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si I est de l'une des formes suivantes :

- $I = \emptyset$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \underset{\text{notation}}{=} [a\,;\,b]$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leqslant b$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} \underset{\text{notation}}{=} [a\,;\,b[$ avec $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ et $a < b$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} \underset{\text{notation}}{=}]a\,;\,b]$ avec $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbb{R}$ et $a < b$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} \underset{\text{notation}}{=}]a\,;\,b[$ avec $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ et $a < b$

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Dans le cas où X est l'ensemble vide, l'équivalence attendue est immédiate. On se place donc, dans la suite, dans le cas où X est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et on raisonne par double implication

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que X est un intervalle de $\mathbb{R}$
X est alors d'une des formes $2, 3, 4$ ou 5 indiquées ci-dessus. Ainsi, pour tous réels α et β dans X tels que $\alpha \leqslant \beta$, on a bien $[\alpha\,;\,\beta] \subset X$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que : $\forall (\alpha,\beta) \in X^2, \alpha \leqslant \beta \implies [\alpha\,;\,\beta] \subset X$
En considérant X comme partie de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, on peut noter $m = \inf X$ et $M = \sup X$
Montrons que $]m\,;\,M[\subset X \subset [m\,;\,M]$

— Soit $t \in]m\,;\,M[$
Alors le réel t n'est pas un majorant de X (car t est strictement inférieur à M qui est le plus petit des majorants de X) et le réel t n'est pas un minorant de X(car t est strictement supérieur à m qui est le plus grand es minorants de X).

Il existe donc$(\alpha,\beta) \in X^2$ tel que $\alpha < t < \beta$ ce qui prouve que t appartint à l'intervalle $]\alpha\,;\,\beta[$ donc au segment $[\alpha\,;\,\beta]$. Comme les réels α et β appartiennent à X, l'hypothèse faite sur x donne $[\alpha\,;\,\beta] \subset X$ ce qui prouve, en particulier, que t appartient à X
$\boxed{\text{conclusion}}$ $]m\,;\,M[\subset X$

— Soit $t \in X$
Alors, par définition de m et X, on a : $m \leqslant t \leqslant M$ c'est à dire $t \in [m\,;\,M]$
$\boxed{\text{conclusion}}$ $X \subset [m\,;\,M]$

On a donc montré que $]m\,;\,M[\subset X \subset [m\,;\,M]$. Cela implique que X, vue comme partie de $\overline{\mathbb{R}}$ est égale à l'une des parties suivantes $]m\,;\,M[\,,]m\,;\,M]\,, [m\,;\,M[$ ou $[m\,;\,M]$.
Comme X est une partie de $\mathbb{R}$, on en déduit que X est bien de l'une des formes $2, 3, 4$ ou 5 indiquées ci-dessus donc que X est un intervalle de $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{conclusion}}$ X est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall (\alpha,\beta) \in X^2, \alpha \leqslant \beta \implies [\alpha\,;\,\beta] \subset X$ ■

Chapitre 9

Ensemble, application et relation

Sommaire

I Ensemble

I.1 Généralité

Définition I.1.1

- Un ensemble est une collection d'objets, sans répétition et non ordonnée.
- Les objets de l'ensemble sont appelés les éléments de l'ensemble.
  - Si x est un élément de l'ensemble E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.
  - Dans le cas contraire, on dit que x n'appartient pas à E et on note $x \notin E$.
- L'ensemble sans élément est appelé l'ensemble vide et noté $\emptyset$.
- Les ensembles avec un seul élément sont appelés des singletons.
- Les ensembles avec deux éléments sont appelés des paires.

Définition/Propriétés I.1.2 (Modes de définition d'un ensemble)
Un ensemble E peut être défini :

- en extension, c'est-à-dire en explicitant tous les éléments de l'ensemble E, dans le cas où il compte un nombre fini d'éléments appelé cardinal de l'ensemble. Les éléments de l'ensemble sont ainsi tous cités entre accolades. Par exemple :
  — $E = \{i\}$ singleton contenant le nombre complexe i ;
  — $E = \{\cos, \sin\}$paire contenant les fonctions cosinus et sinus ;
  — $E = \{2, 3, 5, 7\}$ ensemble des nombres premiers inférieurs à 10 ;
  — $E = \{3, 4, ..., 10\}$ ensemble des entiers compris entre 3 et 10 au sens large (noté aussi $[\![3\ ;\ 10]\!]$).
- en compréhension, c'est-à-dire en donnant des propriétés vérifiées par les éléments de l'ensemble et eux seuls. Là encore, on utilise des accolades. Par exemple :

  — $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0\ [2\pi]\}$ ensemble des réels congrus à 0 modulo 2π ;
  — $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
  — $E = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right\}$ ensemble des racines 5-ièmes de l'unité.
  — $E = \{\alpha e \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ensemble des fonctions de la forme $x \longmapsto \alpha e^x$ lorsque α parcourt $\mathbb{R}$.

I.2 Inclusion entre ensembles et parties

Définition/Propriétés I.2.1
Soit E un ensemble.

- Inclusion
  On dit qu'un ensemble F est inclus dans E et on note $F \subset E$, si tous les éléments de F appartiennent à E, c'est-à-dire : $\forall x, (x \in F \implies x \in E)$.
- Parties
  On dit qu'un ensemble F est une partie ou un sous-ensemble de E si F est inclus dans E.
- Ensemble des parties
  On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire $\mathscr{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$.

I.3 Egalité entre ensembles

Définition/Propriétés I.3.1

- Définition
  On dit que deux ensembles E et F sont égaux, et on note $E = F$, s'ils ont les mêmes éléments, c'est-à-dire : $\forall x, (x \in E \iff x \in F)$.
- Caractérisation de l'égalité par double inclusion
  Deux ensembles E et F sont égaux si, et seulement si, $E \subset F et F \subset E$.

I.4 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition/Propriétés I.4.1
Soit E un ensemble et, A et B deux parties de E.
Soit I un ensemble et $\{A_i \mid i \in I\}$ un ensemble de parties de E.

- Réunion
On appelle réunion de A et B, et on note $A \cup B$, la partie de E définie par $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
Plus généralement, on définit la réunion de parties A_i de E, avec i qui varie dans un ensemble I :
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \left\{x \in E \,\middle|\, \exists i_0 \in I, x \in A_{i_0}\right\}$$
.
- Intersection
On appelle intersection de A et B, et on note $A \cap B$, la partie de E définie par $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
Plus généralement, on définit l'intersection de parties A_i de$E$, avec i qui varie dans un ensemble I :
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in Ai\}$$
.
- Différence
On appelle différence de B dans A, et on note $A \backslash B$, la partie de E définie par $A \backslash B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } X \notin B\}$.
- Complémentaire
On appelle complémentaire de A dans E la partie $E \backslash A = \{x \in E \mid x \notin A\}$ qui est encore notée $\overline{A}$ ou A^c (en l'absence d'ambiguité sur l'ensemble dans lequel le complémentaire est considéré).
- Quelques règles de calcul ou loi de Morgan
  - $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ et $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$
  - $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$
- Recouvrement disjoint et partition d'un ensemble
L'ensemble $\{A_i \mid i \in I\}$ de parties de E est dit partition de E si les conditions suivantes sont réunies :
  - $E = \bigcup_{i \in I} A_i$
  - $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
  - $\forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

Démonstration (Loi de Morgan)
Soit E un ensemble et A_j des parties de E où $i \in I$ et B une partie de E.

- Distributivité de l'intersection sur l'union :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B &\iff \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \text{ et } (x \in B) \\ &\iff \left(\exists i_0 \in I, x \in A_{i_0}\right) \text{ et } (x \in B) \\ &\iff \exists i_0 \in I, x \in A_{i_0} \cap B \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) \end{aligned}$$

- $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$:

$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} &\iff x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \\ &\iff \exists A_{i_0}, x \notin A_{i_0} \\ &\iff x \in \overline{A_{i_0}} \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \end{aligned}$$

I.5 Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles

Définition/Propriétés I.5.1
Soit $E_1, \dots, E_n$ des ensembles.
On appelle produit cartésien de $E_1, \dots, E_n$ l'ensemble noté $E_1 \times \cdots \times E_n$ défini par :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \, [\![1 \, ; n]\!] \, , x_i \in E_i\}$$

II Application

II.1 définition de base

Définition/Propriétés II.1.1
Une application f de E (ensemble de départ) dans F (ensemble d'arrivée) est un objet mathématique qui, à tout élément x de E, associe un unique élément de F noté $f(x)$
Notation fonctionnelle :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Définition/Propriétés II.1.2 (Image et antécédent)
Soit $f : E \longmapsto F$ une application.

- Pour tout x élément de E,$f(x)$ est un élément de F appelé l'image de x par f .
- Soit $y \in F$. S'il existe x dans E tel que $y = f(x)$ alors x est dit un antécédent de y par f .

Définition/Propriétés II.1.3 (Ensemble des applications)
L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{C}^{\mathcal{F}}(E, F)$ ou F^E.

Définition/Propriétés II.1.4 (Egalité entre applications)
On dit que deux applications f et g sont égales, et on note $f = g$, si les conditions suivantes sont réunies :

- f et g ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée F ;
- pour tout x de E,$f(x) = g(x)$.

Définition/Propriétés II.1.5 (Graphe)
Soit $f : E \longmapsto F$ une application.
On appelle graphe de f la partie G de $E \times F$ définie par :

$$G = \{(x\ ;\ f(x)) \mid x \in E\}$$

II.2 Fonctions particulières

Définition/Propriétés II.2.1

- Fonction indicatrice d'une partie
  Soit A une partie de E. L'application f de E dans $\{0,1\}$ définie par :
  $$\forall x \in E, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$
  est dite fonction indicatrice de A et notée $\mathbb{1}_A$.
- Restriction
  Soit $f : E \longmapsto F$ une application et A une partie de E.
  L'application $g : A \longmapsto F$ définie par $\forall x \in A, g(x) = f(x)$ est dite restriction de f à A et notée $f\big|_A$.
- Prolongement
  Soit A une partie de E et $h : A \longmapsto F$ une application.
  Toute application $f : E \longmapsto F$ telle que $f\big|_A = h$ est dite prolongement de h à E.

II.3 Image directe et image réciproque

Définition/Propriétés II.3.1

Soit $f : E \longmapsto F$ une application.

- Image :
  Soit A une partie de E. On appelle image directe de A par f la partie de F définie par :
  $$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$
  C'est l'ensemble des images par f des éléments de A.
- Image réciproque : Soit B une partie de F . On appelle image réciproque de B par f la partie de E définie par :
  $$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$
  C'est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B.

II.4 Composition d'applications

Définition/Propriétés II.4.1

Soit $f : E \longmapsto F$ et $g : F \longmapsto G$ deux applications. L'application $h : E \longmapsto G$ définie par :

$$\forall x \in E, h(x) = g(f(x))$$

est dite composée des applications f et g et notée $h = g \circ f$.

II.5 Injection, surjection

Définition/Propriétés II.5.1
Une application $f : E \longmapsto F$ est dite :

- Définitions :

  — injection si tout élément de F a au plus un antécédent par f .
  — surjection si tout élément de F a au moins un antécédent par f .

- Caractérisations pratiques :

  — f est une injection si, et seulement si :$\forall (x,x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x'$.
  — f est une surjection si, et seulement si : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

- Composition :
  La composée de deux injections (resp. surjections) est une injection (resp. surjection).

Démonstration (Composition)

- injection :
  Soit $f : E \longmapsto F$ et $g : F \longmapsto G$ deux fonctions injective
  $\forall (x,x') \in E^2$ tel que $g(f(x)) = g(f(x'))$
  On a $f(x) = f(x')$ car g est une injection
  et donc $x = x'$ car f est une injection
  $\boxed{\text{conclusion}}$ $\forall (x,x') \in E^2, g(f(x)) = g(f(x')) \implies x = x'$ donc $g \circ f$ injective

- surjection :
  Soit $f : E \longmapsto F$ et $g : F \longmapsto G$ deux fonctions surjectives
  Soit$z \in G$ alors $\exists y \in F, z = g(y)$ car g surjective
  Soit$y \in F$ alors $\exists x \in E, y = f(x)$ car f surjective
  $\boxed{\text{conclusion}}$ $\forall z \in G, \exists x \in E$ tel que $z = g(f(x))$ donc $g \circ f$ surjective ∎

II.6 Bijection

Définition/Propriétés II.6.1

- Définitions :
  Une application $f : E \longmapsto F$ est dite bijection si tout élément de F a un unique antécédent par f.
  Dans ce cas, l'application $f^{-1} : F \longmapsto E$ définie par :

$$\forall y \in F, f^{-1}(y) = x \text{ avec } x \text{ l'unique élément de } E \text{ tel que } y = f(x)$$

  est dite bijection réciproque de f et vérifie :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \text{ et } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_F$$

- Caractérisation pratique :
  Une application $f : E \longmapsto F$ est une bijection si, et seulement si, f est une injection et une surjection.
- Composition :
  — La composée de deux bijections est une bijection.
  — La bijection réciproque de la composée $g \circ f$ où f et g sont des bijections est l'application

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

III Relation Binaire sur un ensemble

III.1 Généralité

Définition/Propriétés III.1.1

- Définitions :
  On appelle relation binaire sur un ensemble E toute partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$.
  Pour tout $(x, y) \in \mathcal{R}$:
  — on dit que x est en relation avec y par la relation $\mathcal{R}$;
  — on note usuellement $x\mathcal{R}y$
- Propriétés :
  On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est :
  — réflexive si : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$;
  — transitive si :$\forall(x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$;
  — symétrique si : $\forall(x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;
  — antisymétrique si : $\forall(x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}yety\mathcal{R}x) \implies x = y$.
- Quelques exemples déjà rencontrés :
  (1) Sur un ensemble E : la relation d'égalité.
  (2) Sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties d'un ensemble E : la relation d'inclusion.
  (3) Sur l'ensemble $\mathbb{R}$: les relations $\leqslant, <$ et la relation de congruence modulo un réel non nul.
  (4) Sur l'ensemble $\mathscr{C}^{\mathcal{F}}(D, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^D$ des applications d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: la relation $\leqslant$.
  (5) Sur l'ensemble Z : les relations de divisibilité | et de congruence modulo un entier non nul.

III.2 Relations d'équivalence

Définition/Propriétés III.2.1

- Définitions :
  Toute relation binaire sur un ensemble E qui est réflexive, transitive et symétrique est dite relation d'équivalence sur E. Les relations d'équivalence sont souvent notées $\sim, \simeq$ ou $\boldsymbol{equiv}$.
- Théorème :
  Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.
  Alors la famille d'ensembles $(\{y \in E \mid x \sim y\})_{x \in E}$ est une partition de E.
- Exemples des relations de congruence
  - La relation de congruence modulo 2π est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
    Les classes d'équivalence sont les ensembles $x + 2\pi\mathbb{Z} = \{x + 2n\pi \mid n \in Z\}$ avec x qui décrit $[0\,;\,2\pi[$.
  - La relation de congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Les classes d'équivalence sont les ensembles $r + n\mathbb{Z} = \{r + nq \mid q \in \mathbb{Z}\}$ avec r qui décrit $[\![0\,;\,n-1]\!]$.

III.3 Relation d'ordre

Définition/Propriétés III.3.1

- Définitions :
  Toute relation binaire sur un ensemble E qui est réflexive, transitive et antisymétrique est dite relation d'ordre sur E. Les relations d'ordre sont souvent notées $\leqslant, \lesssim, \lesssim$ ou $\preceq$.
- Ordre partiel et ordre total :
  Une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E est dite totale si :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \preceq you y \preceq x$$

  Dans le cas contraire, la relation d'ordre $\preceq$ est dite partielle.
- Minorant, majorant, maximum, minimum, etc :
  Les notions de partie minorée, majorée ou bornée ainsi que celles de minorant, majorant, minimum, maximum, borne inférieure ou borne supérieure vues pour les parties de $\mathbb{R}$ peuvent être étendues aux parties d'un ensemble muni d'une relation d'ordre.
  Par exemple, pour E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preceq$ et A une partie de E :
  - A est dite majorée pour $\preceq$ s'il existe M dans E tel que, pour tout élément x de A, on a :$x \preceq M$.
    Dans ce cas, on dit que M est un majorant de A pour $\preceq$.
  - si A admet un majorant M pour $\preceq$ qui appartient à A alors celui-ci est unique et est appelé le maximum de A ou le plus grand élément de A pour $\preceq$.

Chapitre 10

Suites numériques particulières

Sommaire

I Suite arithmétique

Définition I.0.1
Soit (u_n) une suite réelle (resp. complexe).
La suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe un réel (resp. complexe) r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est unique et appelé raison de la suite (u_n).

Définition/Propriétés I.0.2 (Expression du terme général)
Si (u_n) est une suite arithmétique réelle (resp. complexe) de raison r alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies u_n = u_p + (n-p)\,r$$

Définition/Propriétés I.0.3 (Limite)
Soit (u_n) une suite arithmétique réelle (resp. complexe) de raison r.

- Si $r = 0$ alors (u_n) converge vers u_0.
- Si $r \neq 0$ alors (u_n) diverge avec, dans le cas où la suite est réelle, $u_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$

Définition/Propriétés I.0.4 (Somme finie de termes consécutifs)
Si (u_n) est une suite arithmétique réelle (resp. complexe) de raison r alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2}$$

II Suites géométriques

Définition II.0.1
Soit (u_n) une suite réelle (resp. complexe).
La suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un réel (resp. complexe) q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre q est unique et appelé raison de la suite (u_n).

Définition/Propriétés II.0.2 (Expression du terme général)
Si (u_n) est une suite géométrique réelle (resp. complexe) de raison q alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies u_n = q^{n-p} \times u_p$$

Définition/Propriétés II.0.3 (Limite)
Soit (u_n) une suite géométrique réelle (resp. complexe) de raison q.

- Si $|q| < 1$ ou $u_0 = 0$ alors (u_n) converge vers 0.
- Si $|q| = 1$ et $u_0 \neq 0$ alors (u_n) diverge sauf dans le cas particulier $q = 1$ où elle converge vers u_0.
- Si $|q| > 1$ et $u_0 \neq 0$ alors (u_n) diverge avec, dans le cas où la suite est réelle et q > 1,

$$u_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$$

Définition/Propriétés II.0.4 (Somme finie de termes consécutifs)
Si (u_n) est une suite géométrique réelle (resp. complexe) de raison q alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies \sum_{k=p}^{n} u_k = \begin{cases} u_p \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_p \times (n - p + 1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

III Suites arithmético-géométriques

Définition III.0.1
Soit (u_n) une suite réelle (resp. complexe).
La suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe des réels (resp. complexes) a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b$$

Remarques :

- Si $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques de raison b.
- Si $b = 0$, on retrouve les suites géométriques de raison a.

Définition/Propriétés III.0.2 (Expression du terme général)
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la donnée de u_0 réel (resp. complexe) et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b$$

avec a et b des réels (resp. complexes) tel que $a \neq 1$
Méthode d'obtention du terme général
On montre que :

- La seule suite (v_n) constante qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = a \times v_n + b$ est donnée par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{b}{1-a}$$
- La suite w_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n - v_n$ est alors une suite géométrique de raison a donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \times a^n$$
on en déduit que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 + \frac{b}{1-a}\right) a^n$$

Définition/Propriétés III.0.3 (Limite)
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la donnée de son premier terme (u_0) et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b$$

avec a et b des réels (resp. complexes) tels que $a \neq 1$

- Si $|a| < 1$ ou $u_0 = \dfrac{b}{1-a}$
- Si $|a| \geqslant 1$ et $u_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$ alors (u_n) diverge avec, dans le cas où la suite est réelle et $a > 1$,

$$u_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > \dfrac{b}{1-a} \\ -\infty & \text{si } u_0 < \dfrac{b}{1-a} \end{cases}$$

IV Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition IV.0.1
Soit (u_n) une suite réelle (resp. complexe).
La suite (u_n) est dite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe des réels (resp. complexes) a et b tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

Définition/Propriétés IV.0.2 (Equation caractéristique associée)
Soit a et b deux réels (resp. complexes).
La recherche de suites géométriques non nulles de raison q vérifiant la relation de récurrence

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

conduit à l'équation dite “équation caractéristique” suivante :

$$(EC) : q^2 + aq + b = 0.$$

Définition/Propriétés IV.0.3 (Expression du terme général)

(1) Cas où (u_n) est COMPLEXE et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

- Si EC a deux racines distinctes q_1 et q_2 alors il existe des complexes λ_1 et λ_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$$

- Si EC a une racine double q alors il existe des complexes λ_1 et λ_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n)\, q^n$$

(2) Cas où (u_n) est RÉELLE et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- Si EC a deux racines distinctes q_1 et q_2 alors il existe des réels λ_1 et λ_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$$

- Si EC a une racine double q alors il existe des réels λ_1 et λ_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n)\, q^n$$

- Si EC a deux racines complexes non réelles q et $\overline{q}$ alors il existe des réels λ_1 et λ_2 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda_1 \cos(\theta n) + \lambda_2 \sin(n\theta))\, r^n$$

avec $re^{i\theta}$ forme trigonométrique de q.

Démonstration (Suite complexes récurrentes linéaire d'ordre 2 à coefficients constants)
Soit a et b des complexes avec $b \neq 0$

On cherche à expliciter l'ensemble $\mathcal{E}_{a,b}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1}bu_n = 0$$

Préliminaire :

(1) Combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}_{a,b}$:

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites appartenant à $\mathcal{E}_{a,b}$

alors pour tout couple (λ_1, λ_2) de complexes la suite $(\lambda_1 u_n + \lambda_2 v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$

autrement dit, $\mathcal{E}_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire,

Démonstration : On suppose les hypothèses réunies, en notant $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_1 u_n + \lambda_2 v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} + aw_{n+1} + bw_n &= (\lambda_1 u_{n+2} + \lambda_2 v_{n+2}) + a\left(\lambda_1 u_{n+1} + \lambda_2 v_{n+1}\right) + b\left(\lambda_1 u_n + \lambda_2 v_n\right) \\ &= \lambda_1\left(u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n\right) + \lambda_2\left(v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n\right) \\ &= \lambda_1 (0) + \lambda_2 (0) \text{ car } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartiennent à } \mathcal{E}_{a,b} \\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$.

(2) Recherche de suites géométriques dans $\mathcal{E}_{a,b}$:

soit q un complexe non nul.

La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$ si, et seulement si, q est racine de l'équation suivante.

$$(EC) : q^2 + aq + b = 0$$

(EC) est dite équation caractéristique associée à $\mathcal{E}_{a,b}$

Démonstration :

La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$ si, et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} + aq^{n+1}bq^n = 0$

si, et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, q^n\left(q^2 + aq + b\right) = 0$

si, et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, q^2 + aq + b = 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, q^n \neq 0$

si, et seulement si : $q^2 + aq + b = 0$

Détermination des éléments de $\mathcal{E}_{a,b}$:

- Cas où l'équation (EC) a deux racines complexes distinctes q_1 et q_2.

Dans ce cas, q_1 et q_2 sont tous deux non-nuls car $q_1 q_2 = b$ (Formule de Viète) et $b \neq 1$

Pour tout complexes λ_1 et λ_2, la suite $\left(\lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient alors à $\mathcal{E}_{a,b}$ par combinaison linéaire d'élément de $\mathcal{E}_{a,b}$

Montrons qu'il n'y a pas d'autres suites que celles trouvées ci-dessus dans $\mathcal{E}_{a,b}$:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à $\mathcal{E}_{a,b}$
$\boxed{\text{analyse}}$ on suppose qu'il existe λ_1 et λ_2 des complexes tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$.
on a alors en particulier, $\begin{cases} u_0 & = \lambda_1 + \lambda_2 \\ u_1 & = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \end{cases}$
Avec les opérations sur les lignes suivantes $q_1 L_1 - L_2$ et $q_2 L_1 - L_2$, on en déduit que

$$q_1 u_0 - u_1 = \lambda_2(q_1 - q_2) \qquad q_2 u_0 - u_1 = \lambda_1(q_2 - q_1)$$

Comme q_1 et q_2 sont distincts, on obtient finalement :

$$\lambda_1 = \frac{u_0 q_2 - u_1}{q_2 - q_1} \qquad \lambda_2 = \frac{u_1 - u_0 q_1}{q_2 - q_1}$$

$\boxed{\text{synthèse}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = u_n - \lambda_1 q_1^n - \lambda_2 q_2^n$avec les nombres complexes λ_1 et λ_2 trouvées dans l'analyse

Un calcul simple donne alors

$$w_0 = w_1 = 0 \qquad (1)$$

Par ailleurs la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}_{a,b}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} + a w_{n+1} + b w_n = 0 \qquad (2)$$

Par récurrence immédiate en utilisant (1) et (2), on trouve que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle ce qui prouve que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$$

Ainsi si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{E}_{a,b}$ alors il existe des complexes λ_1 et λ_2 tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boxed{\text{conclusion}}$ si l'équation caractéristique (EC) a deux racines complexes distinctes q_1 q_2 alors

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{\left(\lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

- cas où l'équation caractéristique (EC) a une racine complexe double q

  Le discriminant de (EC) est alors nul (donc $a^2 = 4b$) et $q = -\frac{1}{2}a$ ce qui implique que q est non nul sinon on aurait $a = b = 0$ ce qui est exclu par hypothèse sur b.

  Pour tout complexes, λ_1 et λ_2, la suite $(\lambda_1 q^n + \lambda_2 n q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient alors à $\mathcal{E}_{a,b}$ par combinaison linéaire d'élément de $\mathcal{E}_{a,b}$

  En, effet $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$ (d'après le Préliminaire 2) et $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$ car

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)\, q^{n+2} + a\,(n+1)\, q^{n+1} + bnq^n &= nq^n \left(q^2 + aq + b\right) + q^n \left(2q^2 + aq\right) \\ &= nq^n(0) + q^n(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Montrons qu'il n'y a pas d'autres suites que celles trouvées ci-dessus dans $\mathcal{E}_{a,b}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à $\mathcal{E}_{a,b}$

$\boxed{\text{analyse}}$ on suppose qu'il existe λ_1 et $\lambda_2$des complexes tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 q^n + \lambda_2 n q^n$

On a alors, en particulier, $\begin{cases} u_0 & = \lambda_1 \\ u_1 & = \lambda_1 q + \lambda_2 q \end{cases}$

Comme q est non nul, on trouve :

$$\lambda_1 = u_0 \qquad \lambda_2 = \frac{u_1 - u_0 q}{q}$$

$\boxed{\text{synthèse}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = u_n - \lambda_1 q^n - \lambda_2 n q^n$ avec les nombres complexes λ_1 et λ_2 trouvées dans l'analyse.

Un calcul simple donne alors :

$$w_0 = w_1 = 0 \qquad (1)$$

Par ailleurs, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$ comme combinaison linéaire d'élément de $\mathcal{E}_{a,b}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} + a w_{n+1} + b w_n = 0 \qquad (2)$$

Par récurrence immédiate en utilisant (1) et (2), on trouve que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle ce qui provoque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 q^n + \lambda_2 n q^n$$

Ainsi si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{E}_{a,b}$ alors il existe des complexes λ_1 et λ_2 tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_1 q^n + \lambda_2 n q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boxed{\text{conclusion}}$ si l'équation caractéristique (EC) a une racine complexe double q alors

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ (\lambda_1 q^n + \lambda_2 n q^n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$ ■

Démonstration (Suite réelles récurrentes linéaire d'ordre 2 à coefficients constants)
Soit a et b des réels avec $b \neq 0$

On cherche à expliciter l'ensemble $\mathcal{E}_{a,b}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + a u_{n+1} b u_n = 0$$

on appelle toujours <u>équation caractéristique</u> associée à $\mathcal{E}_{a,b}$ l'équation (EC) : $q^2 + aq + b = 0$

Les deux cas suivants se traitent de la même manière que pour les suites compelxes

- Cas où l'équation (EC) a deux racines réelles distinctes q_1 et q_2.

  $\boxed{\text{conclusion}}$ si l'équation caractéristique (EC) a deux racines réelles distinctes q_1 q_2 alors

  $$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ (\lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- cas où l'équation caractéristique (EC) a une racine réelle double q

  $\boxed{\text{conclusion}}$ si l'équation caractéristique (EC) a une racine réelle double q alors

  $$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ (\lambda_1 q^n + \lambda_2 n q^n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- Cas où l'équation (EC) a deux racines complexes conjuguées non réelles q et $\overline{q}$.

  Comme q et $\overline{q}$ sont distincts (car q n'est pas réel), on sait que les suites complexes vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

  sont les suites $(\lambda_1 q^n + \lambda_2 \overline{q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in C^2$

  Déterminons parmi ces suites celles qui sont à valeurs réelles en utilisant les propriété de la conjugaison.

$(\lambda_1 q^n + \lambda_2 \overline{q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_1 q^n + \lambda_2 \overline{q}^n = \overline{\lambda_1 q^n + \lambda_2 \overline{q}^n}$

si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_1 q^n + \lambda_2 \overline{q}^n = \overline{\overline{\lambda_1} \overline{q}^n + \overline{\lambda_2} q^n}$

si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) q^{-} \left(\overline{\lambda_1} - \lambda_2\right) \overline{q}^n = 0$

si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) q^{-} \overline{\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) q^n} = 0$

si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, 2\,\mathrm{Im}\left(\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) q^n\right) = 0$

- Si $(\lambda_1 q^n + \lambda_2 \overline{q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, on a donc $\mathrm{Im}\left(\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) q^0\right) = 0$ et $\mathrm{Im}\left(\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) q\right) = 0$
  La première égalité donne $\lambda_1 - \overline{\lambda_2} \in \mathbb{R}$. La seconde égalité implique alors que $\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) \mathrm{Im}\,(q) = 0$ puis que $\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) = 0$ (car q n'est pas réel donc sa partie imaginaire est non nulle). Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2$.
- Réciproquement, si $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ alors, pour tout n entier naturel, on a $2i\,\mathrm{Im}\left(\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2} q^n\right)\right) = 0$ donc, avec les équivalences précédentes $(\lambda_1 q^n + \lambda_2 \overline{q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles.

En résumé : les suites de $\mathcal{E}_{a,b}$ sont donc les suites $\left(\lambda_1 q^n + \overline{\lambda_1} \overline{q}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec λ_1 complexe quelconque.

Pour faire apparaître une forme de terme général plus explicite (sans nombres complexes), on écrit q sous forme trigonométrique $q = re^{i\theta}(r > 0$ et θ réel) et λ_1 sous forme algébrique $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1(\alpha_1$ et β_1 réels)

On a alors :

$$\lambda_1 q^n + \overline{\lambda_1} \overline{q}^n = 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda_1 q^n) = 2\,\mathrm{Re}\left(r^n (\alpha_1 + i\beta_1)\, e^{in\theta}\right) = 2r^n (\alpha_1 \cos(n\theta) - \beta \sin(n\theta))$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme

$$u_n = r^n (\mu_1 \cos(n\theta) + \mu_2 \sin(n\theta))$$

avec $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ $\boxed{\text{conclusion}}$: Si l'équation (EC) a deux racines complexes conjuguées non réelles q et $\overline{q}$ alors

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{r^n (\mu_1 \cos(n\theta) + \mu_2 \sin(n\theta)) \,\middle|\, (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

où $r = |q|$ et θ est un argument de q. ■

V Cas simples de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition V.0.1
On s'intéresse à la suite réelle (u_n) définie par récurrence par la donnée de :

$$u_0 \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point et $f : I \longrightarrow I$ une fonction.

Définition/Propriétés V.0.2 (Limite éventuelle)
Si (u_n) converge vers un réel $\ell \in I$ en lequel f est continue alors $f(\ell) = \ell$.
Attention :

- La réciproque de la propriété précédente est FAUSSE.
- La recherche des réels $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$ fournit uniquement les limites éventuelles de (u_n).
- Une étude complémentaire permet de conclure si (u_n) converge vers une des valeurs trouvées.

Dans certains cas, l'étude de la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ peut être utile pour montrer l'existence de racines pour g qui sont les limites éventuelles de (u_n).

Définition/Propriétés V.0.3 (Monotonie éventuelle)
Pour montrer une monotonie éventuelle de (u_n), on regarde si le signe de

$$u_{n+1} - un = \begin{cases} f(u_n) - u_n & (1) \\ f(u_n) - f(u_{n_1}) & (2) \end{cases}$$

est fixe lorsque n varie dans $\mathbb{N}^*$ ou à partir d'un certain rang.

- Dans certains cas, l'étude de la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ peut aider à déterminer le signe de (1).
- Dans le cas où f est CROISSANTE sur I,
  - une récurrence simple avec (2) montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_1 - u_0$:
  $$\begin{cases} \text{Si } u_0 < u_1 \text{ alors } (u_n)\text{est croissante} \\ \text{Si } u_0 > u_1 \text{ alors } (u_n)\text{est décroissante} \end{cases}$$
  - l'étude de la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ peut être utile pour déterminer le signe $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$.

Chapitre 11

Suites numériques

Sommaire

I Généralité sur les suites réelles

I.1 Définition

Définition/Propriétés I.1.1
Toute fonction u définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite suite réelle.
<u>Notations usuelles</u>

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ est noté u_n (terme général de la suite)
- La fonction u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou encore (u_n)

Remarque
Plus généralement, on appelle suite réelle et on note $(u_n)_{n\geqslant p}$ toutes fonctions u définie sur

$$[\![p\ ;+\infty[\![= \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant p\}$$

et à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec p un entier fixé.

Définition/Propriétés I.1.2 (Modes de définition d'une suite)
Une suite réelle (u_n) peut être définie :

(1) explicitement par la donnée, pour tout entier naturel n, de l'expression de u_n en fonctions de n

(2) implicitement par la donnée d'une propriété vérifiée par les termes de la suite

(3) par récurrence

I.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition/Propriétés I.2.1
Soit (u_n) une suite réelle et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ la partie de $\mathbb{R}$ contenant tous les termes de la suite.

- La suite (u_n) est dite majorée si A est majorée
  c'est-à-dire s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant M$
- La suite (u_n) est dite minorée si A est minorée
  c'est-à-dire s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, on a $m \leqslant u_n$
- La suite (u_n) est dite bornée si A est bornée
  c'est-à-dire s'il existe des réels M et m tel que, pour tout entier naturel n, on a $m \leqslant u_n \leqslant M$

Définition/Propriétés I.2.2 (Caractérisation du caractère borné)
Une suite réelle (u_n) est bornée si, et seulement si, la suite $(|u_n|)$ est majorée par un réel strictement positif.

I.3 Suites stationnaires, monotones, strictement monotones

Définition/Propriétés I.3.1
Une suite réelle (u_n) est dite :

- stationnaire s'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier n supérieur à p, on a $u_n = u_p$

- croissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$
- décroissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$

- strictement croissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_n < u_{n+1}$
- strictement décroissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} < u_n$

- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- strictement décroissante si elle est strictement croissante ou strictement décroissante

II Limite d'une suite réelle

II.1 Généralités sur les limites

Définition/Propriétés II.1.1 (Définition d'une limite finie)
Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.
On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si tout segment centrée en ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, ce qui se traduit par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0, \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Définition/Propriétés II.1.2 (Définition d'une limite infinie)
Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $[\![A\,;+\infty[\![$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, ce qui se traduit par :
$$\forall A \in \mathbb{R}^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0, \quad \Longrightarrow \quad u_n \geqslant A$$
- On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $]\!]-\infty\,; A]\!]$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, ce qui se traduit par :
$$\forall A \in \mathbb{R}^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0, \quad \Longrightarrow \quad u_n \leqslant A$$

Propriétés II.1.3 (Unicité de la limte d'une suite)
Si (u_n) est une suite réelle de limite ℓ alors ℓ est unique et notée $\ell = \lim u_n$ ou $u_n \longrightarrow \ell$

II.2 Cas particulier des limites finies : retour en 0

Définition/Propriétés II.2.1
Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| = |(u_n - \ell) - 0| = ||u_n - \ell| - 0|$ donc :

- la suite (u_n) a pour limite (ℓ) si, et seulement si, la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0

- la suite (u_n) a pour limite (ℓ) si, et seulement si, la suite $|u_n - \ell|$ converge vers 0

II.3 Suites convergentes et divergentes

Définition II.3.1
Une suite réelle (u_n) est dite :

- convergente si elle admet une limite réelle ℓ et, dans ce cas, on dit que (u_n) converge vers ℓ
- divergente sinon.

Propriétés II.3.2
(1) Toute suite réelle convergente est bornée.

(2) Toute suite réelle non bornée est divergente.

II.4 Opérations sur les limites

Soit (u_n) et u'_n deux suites réelles et α un réel.

Définition/Propriétés II.4.1

(1) Addition

(a) Si $u_n \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $u'_n \longrightarrow \ell'$ avec $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $u_n + u'_n \longrightarrow \ell + \ell'$

(b) Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $u'_n \longrightarrow \ell'$ avec $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors $u_n + u'_n \longrightarrow +\infty$

(c) Si $u_n \longrightarrow -\infty$ et $u'_n \longrightarrow \ell'$ avec $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ alors $u_n + u'_n \longrightarrow -\infty$

(2) Multiplication par un réel.

(a) Si $u_n \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\alpha u_n \longrightarrow \alpha\ell$

(b) Si $u_n \longrightarrow +\infty$ alors $\alpha u_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

(c) Si $u_n \longrightarrow -\infty$ alors $\alpha u_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$

(3) Produit

(a) Si $u_n \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $u'_n \longrightarrow \ell'$ avec $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $u_n u'_n \longrightarrow \ell\ell'$

(b) Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $u'_n \longrightarrow \ell'$ avec $\ell' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ alors $u_n u'_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell' < 0 \end{cases}$

(c) Si $u_n \longrightarrow -\infty$ et $u'_n \longrightarrow \ell'$ avec $\ell' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ alors $u_n u'_n \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell' < 0 \end{cases}$

(4) Inverse

(a) Si $u_n \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in Rs$ alors $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow \dfrac{1}{\ell}$

(b) Si $u_n \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in \{+\infty, -\infty\}$ alors $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow 0$

(c) Si $u_n \longrightarrow 0$ avec les termes u_n strictement positifs à partir d'un certain rang alors $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow +\infty$

(d) Si $u_n \longrightarrow 0$ avec les termes u_n strictement négatifs à partir d'un certain rang alors $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow -\infty$

II.5 Limite et relation d'ordre

Définition/Propriétés II.5.1 (Passage à la limite d'une inégalité large)

Soit (u_n) et (u'_n) deux suites réelles convergentes respectivement vers des réels ℓ et ℓ'

S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \in N, \ \ n \leqslant n_0 \implies u_n \leqslant u'_n$ alors $\ell \leqslant \ell'$

Définition/Propriétés II.5.2 (Signes des termes d'une suite et signe de la limite)
Soit (u_n) une suite réelle de limite ℓ appartenant $\overline{\mathbb{R}}$.

- Si $\ell > 0$ alors il existe un rang à partir duquel tous les termes u_n sont strictement positif
- Si $\ell < 0$ alors il existe un rang à partir duquel tous les termes u_n sont strictement négatif

II.6 Existence d'une limite finie

Théorème II.6.1 (Théorème d'encadrement)
Soit $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites réelles et ℓ un réel.

S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ , n \geqslant n_0 \implies v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si (v_n) et (w_n) convergent vers ℓ alors (u_n) converge vers ℓ.

Propriétés II.6.2 (pratique)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles et ℓ un réel.

S'il existe un rang à partir duquel on a

$$|u_n - \ell| \leqslant v_n \text{ avec } (v_n) \text{ convergente vers } 0$$

alors (u_n) converge vers ℓ.

Définition/Propriétés II.6.3 (Conséquence)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

(1) Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.
(2) Si (u_n) converge vers un réel 0 et v_n est bornée alors $(u_n v_n)$ converge vers 0

II.7 Existence d'une limite infinie

Théorème II.7.1 (Théorème de minoration)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \leqslant n_0 \implies v_n \leqslant u_n$ et si (v_n) a pour limite $+\infty$ alors (u_n) a pour limite $+\infty$

Théorème II.7.2 (Théorème de majoration)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

S'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \leqslant n_0 \implies v_n \geqslant u_n$ et si (v_n) a pour limite $-\infty$ alors (u_n) a pour limite $-\infty$

II.8 Cas des suites monotones

Théorème II.8.1 (Théorèmes de la limite monotone)

- *Si* (u_n) *est une suite réelle croissante et majorée alors* (u_n) *converge vers* $\ell = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- *Si* (u_n) *est une suite réelle croissante et non majorée alors* (u_n) *a pour limite* $+\infty$

- *Si* (u_n) *est une suite réelle décroissante et minorée alors* (u_n) *converge vers* $\ell = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- *Si* (u_n) *est une suite réelle décroissante et non minorée alors* (u_n) *a pour limite* $-\infty$

Théorème II.8.2 (Théorème des suites adjacentes)
Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles.*

Si (u_n) *est croissante,* (v_n) *est décroissante et* $(v_n - u_n)$ *converge vers* 0 *alors* (u_n) *et* (v_n) *convergent vers une même limite réelle* ℓ *qui vérifie* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$

Démonstration (Théorème des suites adjacentes)
On suppose les hypothèses réunies.

- Montrons tout d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_v \leqslant v_n$

  Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $v_{n_0} < u_{n_0}$. Par monotonie des suites (u_n) et (v_n), on en déduit :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies v_n \leqslant v_{n_0} < u_{n_0} \leqslant u_n$$

  ce qui donne
  $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n_0} - v_{n_0} \leqslant u_n - v_n$$
  La suite $(u_n - v_n)$ étant convergente de limite nulle, par passage à la limite dans une inégalité large, on obtient alors : $u_{n_0} - v_{n_0} \leqslant 0$ ce qui contredit l'hypothèse fait que $v_{n_0} < u_{n_0}$

  <u>conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$
- Montrons alors que les suites (u_n) et (v_n) convergent.

  Par décroissance de la suite (v_n) et le résultat trouvé ci-dessus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_0$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée. Par théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite (u_n) converge

  De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée (par u_0) donc elle converge.

  On note $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$. Par opération algébrique sur les limites, la suite $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell'$. Par unicité de la limite, l'hypothèse faite sur la suite $(u_n - v_n)$ donne alors $(\ell - \ell' = 0)$ donc $\ell = \ell'$

  <u>conclusion</u> : les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ.

- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ Par théorème de la limite monotone,
  — comme u_n est croissante et convergente vers ℓ, on a $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$
  — comme v_n est décroissante et convergente vers ℓ, on a $\ell = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$

  conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ ■

III Suites extraites

III.1 Définition

Définition III.1.1
Soit (u_n) une suite réelle.

On appelle suite extraite de (u_n) toute suite (v_k) telle que $\forall k \in \mathbb{N}, v_k = u_{\varphi(k)}$ avec φ une fonction strictement croissante définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

III.2 Suites extraites et limites

Propriétés III.2.1
Si u_n est une suite réelle de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toutes les suites extraites de (u_n) ont la même limite ℓ.

Démonstration (Suites extraites et limites)
Résultat préliminaire

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

On a $\varphi(0) \geqslant 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(k) \geqslant k$ alors par stricte croissance de φ, $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ donc, puisque φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\varphi(k+1) \geqslant \varphi(k)+1$ et enfin $\varphi(k+1) \geqslant k+1$.

Par principe de récurrence, on a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) \geqslant k$$

- On suppose que u est une suite réelle de limite réelle ℓ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

  Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par hypothèse sur la suite u il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on a $|u_n - \ell \leqslant \varepsilon|$

  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant n_0$. Alors par stricte croissance de φ et avec le résultat préliminaire, on a $\varphi(k) \geqslant \varphi(n_0) \geqslant n_0$ ce qui permet d'obtenir, avec ce qui précède, $\left|u_{\varphi(k)} - \ell\right| \leqslant \ell$

  Autrement dit, la suite $(u_{\varphi(k)})$ a pour limite ℓ.

- On suppose que u est une suite réelle de limite $+\infty$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

  Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Par hypothèse sur la suite u, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on a $u_n \geqslant A$

  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant n_0$. Comme ci-dessus obtient $u_{\varphi(k)} \geqslant A$.

  En résumé : $\forall A \in Rps, \exists n_0 \in \mathbb{N}, k \geqslant n_0 \implies u_{\varphi(k)} \geqslant A$
- Le cas où u est une suite réelle de limite $-\infty$ se traite de la même façon.

Conclusion : Si u est une suite réelle de limite $k \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toute suite extraite de u a pour limite ℓ. ■

Définition/Propriétés III.2.2 (Utilisation de suites extraites pour prouver une divergence)
Soit (u_n) une suite réelle.

- S'il existe une suite extraite de (u_n) qui diverge alors la suite (u_n) diverge
- S'il existe deux suites extraites de (u_n) de limites réelles différentes alors la suite (u_n) diverge

---

Définition/Propriétés III.2.3 (Utilisation des suites extraites pour prouver une convergence)
Soit (u_n) une suite réelle.

Si les suites u_{2n} et (u_{2n+1}) ont pour limite ℓ avec ℓ appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$ alors (u_n) a pour limite ℓ

Théorème III.2.4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.

Démonstration (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

- Montrons le résultat annoncé dans le cas des suites réelles

  On suppose que (u_n) est une suite réelle bornée.

  (u_n) admet donc une borne inférieure et une borne supérieure ; on note $m = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $M = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

  — Construction d'une suite de segments par dichotomie

  (1) On note I_0 le segment $[m\,;M]$: I_0 est de longueur de $M - m$ et contient tous les termes de la suite u_n.

(2) L'un des deux segments $\left[m\ ;\ \dfrac{m+M}{2}\right]$ ou $\left[\dfrac{m+M}{2}\ ;\ M\right]$ contient nécessairement une infinité de termes de la suite (u_n) ; on le note I_1 : I_1 est inclus dans I_0, est de longueur $\dfrac{M-m}{2}$ et contient une infinité de termes de la suite (u_n)

(3) à partir de I_1, on construit un segment noté I_2 inclus dans I_1, de longueur $\dfrac{M-m}{2^2}$ et qui contient une infinité de termes de la suite (u_n)

En répétant l'opération on construit ainsi une suite de segments (I_n) telle que :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$

(2) pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n$ est de longueur $\dfrac{M-m}{2^n}$

(3) pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n$ contient une infinité de termes de la suite.

Dans chaque segment I_n, il y a une infinité de termes de la suite (u_n). Il existe donc une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in I_n$$

— Montrons que la suite $(u_{\varphi(n)})$ ainsi construite, qui est extraite de (u_n), est une suite convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = [\alpha_n\ ;\ \beta_n]$. Par décroissance de la suite (I_n) pour l'inclusion, la suite α_n est croissante et la suite (β_n) est décroissante. Par ailleurs, la suite $(\beta_n - \alpha_n)$ est égale à la suite $\dfrac{(M-m)}{2^n}$ donc elle converge vers 0.

Par théorème des suites adjacentes, on en déduit que les suites (α_n) et (β_n) convergent vers une même limite ℓ. Le théorème d'encadrement utilisé avec les inégalités $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant \beta_n$ permet alors de conclure que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

- Montrons le résultat annoncé dans le cas des suites complexes Soit u_n une suite bornée de $\mathbb{C}$.

Alors $(x_n) = (\mathrm{Re}\,(u_n))$ et $(y_n) = (\mathrm{Im}\,(u_n))$ sont deux suites bornées de $\mathbb{R}$

On peut donc extraire de (x_n) une suite convergente $x_{\varphi_1(n)}$ notée (a_n)

La suite $(y_{\varphi_1(n)})$, notée (β_n), est alors une suite bornée de $\mathbb{R}$, car elle est extraite de la suite bornée (y_n) de $\mathbb{R}$. On peut donc extraire de (b_n) une suite convergente $(\beta_{\varphi_2(n)})$ notée (β_n)

La suite $(a_{\varphi_2(n)})$, notée (α_n), est alors convergente puisqu'elle est extraite de la suite convergente (a_n)

On en déduit que la suite $(\alpha_n + i\beta_n)$ est une suite extraite de (u_n) qui converge. Conclusion de toute suite bornée de complexes, on peut extraire une suite convergente ■

IV Suite complexes

Définition IV.0.1
Toute fonction u définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite suite complexe.

Définition/Propriétés IV.0.2 (Ce qui s'étend aux suites complexes)

- Notation séquentielle, modes de définition d'une suite, suite stationnaire
- Limite finie : définition et caractérisation (cf. infra), unicité, opérations sur les limites finies
- Convergence et divergence
- Suite bornée : définition (cf. infra), lien avec la convergence
- Suites extraites : définitions, propriétés, théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition/Propriétés IV.0.3 (Ce qui ne s'étend pas aux suites complexes)

- Notation de limite infinie
- Résultats utilisant la relation d'ordre dont les théorèmes d'existence de limite.

IV.1 Suite complexe bornée et limite d'une suite complexe

Définition IV.1.1
Une suite complexe (u_n) est dite bornée s'il existe un réel strictement positif M tel que, pour tout entier naturel$n, |u_n| \leqslant M$

Définition IV.1.2 (Limite d'une suite complexe)
Soit (u_n) une suite complexe et ℓ un complexe.

On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si tout disque fermé centré en ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, ce qui se traduit par

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Définition/Propriétés IV.1.3 (Caractérisation de la limite d'une suite complexe)
Soit (u_n) une suite complexe et ℓ un complexe.

La suite complexe (u_n) a pour limite ℓ si et seulement si, les suites réelles $(\mathrm{Re}\,(u_n))$ et $\mathrm{Im}\,(u_n)$ ont respectivement pour limites $\mathrm{Re}\,(\ell)$ et $\mathrm{Im}\,(\ell)$

Chapitre 12

Limite et continuité

Sommaire

Notation .0.1
Dans ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point.

I étude locale des fonctions à valeurs réelles

I.1 Limite en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I

Définition I.1.1
Soit f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}$

- Cas où a est un réel, appartenant à I ou extrémité de I.
  On dit que f admet pour limite ℓ en a si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$
- cas où $a = +\infty$ est extrémité de I
  On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ x \geqslant B \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$
- cas où $a = -\infty$ est extrémité de I
  On dit que f admet pour limite ℓ en $-\infty$ si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_-^*,\ \forall x \in I,\ x \leqslant B \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$

Définition I.1.2 (Définitions d'une limite infinie)

- cas où a est un réel, appartenant à I ou extrémité de I.

  On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a si : $\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \geqslant A$
  On dit que f admet pour limite $-\infty$ en a si : $\forall A \in \mathbb{R}_-^*,\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \delta \implies f(x) \leqslant A$
- cas où $a = +\infty$ est extrémité de I

  On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ x \geqslant B \implies f(x) \geqslant A$
  On dit que f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}_-^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in I,\ x \geqslant B \implies f(x) \leqslant A$
- cas où $a = -\infty$ est extrémité de I

  On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_-^*,\ \forall x \in I,\ x \leqslant B \implies f(x) \geqslant A$
  On dit que f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}_-^*,\ \exists B \in \mathbb{R}_-^*,\ \forall x \in I,\ x \leqslant B \implies f(x) \leqslant A$

Définition/Propriétés I.1.3 (Unicité)
Si f admet une limite ℓ en a alors celle-ci est unique et on note $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$.

Définition/Propriétés I.1.4 (Existence d'une limite en un point où la fonction est définie)
Si f est définie en a et possède une limite en a alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

Définition/Propriétés I.1.5 (condition nécessaire d'existence de limite)
Si f possède une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

I.2 Limite à gauche et à droite en un réel appartenant à I ou extrémité de I.

Notation I.2.1
Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition I.2.2
Soit a un point de $\mathbb{R}$, appartenant à I ou extrémité de I.

(1) On dit que f admet une limite à gauche en a si la restriction $f_{|I\cap]-\infty;a[}$ admet une limite en a Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\ x<a}} f(x)$ la limite obtenue.

(2) On dit que f admet une limite à droite en a si la restriction $f_{|I\cap]a;+\infty[}$ admet une limite en a Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow a\\ x>a}} f(x)$ la limite obtenue.

Définition/Propriétés I.2.3 (Condition nécessaire et suffisante d'existence de limite)
Soit a un point de $\mathbb{R}$ appartenant à I mais pas extrémité de I

f admet une limite en a si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont réunies :

(1) f a une limite à gauche en a.

(2) f a une limite à droite en a

(3) $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$

I.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème I.3.1
Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$
Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$, appartenant à I ou extrémité de I, et ℓ un point de $\overline{\mathbb{R}}$

f admet une limite ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui admet pour limite a, la suite réelle $(f(x_n))$ admet pour limite ℓ

I.4 Opérations sur les limites

Définition/Propriétés I.4.1
Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$, appartenant à I ou extrémité de I. Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles et λ un réel

(1) Addition

(a) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $g \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell'$ avec $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $(f+g)(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell + \ell'$

(b) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell'$ avec $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors $(f+g)(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} +\infty$

(c) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} -\infty$ et $g(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell'$ avec $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ alors $(f+g)(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} -\infty$

(2) Multiplication par un réel.

(a) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \lambda\ell$

(b) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\lambda f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

(c) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} -\infty$ alors $\lambda f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$

(3) Produit

(a) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $g(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell'$ avec $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $(fg)(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell\ell'$

(b) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell'$ avec $\ell' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ alors $(fg)(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell' < 0 \end{cases}$

(c) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} -\infty$ et $g(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell'$ avec $\ell' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ alors $(fg)(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell' < 0 \end{cases}$

(4) Inverse

On suppose que f ne s'annule pas sur un voisinage de a sauf éventuellement en a.

(a) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in Rs$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$

(b) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \{+\infty, -\infty\}$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$

(c) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$ avec les termes $f(x)$ strictement positifs au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} +\infty$

(d) Si $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$ avec les termes $f(x)$ strictement négatifs au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} -\infty$

(5) Composition

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles telle que $f(I) \subset J$.
Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.
Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$, appartenant à I ou extrémité de I.
Soit b un point de $\overline{\mathbb{R}}$, appartenant à J ou extrémité de J.
Soit ℓ un point de $\overline{\mathbb{R}}$.
Si f admet pour limite b en a et si g admet pour limite ℓ en b alors $g \circ f$ admet pour limite ℓ en a. Autrement dit,

$$f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} b \text{ et } g(y) \underset{y\longrightarrow b}{\longrightarrow} \ell \implies g \circ f(x) \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$$

I.5 Limites et relation d'ordre

Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$, appartenant à I ou extrémité de I.

Définition/Propriétés I.5.1 (Passage à la limite d'une inégalité large)
Soit $(\ell, \ell') \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$

Si f et g sont deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles telles que $f \leqslant g$ au voisinage a avec f de limite ℓ en a et g de limite ℓ' en a alors $\ell \leqslant \ell'$

Définition/Propriétés I.5.2 (Signe de la fonction et signe de la limite)
Soit f une fonction définie sur I, à valeurs réelles, de limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a.

- Si $\ell > 0$ alors f est strictement positive au voisinage de a.
- Si $\ell < 0$ alors f est strictement négative au voisinage de a.

I.6 Existence d'une limite finie

Soit a un point de $\mathbb{R}$, appartenant à I ou extrémité de I.

Théorème I.6.1 (Théorème d'encadrement)
Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles, et ℓ un nombre réel. S'il existe deux fonctions g et h définies sur I, à valeurs réelles telles que $g \leqslant f \leqslant h$ au voisinage de a avec g et h de même limite finie ℓ en a alors f admet pour limite ℓ en a.

Définition/Propriétés I.6.2 (Propriété pratique)
Soit f et g deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles, et ℓ un nombre réel. S'il existe un voisinage de a sur lequel on a pour tout x, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$ avec g de limite 0 en a alors f a pour limite ℓ en a.

Définition/Propriétés I.6.3 (Corollaires de la propriété pratique)
Soit f et g deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles.

- Si f a pour limite le réel ℓ en a alors $|f|$ a pour limite $|\ell|$ en a.
- Si f a pour limite 0 en a et si g est bornée au voisinage de a alors fg a pour limite 0 en a

I.7 Existence d'une limite infinie

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles.

Soit a un point de $\mathbb{R}$, appartenant à I ou extrémité de I.

Théorème I.7.1 (Théorème de minoration)
S'il existe une fonction g définie sur I, à valeurs réelles, telle que $g \leqslant f$ au voisinage de a avec g de limite $+\infty$ en a alors f admet pour limite $+\infty$ en a.

Théorème I.7.2 (Théorème de majoration)
S'il existe une fonction h définie sur I, à valeurs réelles telle que $f \leqslant h$ au voisinage de a avec h de limite $-\infty$ en a alors f admet pour limite $-\infty$ en a.

I.8 Théorèmes de limite monotone

Théorème I.8.1
Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $a < b$.

- *Cas où la fonction f: $]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $]a\,;b[$ est <u>CROISSANTE</u>*
  - *Si f est croissante et majorée alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x) = \sup\limits_{x \in]a;b[} (f(x))$*
  - *Si f est croissante et non majorée alors f admet pour limite $+\infty$ en b.*
  - *Si f est croissante et minorée alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \inf\limits_{x \in]a;b[} (f(x))$*
  - *Si f est croissante et non minorée alors f admet pour limite $-\infty$ en a.*
- *Cas où la fonction f: $]a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $]a\,;b[$ est <u>DECROISSANTE</u>*
  - *Si f est décroissante et minorée alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x) = \inf\limits_{x \in]a;b[} (f(x))$*
  - *Si f est décroissante et non minorée alors f admet pour limite $-\infty$ en b.*
  - *Si f est décroissante et majorée alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \sup\limits_{x \in]a;b[} (f(x))$*
  - *Si f est décroissante et non majorée alors f admet pour limite $+\infty$ en a.*

II Continuité des fonctions à valeurs réelles en un point

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.

II.1 Définition

Définition II.1.1

(1) f est dite continue en a si f admet pour limite $f(a)$ en a.

(2) f est dite continue à gauche en a si la restriction $f_{|I\cap]-\infty;a[}$ est continue en a c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

(3) f est dite continue à droite en a si la restriction $f_{|I\cap]a;+\infty[}$ est continue en a c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

II.2 Condition nécessaire et suffisante de continuité en un point

Définition/Propriétés II.2.1

f est continue en a si, et seulement si, elle est continue à gauche et à droite en a.

II.3 Caractérisation séquentielle de la continuité en un point

Définition/Propriétés II.3.1

f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui admet pour limite a, la suite réelle $(f(x_n))$ admet pour limite $f(a)$.

II.4 Opérations sur les fonctions continues en un point

Définition/Propriétés II.4.1

Soit f et g deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles.

(1) Combinaison linéaire

Si f et g sont continues en a et (λ, μ) est un couple de réels alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a.

(2) Produit

Si f et g sont continues en a alors fg est continue en a.

(3) Quotient

Si f et g sont continues en a et si g ne s'annule pas au voisinage de a alors fg est continue en a.

II.5 Composition de fonctions continues en un point

Définition/Propriétés II.5.1
Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles tel que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J.
Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.
Soit a un réel de I.
Si f est continue en a et si g est continue en$f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

II.6 Prolongement par continuité

Définition/Propriétés II.6.1
Soit b un réel n'appartenant pas à I mais extrémité de I.
Si f admet une limite finie ℓ en b alors le prolongement de f à $I \cup \{b\}$ noté $\tilde{f} : I \cup b \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $\forall x \in I, \tilde{f}(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(b) = \ell$ est continu en b et appelé prolongement par continuité de f en b.

III Continuité des fonctions sur un intervalle

III.1 Définition

Définition III.1.1
Une fonction définie sur I, à valeurs dans R est dite continue sur I si elle est continue en tout a de I.
L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans R est souvent noté $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^I$

III.2 Théorèmes généraux : combinaison linéaire, produit, quotient, composée

Théorème III.2.1

- $\forall (f,g) \in (\mathscr{C}(I,\mathbb{R}))^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha f + \beta g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$
- $\forall (f,g) \in (\mathscr{C}(I,\mathbb{R}))^2, fg \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$
- $\forall (f,g) \in (\mathscr{C}(I,\mathbb{R}))^2, g(I) \subset \mathbb{R}^*, \dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$
- $\forall f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}), \forall g \in \mathscr{C}(J,\mathbb{R}), f(I) \subset J \implies g \circ f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$

III.3 Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires

Théorème III.3.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et, a et b deux points de I.
Si f est continue sur I avec $f(a) \leqslant f(b)$ alors f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$

Démonstration
On suppose les hypothèses réunies. Dans le cas $a = b$, le résultat attendu est immédiat. On se place donc dans le cas $a < b$ (sans perte de généralité) avec $f(a) < f(b)$ (car le cas $f(a) = f(b)$ est immédiat).

Soit y un réel de l'intervalle $]f(a)\,;\,f(b)[$.

Montrons, en suivant le principe de dichotomie, qu'il existe un réel x dans $[a\,;\,b]$ tel que $y = f(x)$.

- On note $a_0 = a, b_0 = b$; on a alors $f(a_0) < y < f(b_0)$.
- Etape 1 : on pose $m_0 = \dfrac{1}{2}(a_0 + b_0)$.
  - si $y = f(m_0)$ alors on a bien trouvé un réel x dans $[a\,;\,b]$ tel que $y = f(x)$: c'est terminé !
  - si $f(a_0) < y < f(m_0)$, on pose $(a_1, b_1) = (a_0, m_0)$ et on continue la recherche de x dans $[a_1\,;\,b_1]$.
  - si $f(m_0) < y < f(b_0)$, on pose $(a_1, b_1) = (m_0, b_0)$ et on continue la recherche de x dans $[a_1\,;\,b_1]$.

  Dans ces deux derniers cas, on a : $f(a_1) < y < f(b_1)$ et on passe à l'étape 2.
- Etape 2 : on pose$m_1 = \dfrac{1}{2}(a_1 + b_1)$.
  - si $y = f(m_1)$ alors on a bien trouvé un réel x dans $[a\,;\,b]$ tel que $y = f(x)$: c'est terminé !
  - si $f(a_1) < y < f(m_1)$, on pose $(a_2, b_2) = (a_1, m_1)$ et on continue la recherche de x dans $[a_2\,;\,b_2]$.
  - si $f(m_1) < y < f(b_1)$, on pose $(a_2, b_2) = (m_1, b_1)$ et on continue la recherche de x dans $[a_2\,;\,b_2]$.

  Dans ces deux derniers cas, on a : $f(a_2) < y < f(b_2)$ et on passe à l'étape 3...0.

Dans ce processus, s'il existe un entier k_0 tel que $f(m_{k_0}) = y$, c'est terminé ! Sinon, on a créé une suite croissante (a_k) et une suite décroissante (b_k) telles que la suite $(a_k - b_k) = \left(\dfrac{b-a}{2^k}\right)$ a pour limite 0.

Ces suites sont donc adjacentes. Par théorème, elles convergent vers une même limite réelle ℓ qui vérifie $\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leqslant \ell \leqslant b_k$ donc, en particulier, $a_0 \leqslant \ell \leqslant b_0$ c'est-à-dire $a \leqslant \ell \leqslant b$.

Comme f est continue, on en déduit alors que les suites $(f(a_k))$ et $(f(b_k))$ convergent vers $f(\ell)$.

De plus, par construction des suites (a_k) et (b_k), on a : $\forall k \in \mathbb{N}, f(a_k) < y < f(b_k)$. Par passage à la limite, on trouve donc : $f(\ell) \leqslant y \leqslant f(\ell)$ puis, par antisymétrie, $f(\ell) = y$ et c'est terminé !

Conclusion : f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. ■

Définition/Propriétés III.3.2 (Image d'un intervalle)
L'image d'un intervalle de R par une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle de R.

Démonstration
On suppose que f est une fonction définie, continue sur un intervalle I et à valeurs réelles.

Montrons que $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ à l'aide de la caractérisation des intervalles vue dans le chapitre "Compléments sur les réels".

Soit α et β deux réels quelconques de $f(I)$ tels que $\alpha < \beta$.

Alors il existe a et b deux réels de I tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$.

Pour tout réel y de $[\alpha\,;\beta]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence d'un réel x compris entre a et b tel que $y = f(x)$. Comme a et b sont des réels appartenant à l'intervalle I, le réel x appartient aussi à l'intervalle I ce qui prouve que y appartient à $f(I)$.

Ainsi : $\forall(\alpha,\beta) \in (f(I))^2, \alpha < \beta \implies [\alpha\,;\beta] \subset f(I)$.

Par caractérisation des intervalles, on en déduit que $f(I)$ est un intervalle. ■

Définition/Propriétés III.3.3 (Cas des fonctions continues strictement monotones)
Si $f : I \longrightarrow R$ est continue et strictement croissante sur I, intervalle de bornes a et b avec $a < b$, alors

- pour $I = [a\,;b]$, on a : $f(I) = [f(a)\,;f(b)]$
- pour $I =]a\,;b[$, on a : $f(I) = \left]\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)\,;\lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x)\right[$
- pour $I = [a\,;b[$, on a : $f(I) = \left[f(a)\,;\lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x)\right[$
- pour $I =]a\,;b]$, on a : $f(I) = \left]\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)\,;f(b)\right]$

III.4 Théorème des bornes atteintes et corollaire

Théorème III.4.1 (Théorème des bornes atteintes)
Si f est une fonction continue sur un segment et à valeurs réelles alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration
On suppose les hypothèses réunies.

f étant continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et à valeurs réelles, l'image de $[a\ ;\ b]$ par f est un intervalle J. On note m la borne inférieure de J et M la borne supérieure de l'intervalle J considéré comme partie de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Par propriété (vue dans le chapitre "Compléments sur les réels"), il existe une suite (y_n) d'éléments de J de limite m.

Comme $J = f([a\ ;\ b])$, il existe alors une suite (x_n) d'éléments de$[a\ ;\ b]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = f(x_n)$.

La suite (x_n) étant à valeurs dans $[a\ ;\ b]$, elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weiestrass,elle admet donc une suite extraite convergente. On note $x_{\varphi(n)}$ une telle suite et ℓ sa limite.

On a donc :

- $y_{\varphi(n)} \longrightarrow m$ comme suite extraite d'une suite convergente de limite m ;
- $x_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$;
- f continue en ℓ car f continue sur$[a\ ;\ b]$ et $\ell \in [a\ ;\ b]$, comme limite d'une suite à valeurs dans $[a\ ;\ b]$.

On peut donc passer à la limite dans les égalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{\varphi(n)} = f\left(x_{\varphi(n)}\right)$$

Cela donne $m = f(\ell)$ et prouve donc que m est un réel et que m est atteint par f .

On montre de même que M est un réel atteint par f .

<u>Conclusion</u> : f est bornée et atteint ses bornes. ■

Définition/Propriétés III.4.2 (Image d'un segment)
L'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par une fonction continue à valeurs réelles est un segment de $\mathbb{R}$.

III.5 Théorème de la bijection

Définition/Propriétés III.5.1 (Continuité et injectivité)
Toute fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.

Remarque La réciproque est fausse ; en revanche, toute fonction strictement monotone sur un intervalle est injective.

Démonstration
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et $f : I \longrightarrow R$ continue et injective.

Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante. Alors, il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f(a) \geqslant f(b)$ et il existe $(a', b') \in I^2$ tel que $a' < b'$ et $f(a') \leqslant f(b')$.

On note $g : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in [0\,;1], g(t) = f((1-t)a' + ta) - f((1-t)b' + tb)$. Par théorèmes généraux, g est continue sur $[0\,;1]$ avec $g(0) = f(a') - f(b')$ et $g(1) = f(a) - f(b)$ donc $g(0) \leqslant 0$ et $g(1) \geqslant 0$. Par théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors $t_0 \in [0\,;1]$ tel que $g(t0) = 0$.

Ainsi $f((1-t_0)a' + t_0 a) = f((1-t_0)b' + t_0 b)$ puis, par injectivité de f , $(1-t_0)a' + t_0 a = (1-t_0)b' + t_0 b$ ce qui donne $(1-t_0)(b'-a') + t_0(b-a) = 0$. Comme les termes $(1-t_0)(b'-a')$ et $t_0(b-a)$ sont positifs, on en déduit que$(1-t_0)(b'-a') = t_0(b-a) = 0$ et enfin, comme $b'-a'$ et $b-a$ sont strictement positifs, on trouve $1 - t_0 = 0$ et $t0 = 0$ ce qui est absurde.

Conclusion : f est strictement monotone. ■

Théorème III.5.2 (Théorème de la bijection)
Si f est une fonction à valeurs réelles définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur$J = f(I)$ dont la bijection réciproque f^-1 est définie, continue et strictement monotone sur J avec même monotonie que f .

Démonstration
On suppose les hypothèses réunies.

f est injective (car strictement monotone) donc l'application $\tilde{f} : I \longmapsto f(I)$ définie par $\forall x \in I, \tilde{f}(x) = f(x)$ est injective et surjective donc est une bijection : on dit que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$. De plus, comme f est continue et à valeurs réelles, $J = f(I)$ est un intervalle de R, non vide (puisque I est non vide) et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ (puisque I n'est pas réduit à un point et que f est injective).

La bijection réciproque $\tilde{f^{-1}} : J \longmapsto I$, notée plus simplement f^{-1}, est définie sur J et strictement monotone de même monotonie que f . En effet, si on suppose que f est strictement croissante (par ex), alors pour tout $(x, y) \in J^2$ tel que $x < y$, on a $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ (sinon on aurait $f^{-1}(x) \geqslant f^{-1}(y)$

puis par stricte croissance de f , $x \geqslant y$ ce qui est faux) donc f^{-1} est strictement croissante sur J par définition.

Soit $\lambda \in J$. Comme f^{-1} est strictement monotone sur J, le corollaire du théorème de limite monotone prouve (sous réserve que cela ait du sens) que $\ell = \ell im_{\lambda^-} f^{-1}$ existe, est finie et appartient à I. Par continuité de f en ℓ, $\lim\limits_{x \longrightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$ puis par composition de limites, $\lim\limits_{y \longrightarrow \lambda^-} f\left(f^{-1}(y)\right) = f(\ell)$ ce qui donne $f(\ell) = \lambda$ puis $\ell = f^{-1}(\lambda)$ et prouve quef^{-1} est continue à gauche en λ. On montre de même (sous réserve que cela ait du sens) la continuité à droite ce qui prouve la continuité de f^{-1} en tout λ de J.

Conclusion : f^{-1} est définie, continue et strictement monotone sur J avec même monotonie que f . ■

IV Cas des fonctions à valeurs complexes

IV.1 Ce qui s'étend aux fonctions complexes

Définition/Propriétés IV.1.1

- Limite finie :
  - définition et caractérisations (cf infra) ;
  - unicité ;
  - opérations sur les limites finies ;
  - lien entre existence d'une limite finie en un point et caractère borné au voisinage de ce point.
- Continuité en un point et sur un intervalle.

IV.2 Ce qui ne s'étend pas aux fonctions à valeurs complexes

Définition/Propriétés IV.2.1

- Notion de limite infinie.
- Résultats utilisant la relation d'ordre dont les théorèmes d'existence de limite.

IV.3 Limite d'une fonction à valeurs complexes

Définition/Propriétés IV.3.1
Soit f une fonction définie sur I et à valeurs complexes, et ℓ un nombre complexe.
Définition :

Soit a un point de I ou une extrémité de I.
On dit que f a pour limite ℓ en a si la fonction à valeurs réelles $|f-\ell|$ a pour limite 0 en a.
Caractérisations :

- f admet pour limite ℓ en a (point de I ou extrémité de I) si, et seulement si, $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ admettent respectivement pour limite $\mathrm{Re}\,(\ell)$ et $\mathrm{Im}\,(\ell)$ en a.
- f est continue en a (point de I) si, et seulement si, $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ le sont.
- f est continue sur I si, et seulement si, $Re(f) et Im(f)$ le sont.

Chapitre 13

Calcul matriciel et systèmes linéaire

Sommaire

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Matrice rectangles

Soit $(m, n, p, q, r, s) \in \mathbb{N}^6$

I.1 Généralités

Définition I.1.1
Toute application$A : [1\ ;\ n] \times [1\ ;\ p] \longrightarrow \mathbb{K}$ est appelée matrice de taille (n, p) à coefficients dans K.

Notations et représentation

- Pour tout $(i, j) \in [1\ ;\ n] \times [1\ ;\ p]$, on pose $a_{ij} = A(i, j)$ et on note usuellement

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

- On représente $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ sous forme d'un tableau, à n lignes et p colonnes, dont l'élément situé en ligne i et colonne j est le nombre a_{ij}.

Définition/Propriétés I.1.2 (L'ensemble des matrices rectangles)
L'ensemble des matrices de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition/Propriétés I.1.3 (Opérations sur les matrices rectangles)
On munit l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de deux lois :

- une loi interne (addition entre matrices) notée + définie par :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2, A+B = \left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

- une loi externe (Multiplication par un scalaire *i.e.* un élement de $\mathbb{K}$) noté . définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \lambda.A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

Définition/Propriétés I.1.4 (Matrices élémentaires)
Toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'écrire $A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}E_{ij}$ avec E_{ij} la matrice de$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à coefficients tous nuls, sauf celui de la i^e ligne et j^e colonne qui vaut 1.

I.2 Produit

Définition I.2.1
On définit le produit de deux matrices rectangles de taille (n, p) et (p, q) de la manière suivante :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A \times B = (c_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Propriétés I.2.2

(1) Le produit matriciel est bilinéaire, c'est-à-dire :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2, \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, (\alpha A + \beta B) C = \alpha AC + \beta BC$$

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2, \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall (\alpha,\beta) \in C\mathbb{K}^2, (\alpha A + \beta B) = \alpha CA + \beta CB$$

(2) Le produit matriciel est associatif, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), (AB)C = A(BC)$$

Démonstration (Preuve de l'associativité du produit matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On pose :

- $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$
- $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$
- $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$
- $BC = (d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$
- $A(BC) = (e_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$
- $AB = \left(d'_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$
- $(AB)C = \left(e'_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant r}}$ ■

Soit $(i,j) \in [1\,;n] \times [1\,;r]$

$$\begin{aligned}
A(BC) = e_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} d_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(a_{i,k} \left(\sum_{s=1}^{q} b_{k,s} c_{s,j} \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{q} a_{i,k} b_{k,s} c_{s,j} \right) \\
&= \sum_{s=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,s} c_{s,j} \right) \\
&= \sum_{s=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,s} \right) c_{s,j} \\
&= \sum_{s=1}^{q} d'_{i,s} c_{s,j} \\
&= (AB)C
\end{aligned}$$

Définition/Propriétés I.2.3 (Produits remarquables)

(1) Le produit d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et d'une matrice colonne X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est une combinaison linéaire des colonnes de A.

(2) Le produit des matrices élémentaires E_{xy} de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et E_{zt} de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

$$E_{xy}E_{zt} = \delta_{y,z}E_{xt} \text{ avec } \delta_{y,z} = \begin{cases} 1 & \text{si } y = z \\ 0 & \text{si } y \neq z \end{cases}$$

<u>Remarque</u>
Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2, \delta_{i,j}$ est appelé "sybome de Kronecker"

I.3 Transposition

Définition I.3.1
La transposée de $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $A^\top$ définie par :

$$A^\top = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ avec } b_{ij} = a_{ji}$$

Définition/Propriétés I.3.2 (Linéarité de la transposition)

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$$

Définition/Propriétés I.3.3 (transposée d'un produit)

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}, (AB)^\top = B^\top A^\top$$

II Opérations élémentaires, systèmes linéaires

II.1 Définitions

Définition II.1.1
On appelle opération élémentaire sur les lignes $L_1, \dots, L_n$ d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'une des opérations suivantes :

(1) Echange de deux lignes distinctes :
$$L_r \leftrightarrow L_s$$
avec $r \neq s$

(2) Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul :
$$L_r \leftarrow \lambda L_r$$
avec $\lambda \neq 0$.

(3) Addition à une ligne du produit d'une autre ligne par un scalaire non nul :
$$L_r \leftarrow L_r + \lambda L_s$$
avec $r \neq s$ et $\lambda \neq 0$.

II.2 Traduction en termes de produit matriciel

Définition/Propriétés II.2.1 (Matrice identité)

(1) La matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dite matrice identité

(2) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), I_n A = A$

(3) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A I_p = A$

Définition/Propriétés II.2.2 (Opérations élémentaires et produits matriciels)

- L'opération $L_r \leftrightarrow L_s$ sur $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ équivaut à la multiplication $P_{r,s} \times A$ avec $P_{r,s} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :
$$P_{r,s} = I_n + (E_{rs} + E_{rs} - E_{rr} - E_{ss})$$
$P_{r,s}$ est dite matrice de permutation
- L'opération $L_r \leftarrow \lambda L_r$ sur $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ équivaut à la multiplication $D_{r,\lambda} \times A$ avec $D_{r,\lambda} \times A$ avec $D_{r,\lambda} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :
$$D_{r,s} = I_n + (\lambda - 1) E_{rr}$$
$D_{r,\lambda}$ est dite matrice de dilatation
- L'opération $L_r \leftarrow L_r + \lambda L_s$ sur $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ équivaut à la multiplication $T_{r,s,\lambda} \times A$ avec $T_{r,s,\lambda} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :
$$T_{r,s,\lambda} = I_n + \lambda E_{rs}$$
$T_{r,s,\lambda}$ est dite matrice de transvection.

II.3 Système d'équation linéaires

Définition/Propriétés II.3.1
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Le Système linéaire $\mathcal{S}$: $\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$ d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^p$ se traduit matriciellement par l'équation $AX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ que l'on appelle encore système

- Compatibilité du système

  On dit que le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A (ce qui assure l'existence de solutions au système).
- Ensemble-solution de $\mathcal{S}$ Si le système $AX = B$ est compatible alors ses solutions sont les matrices $X_0 + Y$ avec :
  (1) $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière de $AX = B$;
  (2) $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ solution quelconque du système homogène $AX = 0$ associé.
- Résolution effective de $\mathcal{S}$ Par opérations élémentaires sur les lignes du système $\mathcal{S}$, on peut obtenir un système $\mathcal{S}'$, dit équivalent à $\mathcal{S}$ (car il a les mêmes solutions que $\mathcal{S}$) de forme trapézoïdale

$$\mathcal{S}' : \left\{ \begin{array}{cccccccc} a'_{11}x_1 + & & & & \cdots & +a'_{1p}x_p & = & b'_1 \\ & a'_{22}x_2 + & & & \cdots & +a'_{2p}x_p & = & b'_2 \\ & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a'_{qq}x_q & + \cdots & +a'_{qp}x_p & = & b'_q \\ & & & & & 0 & = & b'_{q+1} \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & = & b'_n \end{array} \right.$$

qui peut se traduire matriciellement par :

$$A'X = B'$$

avec A' matrice $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :
— les lignes de 1 à q contiennent chacune au moins un coefficient non nul ;
— dans chaque ligne de 2 à q, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente ;
— les lignes numérotées de q + 1 à n sont nulles.

Les $(n - q)$ dernières équations de $\mathcal{S}'$ donnent les conditions de compatibilité du système. Ces conditions étant réunies, le nombre de paramètres pour la résolution est $(p - q)$.

III Matrices carrées

III.1 Ensemble des matrices carrées

Définition III.1.1
L'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est souvent noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

III.2 Matrices carrées de formes particulières

Définition/Propriétés III.2.1
Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant,}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Matrices diagonales ou triangulaires

  (a) A est dite scalaire s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

  (b) A est dite diagonale si $\forall (i,j)\ [1\ ;\ n]^2, i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

  (c) A est dite triangulaire supérieure si $\forall (i,j)\ [1\ ;\ n]^2, i > j \implies a_{ij} = 0$.

  (d) A est dite triangulaire inférieure si $\forall (i,j)\ [1\ ;\ n]^2, i < j \implies a_{ij} = 0$.

(2) Matrices symétriques ou antisymétriques

  (a) A est dite symétrique si $A^\top = A$.
  On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  (b) A est dite antisymétrique si $A^\top = -A$.
  On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

III.3 Deux formules usuelles

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$

- Formule du binôme

  Si $AB = BA$ alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{k}{p} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{k}{p} A^{p-k} B^k$$

- Une formule de factorisation

  Si $AB = BA$ alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$A^p - B^p = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^{p-1-k} B^k$$

III.4 Matrices inversibles

Définition/Propriétés III.4.1

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

  Dans ce cas,
  la matrice B est unique, notée $B = A^{-1}$, et appelée matrice inverse de A.
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et appelé groupe linéaire.

Propriétés III.4.2

- Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors AB est inversible d'inverse $A^{-1}B^{-1}$, autrement dit :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}))^2, AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- Si A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A^\top$ est inversible d'inverse $\left(A^{-1}\right)^\top$, autrement dit :

$$\forall A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), A^\top \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } \left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$$

Définition/Propriétés III.4.3 (Trois caractérisations des matrices inversibles)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) A est inversible si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.

  Dans ce cas,$B = A^{-1}$.

(2) A est inversible si, et seulement si, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_n$.

  Dans ce cas, $C = A^{-1}$.

(3) A est inversible si, et seulement si, pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ a une unique solution.

III.5 Calculs de matrices inverses en pratique

Définition/Propriétés III.5.1 (Calcul de l'inverse par résolution d'un système)
La résolution du système $AX = Y$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(X, Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ permet de déterminer si la matrice A est inversible et d'obtenir son inverse si celle-ci existe.

En effet,

- si A est inversible alors le système $AX = Y$ a une unique solution $X = A^{-1}Y$. Dans ce cas, l'expression de X en fonction de Y obtenue après résolution permet d'expliciter A^{-1}.
- Si le système $AX = Y$ n'a pas de solution unique (pas de solution ou plusieurs solutions) alors A n'est pas inversible.

Définition/Propriétés III.5.2 (Préservation de l'inversibilité par les opérations élémentaires)
Si A est une matrice carrée inversible alors la matrice obtenue à partir de A après des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes de A est inversible.

Remarques

- Cela résulte de l'inversibilité des matrices de permutation, de dilatation et de transvection $P_{r,s}, D_{r,\lambda}$ et $T_{r,s,\lambda}$ et de la stabilité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ par produit.
- Par contraposition, si la matrice obtenue à partir de A après des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes n'est pas inversible alors la matrice A n'est pas inversible.

Définition/Propriétés III.5.3 (Calcul de l'inverse par opérations élémentaires)
En réalisant en parallèle les mêmes opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de la matrice identité I_n, on peut déterminer si la matrice A est inversible et obtenir son inverse si celle-ci existe. En effet, en essayant de retransformer A en la matrice identité I_n et en reproduisant simultanément les même opérations sur la matrice identité I_n alors à la fin de la transformation, la matrice obtenue de la matrice identité est A^{-1}. (méthode du pivot de Gauss-Jordan).

Remarque

Dans cette méthode, il est impératif de ne pas mélanger les opérations sur les lignes et colonnes : autrement dit, on agit uniquement sur les lignes ou uniquement sur les colonnes. On pourra lui préférer la méthode de résolution du système dans laquelle la confusion ne peut se faire.

III.6 Cas particulier

Définition/Propriétés III.6.1 (Matrices diagonales)
Une matrice diagonale est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous non-nuls.

Dans ce cas, sa matrice inverse est diagonale.

Définition/Propriétés III.6.2 (Matrices triangulaires)
Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous non-nuls.

Dans ce cas, sa matrice inverse est triangulaire.

Chapitre 14

Équations différentielles linéaires

Sommaire

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide réduit à un point de $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

I.1 Définition

Définition I.1.1
Soit a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E) : y' + a(t)y = b(t)$$

si f est dérivable sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = b(t).$$

I.2 Forme générale des solutions

Définition/Propriétés I.2.1
Soit a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $y' + a(t)y = b(t)$ s'obtiennent en additionnant :

- UNE solution particulière de (E) ;
- LES solutions de l'équation différentielle homogène associée (H) : $y' + a(t)y = 0$.

Démonstration
Soit a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

on pose (E) : $y' + a(t)y = b(t)$

Supposons que y_0 est solution de E

Soit $y : I \longmapsto \mathbb{K}$ dérivable

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) &\iff \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = y_0'(t) + a(t)y_0(t) \\
&\iff \forall t \in I, (y - y_0)'(t) + a(t)(y - y_0)(t) = 0 \\
&\iff y - y_0 \text{ solution de } (H) : z' + a(t)z = 0 \\
&\iff y_0 \text{ s'écrit } y = y_0 + z \text{ où } z \text{ est une solution quelconque de } (H) \text{ sur } I
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S}_{E,I} = y_0 + \mathcal{S}_{H,I}$$

■

I.3 Solutions de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$.

Définition/Propriétés I.3.1
Soit a une fonction continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (H) : $y' + a(t)y = 0$ sur I est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \longmapsto \lambda e^{-A(t)} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

où A désigne une primitive de la fonction a sur I.

Démonstration
Résolution de $(H) : y' + a(t)y = 0$ sur I

On note A une primitive de a sur I

Soit $y : I \longmapsto \mathbb{K}$ dérivable sur I

$$
\begin{aligned}
y \text{ solution de } (H) &\iff \forall t \in I, y'(t) + A'(t)y(t) = 0 \\
&\iff \forall t \in I, y'(t)e^{A(t)} + A'(t)e^{A(t)}y(t) \text{ car } \forall t \in I, e^{A(t)} \neq 0 \\
&\iff \forall t \in I, g'(t) = 0 \text{ avec } g(t) = y(t)e^{A(t)} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, g(t) = \lambda \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in y(t) = \lambda e^{-A(t)}
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \longmapsto \lambda e^{-A(t)} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

■

I.4 Solution particulière de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$.

Définition/Propriétés I.4.1 (Principe de superposition de solutions)
Soit a, b_1 et b_2 des fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f_1 : I \longrightarrow K \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } y' + a(t)y = b_1(t) \text{ sur } I \\ f_2 : I \longrightarrow K \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } y' + a(t)y = b_2(t) \text{ sur } I \end{cases}$$

alors, $f_1 + f_2 : I \longrightarrow K$ est solution sur I de l'équation différentielle linéaire $y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$.

Définition/Propriétés I.4.2 (Détermination d'une solution particulière y_0)
Soit a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

S'il n'y a pas de solution particulière évidente/connue pour $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ ou si le principe de superposition des solutions n'est pas applicable pour en déterminer une alors on pourra chercher une solution particulière de (E) selon la méthode dite de "variation de la constante" c'est-à-dire sous la forme

$$y_0 : t \longmapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$$

avec A une primitive de a sur I et λ une fonction inconnue dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Démonstration (Démonstration de la méthode de la variation de la constante)
Soit a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Résolution de $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ sur I

On pose $y_0(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ avec λ une fonction dérivable sur I et à valeur dans $\mathbb{K}$ et A une primitive de a

$$\begin{aligned}
y_0 \text{ solution de } (E) &\iff \forall t \in I, y_0'(t) + a(t)y_0(t) = b(t) \\
&\iff \forall t \in I, \lambda'(t)e^{-A(t)} + \lambda(t)\left(-a(t)e^{-A(t)} + a(t)e^{-A(t)}\right) = b(t) \\
&\iff \forall t \in I, \lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t) \\
&\iff \forall t \in I, \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}
\end{aligned}$$

Ainsi en primitivant $b(t)e^{A(t)}$ (qui existe car b et A sont continue) on trouve une solution particulière ∎

I.5 Théorème de Cauchy : existence et unicité

Théorème I.5.1
Soit a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pout tout $t_0 \in I$ et tout $\alpha_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution f sur I de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(t)y = b(t)$ telle que $f(t_0) = \alpha_0$

II Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

II.1 Définition

Définition II.1.1
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ et g une application continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

La fonction$f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$(E) : y'' + ay' + by = g(t)$$

si f est deux fois dérivable sur I et vérifie : $\forall t \in I, f''(t) + af'(t) + bf(t) = g(t)$.

II.2 Forme générale des solutions

Définition/Propriétés II.2.1
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ et g une application continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre$(E) : y'' + ay' + by = g(t)$ s'obtiennent en additionnant :

- une solution particulière de (E) ;
- les solutions de l'équation différentielle homogène associée $(H) : y'' + ay' + by = 0$

II.3 Solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y'' + ay' + by = 0$

Définition/Propriétés II.3.1 (Equation caractéristique)
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.

La recherche de solutions de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

$$(H) : y'' + ay' + by = 0$$

sous la forme $t \longmapsto e^{rt}$ avec $r \in \mathbb{K}$ conduit à l'équation

$$(EC) : r^2 + ar + b = 0$$

dite équation caractéristique associée à (H).

Définition/Propriétés II.3.2 (Ensemble des solutions dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $(H) : y'' + ay' + by = 0$

- Si l'équation caractéristique (EC) a deux racines distinctes r_1 et r_2 alors :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

- Si l'équation caractéristique (EC) a une racine double r alors

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\, e^{rt} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Définition/Propriétés II.3.3 (Ensemble des solutions dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $(H) : y'' + ay' + by = 0$

-
- Si l'équation caractéristique (EC) a deux racines distinctes r_1 et r_2 alors :

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Si l'équation caractéristique (EC) a une racine double r alors

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\, e^{rt} \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Si l'équation caractéristique (EC) a deux racines complexes conjuguées r et $\overline{r}$ non réelles alors

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \longmapsto e^{\alpha t}\left(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)\right) \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$\text{avec } \alpha = \mathrm{Re}\,(r) \ \text{ et } \beta = \mathrm{Im}\,(r)$$

Définition/Propriétés II.3.4 (Structure de l'ensemble des solutions)
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.

Les deux points précédents permettent de mettre en évidence le résultat suivant.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle linéaire $(H) : y'' + ay' + by = 0$ est donc :

$$\mathcal{S}_H = \left\{t \longmapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \;\middle|\; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\right\}$$

où (y_1, y_2) un couple de fonctions non colinéaires solutions de (H) sur I.

II.4 Solution particulière de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = g(t)$.

Définition/Propriétés II.4.1 (Principe de superposition de solutions)
Soit a, b deux éléments de $\mathbb{K}$, g_1 et g_2 des fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f_1 : I \longrightarrow K \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } y'' + ay' + by = g_1(t) \text{ sur } I \\ f_2 : I \longrightarrow K \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire } y'' + ay' + by = g_2(t) \text{ sur } I \end{cases}$$

alors, $f_1 + f_2 : I \longrightarrow K$ est solution sur I de l'équation différentielle linéaire $y'' + ay' + by = b_1(t) + b_2(t)$.

Définition/Propriétés II.4.2 (Détermination d'une solution particulière y0)
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ et g une application continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Selon le programme de MP2I,

s'il n'y a pas de solution particulière y_0 évidente/connue pour (E) : $y'' + ay' + by = g(t)$ ou si le principe de superposition ne s'applique pas pour en déterminer une, les étudiants doivent savoir en trouver une dans les trois cas suivants selon le type du second membre.

- Cas où g est une fonction polynomiale de degré n

  On pourra chercher y_0 sous la forme d'une fonction polynomiale de degré n si b est différent de0 ou de degré $n+1$ si b est égal à 0.
- Cas où $g : t \longmapsto Ae^{\lambda t}$ avec A et λ deux éléments de $\mathbb{K}$. On pourra chercher y_0 sous l'une des formes suivantes selon la valeur de λ :

$$y_0 : t \longmapsto \begin{cases} \alpha e^{\lambda t} & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } (EC) \\ \alpha t e^{\lambda t} & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine simple de } (EC) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K} \\ \alpha t^2 e^{\lambda t} & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine double de } (EC) \end{cases}$$

- Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $g : t \longmapsto B\cos(\omega t)$ $[$ou $g : t \longmapsto B\sin(\omega t)]$ avec B et ω deux éléments de $\mathbb{R}$

  On pourra, à l'aide de la méthode décrite ci-dessus, déterminer une solution particulière z_0 de l'équation
  $$y'' + ay' + by = Be^{i\omega t}$$
  et conclure que $y_0 = \mathrm{Re}\,(z_0)$ $[$ou $y_0 = \mathrm{Im}\,(z_0)$ selon le cas étudié$]$ convient.

II.5 Théorème de Cauchy : existence et unicité (preuve hors programme)

Définition/Propriétés II.5.1
Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ et g une application continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pout tout $t_0 \in I$ et tout $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution f sur I de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + ay' + by = g(t)$ telle que $f(t_0) = \alpha_0$ et $f'(t_0) = \beta_0$.

Chapitre 15

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Sommaire

I Division euclidienne

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

I.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition I.1.1
S'il existe q dans $\mathbb{Z}$ tel que $a = bq$, on dit que b divise a (ou b est un diviseur de a) et on note $b \mid a$.

Dans ce cas,

on dit aussi que a est divisible par b (ou a est un multiple de b).

Définition/Propriétés I.1.2 (Ensembles des diviseurs et des multiples)

- On note $\mathcal{D}(a) = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z}, a = bq\}$ l'ensemble des diviseurs de a.
  - Si $a = 0$ alors $\mathcal{D}(a) = \mathbb{Z}$ donc $\mathcal{D}(a)$ est infini.
  - Si $a \neq 0$ alors $\mathcal{D}(a) \subset [\![-|a|\ ;\ |a|]\!]$ donc $\mathcal{D}(a)$ est fini.
- On note $b\mathbb{Z} = \{bq \mid q \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples de b.
  - Si $b = 0$ alors $b\mathbb{Z} = \{0\}$ donc $b\mathbb{Z}$ est fini.
  - Si $b \neq 0$ alors $b\mathbb{Z}$ est infini.

Définition/Propriétés I.1.3 (Caractérisation des couples d'entiers associés)
Si l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée, on dit que les entiers a et b sont associés.

(1) $a \mid b$ et $b \mid a$.

(2) $|a| = |b|$.

(3) $a = b$ ou $a = -b$.

Définition/Propriétés I.1.4 (Propriétés immédiates)

(1) $a \mid a$.

(2) Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$.

(3) Si $a \mid b$ et $c \mid d$ alors $ac \mid bd$.

(4) Si $a \mid b$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $an \mid bn$.

(5) Si $c \mid a$ et $c \mid b$ alors, pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2, c \mid au + bv$.

(6) Si $a = bc + d$ alors $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(d)$.

I.2 Division euclidienne

Théorème I.2.1 (Théorème de la division euclidienne)
Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, il existe un unique couple (q,r) de $\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant b-1.$$

Dans la division euclidienne de a par b, a est appelé dividende, b diviseur, q quotient et r reste.

Démonstration
Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$

$\boxed{\text{existence}}$ posons $q = \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor$ et $r = a - bq$

alors $q \leqslant \dfrac{a}{b} < b+1$

donc $bq \leqslant a < b(q+1) \iff 0 \leqslant r < b$.

De plus $q\in\mathbb{Z}$ donc $r\in\mathbb{Z}$ ainsi avec ce qui précède on a : $r\in[\![0\,;b-1]\!]$

$\boxed{\text{unicité}}$ On suppose qu'il existe $\begin{cases}(q,r) & \in \mathbb{Z}\times[\![0\,;b-1]\!]\\(q',r') & \in\mathbb{Z}\times[\![0\,;b-1]\!]\end{cases}$ tel que $\begin{cases}a & = bq+r\\ a & = bq'+r'\end{cases}$

Alors $b(q-q') = r'-r$ Ainsi

Si $q-q'\neq 0$ alors $|q-q'|\geqslant 1$ puis $|r'-r|\geqslant |b|$ et donc $|r'-r|\geqslant b$ car $b>0$.

or $|r'-r\leqslant b-1|$ car $\begin{cases}0\leqslant r\leqslant b-1\\0\leqslant r'\leqslant b-1\end{cases}$

Donc $q-q' = 0 \implies q = q'$ et aussi $r-r' = 0 \implies r = r'$ $\boxed{\text{conclusion}}$ Le couple q,r existe et est unique ■

Définition/Propriétés I.2.2 (Caractérisation de la divisibilité)
Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$.

b divise a si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

II PGCD et PPCM

II.1 Cas de deux entiers naturels

Définition II.1.1 (Définition du PGCD)
Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Le plus grand élément (au sens de $\leqslant$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b est dit PGCD de a et b et noté $a \wedge b$:

$$a \wedge b = \max(\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b))$$

Propriétés II.1.2 (Propriété importante)
Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors $\begin{cases} \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) & = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r) \\ a \wedge b & = b \wedge r \end{cases}$

Démonstration
Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $r \in \mathbb{N}$ le reste de la division euclidienne de a par b. Montrons que $\begin{cases} \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) & = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r) \\ a \wedge b & = b \wedge r \end{cases}$ par double inclusion :

- Montrons que $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) \subset \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$

  Soit $d \in \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ alors :

  $d \mid b$ donc $d \mid bq$ avec $q \in \mathbb{Z}^*$ et $d \mid a$ donc $d \mid a - bq$ or $r = a - bq$ donc $d \mid r$ et $d \mid b$ donc $d \in \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$.
- De même Montrons que $\mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r) \subset \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$ Soit $d \in \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$ alors :

  alors $d \mid b$ donc $d \mid bq$ avec $q \in \mathbb{Z}^*$ et $d \mid r$ donc $d \mid bq + r$ or $a = bq + r$ donc $d \mid a$ et $d \mid b$ donc $d \in \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(a)$.

$\boxed{\text{conclusion}}$ Par double inclusion $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(r)$ et ainsi par définition du PGCD $a \wedge b = b \wedge r$ ∎

Définition/Propriétés II.1.3 (algorithme d'euclide)
Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

On pose $r_0 = a$ et $r_1 = b$ puis, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_i \neq 0$, on définit r_{i+1} comme suit :

$$r_{i+1} \text{ est le reste de la division euclidienne de } r_{i-1} \text{ par } r_i.$$

Alors :

- il existe $n \in N$ tel que

$$r_{n+1} = 0 \text{ et } r_n \neq 0$$

- pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,
$$r_{i-1} \wedge r_i = r_i \wedge r_{i+1}$$

En particulier $r_0 \wedge r_1 = r_n \wedge r_{n+1}$ donc :
$$a \wedge b = r_n$$

Définition/Propriétés II.1.4 (Caractérisation du PGCD)
Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$:

$$\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$$

Le PGCD de a et b est donc le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b, c'est-à-dire que :

- $a \wedge b \mid a$ et $a \wedge b \mid b$
- $\forall d \in \mathbb{N}, d \mid a$ et $d \mid b \implies d \mid a \wedge b$.

Définition/Propriétés II.1.5 (Propriété de factorisation du PGCD)
Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le PGCD de ka et kb vérifie

$$ka \wedge kb = k(a \wedge b)$$

Démonstration
Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$

- $\begin{cases} a \wedge b \mid a \\ k \mid k \end{cases}$ et $\begin{cases} a \wedge b \mid b \\ k \mid k \end{cases}$ donc par propriété $\begin{cases} k\,(a \wedge b) & \mid ka \\ k\,(a \wedge b) & \mid kb \end{cases}$ donc $k\,(a \wedge b) \mid ka \wedge kb$ car $\mathcal{D}(ka) \cap \mathcal{D}(kb) = \mathcal{D}(ka \wedge kb)$
- $k \mid ka$ et $k \mid kb$ donc $k \mid ka \wedge kb$ donc $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $ka \wedge kb = kq$

  Ainsi $kq \mid ka$ et $kq \mid kb$ et donc $q \mid a$ et $q \mid b$

  ainsi $q \mid a \wedge b$ puis $kq \mid k\,(a \wedge b)$ et donc enfin $ka \wedge kb \mid k\,(a \wedge b)$

Ainsi on a $k\,(a \wedge b) \mid ka \wedge kb$ et $ka \wedge kb \mid k\,(a \wedge b)$

donc $k\,(a \wedge b)$ et $ka \wedge kb$ sont associés et donc égaux, car ce sont des entiers naturels non-nuls donc $ka \wedge kb = k(a \wedge b)$ ■

II.2 Cas de deux entiers relatifs

Définition II.2.1
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

On appelle PGCD de a et b l'entier naturel noté $a \wedge b$ défini par :

$$a \wedge b = \begin{cases} |a| \wedge |b| & \text{si } (a, b) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (a, b) = (0, 0) \end{cases}$$

Définition/Propriétés II.2.2 (Extension des résultats vus pour les entiers naturels)

(1) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(a) $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de $\leqslant$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

(b) $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de $|$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

(2) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

(a) $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}, ka \wedge kb = |k| (a \wedge b)$

Définition/Propriétés II.2.3 (Relation de Bézout)
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Il existe un couple d'entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, dit couple de Bézout, tel que $au + bv = a \wedge b$. Remarque

- Un tel couple n'est PAS UNIQUE.
- Pour $(a, b) \neq (0, 0)$, on peut déterminer un tel couple par l'algorithme d'Euclide étendu.

  on a : $(r_0, r_1) = (a, b), r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1}$ (division euclidienne de r_{i-1} par r_i) et n le plus petit entier tel que $r_{n+1} = 0$. Ainsi, en posant

  $$\begin{cases}(u_0, v_0) & = (1, 0)(u_1, v_1) = (0, 1) \end{cases} \text{ et, pour tout } i \in [\![1 \,;\, N]\!] \,, (u_{i+1}, v_{i+1}) = (u_{i-1} - q_i u_i, v_{i-1} - q_i v_i)$$

  . on a : $\forall i \in [\![0 \,;\, n]\!] \,, au_i + bv_i = r_i$. En particulier, comme r_n est égal à $a \wedge b$, on en déduit que :

  $$a \wedge b = au_n + bv_n \text{ avec } (u_n, v_n) \in \mathbb{Z}^2$$

- Il n'est pas nécessaire de connaître les relations de récurrence définissant les familles $(u_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $(v_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

II.3 PPCM

Définition II.3.1
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Le PPCM de a et b est l'entier naturel noté $a \vee b$ défini par

$$a \vee b = \begin{cases} \min\left(|a|\,\mathbb{N}^* \cap |b|\,\mathbb{N}^*\right) & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \text{ ou } b = 0 \end{cases}$$

Remarques

- Pour tout $a \in \mathbb{Z}, a \vee a = a \vee 1 = |1|$.
- Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, $a \vee b$ est le plus petit entier naturel non nul, multiple commun de a et b.

Propriétés II.3.2
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$|ab| = (a \wedge b)(a \vee b)$$

Démonstration
$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$

- si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors prenons $k \in \mathbb{N}$

  alors :

$$\begin{aligned} k \in |a|\,\mathbb{N}^* \cap |b|\,\mathbb{N}^* &\iff |a| \mid k \text{ ou } |b| \mid k \\ &\iff |ab| \mid (k\,|a| \wedge k\,|b|) \\ &\iff |ab| \mid k\,(|a| \wedge |b|) \\ &\iff \exists q \in \mathbb{N}, k\,(|a| \wedge |b|) = q\,|ab| \\ &\iff \exists q \in \mathbb{N}, kq\frac{|ab|}{(|a| \wedge |b|)} \\ &\iff \frac{|ab|}{(|a| \wedge |b|)} \mid k \\ &\iff k \in \frac{|ab|}{(|a| \wedge |b|)}\mathbb{N}^* \\ &\iff |a|\,\mathbb{N}^* \cap |b|\,\mathbb{N}^* = \frac{|ab|}{(|a| \wedge |b|)}\mathbb{N}^* \end{aligned}$$

  Donc $a \vee b = \dfrac{|ab|}{(|a| \wedge |b|)}$.

  Ainsi$|ab| = (a \vee b)\,(|a| \wedge |b|) \implies |ab| = (a \vee b)\,(a \wedge b)$

- De plus si $(a, b) = (0, 0)$ alors on a toujours $|ab| = (a \vee b)\,(a \wedge b)$ car $\begin{cases} |ab| & = 0 \\ (a \vee b)\,(a \wedge b) & = 0 \end{cases}$ ∎

III Entiers premiers entre eux

III.1 Cas de couples d'entiers

Soit $(a, b, c, n) \in \mathbb{Z}^4$

Définition III.1.1
Les entiers a et b sont dits premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1. Remarque

Autrement dit, a et b sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont -1 et 1.

Théorème III.1.2 (Théorème de Bézout)
a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$

Démonstration (Théorème de Bézout)
Montrons le théorème par double inclusion

- $\boxed{\Longrightarrow}$ immédiat par relation de Bézout
- $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1$

  Soit $d \in \mathbb{N}$ tq $d \mid a$ et $d \mid b$ alors $d \mid au + bv$ donc $d \mid 1$ donc $d = 1$ ainsi $a \wedge b = 1$

Théorème III.1.3 (Lemme de Gauss)
Si c divise ab et si a et c sont premiers entre eux alors c divise b.

Remarque

Tout nombre rationnel r non nul peut s'écrire sous la forme $r = \dfrac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$.

Cette écriture est unique et appelée forme irréductible de r.

Propriétés III.1.4 (Propriétés sur le produit)
(1) Si a et b sont premiers entre eux et si a et b divisent n alors ab divise n.
(2) Si a et n sont premiers entre eux et si b et n sont premiers entre eux alors ab et n sont premiers entre eux.

Démonstration
Soit $(a, b, n) \in \mathbb{Z}^3$

Démontrons les deux propriétés précédentes

(1) par hypothèse $\begin{cases} \exists q \in \mathbb{Z}, n = aq \\ \exists q' \in \mathbb{Z}, n = bq' \end{cases}$ donc $aq = bq'$ avec $a \wedge b = 1$ donc $b \mid q$

$\exists q'' \in \mathbb{Z}$ tel que $q = bq''$ ce qui donne $n = abq''$ donc $ab \mid n$

(2) par hypothèse et d'après le théorème de bézout on a :

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } au + nv = 1$$

$$\exists (u', v') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } bu' + nv' = 1$$

donc par multiplication membre à membre on a :

$$ab(u'u) + n(bvu' + nvv' + auv') = 1$$

donc d'après le théorème de bézout $ab \wedge n = 1$ ∎

III.2 Cas de n-uplet d'entiers avec $n \geqslant 2$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Définition/Propriétés III.2.1 (PGCD d'un nombre fini d'entiers)
* On appelle PGCD des entiers $(a_1, \ldots, a_n)$ l'entier naturel, noté $a1 \wedge \cdots \wedge a_n$, tel que

$$\mathcal{D}\left(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\right) = \mathcal{D}(a_1) \cap \ldots \cap \mathcal{D}(a_n)$$

Définition/Propriétés III.2.2 (Relation de Bézout)
Il existe un n-uplet d'entiers $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$

Définition/Propriétés III.2.3 (Entiers premiers entre eux)
Les entiers $a_1, \ldots, a_n$ sont dits :

- premiers entre eux dans leur ensemble si $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = 1$.
- premiers entre eux deux à deux si $\forall (i, j) \in [\![1\ ;\ n]\!], i \neq j \implies a_i \wedge a_j = 1$.

Démonstration (existence et unicité de la forme irréductible de tout rationnel non nul)
Montrons l'existence et unicité de la forme irréductible de tout rationnel non nul autrement dit $\forall r \in \mathbb{Q}^*, \exists!(a', b') \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*, r = \dfrac{a'}{b'}$

- $\boxed{\text{existence}}$ Soit $r \in \mathbb{Q}^*$ alors par définition $\exists(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*, r = \dfrac{a'}{b'}$

  on note $d = a \wedge b$ alors on note $\begin{cases} a = da' & \text{avec } a' \in \mathbb{Z}^* \\ b = db' & \text{avec } b' \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$

  ce qui donne $r = \dfrac{da'}{db'} = \dfrac{a'}{b'}$ avec $a' \wedge b' = \dfrac{d\,(a' \wedge b')}{d} = \dfrac{da' \wedge db'}{d} = \dfrac{a \wedge b}{d} = 1$

- $\boxed{\text{unicité}}$ Soit $r \in \mathbb{Q}^*$ tel que $r = \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a''}{b''}$ avec $\begin{cases} a' \wedge b' & = 1 \\ a'' \wedge b'' & = 1 \end{cases}$

  on en déduit que $a'b'' = a''b'$ ce qui donne $b'' \mid a''b'$ puis $b'' \mid b'$ car $a' \wedge b' = 1$

  de même $b' \mid b''$ donc

  b' et b'' sont associés et entier naturel et donc égaux ce qui donne $a' = a''$ et $b' = b''$ ce qui prouve l'unicité ■

IV Nombres premiers

IV.1 Généralités

Définition IV.1.1
Un nombre entier naturel non nul p est dit premier s'il admet uniquement deux diviseurs entiers naturels distincts (qui sont 1 et p)

Définition/Propriétés IV.1.2
Ensemble des nombres premiers L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

Démonstration
Par l'absurde, supposons que $\mathcal{P}$ est fini c'est-à-dire $\mathcal{P} = \left\{ \sqrt{}^{\infty} \cdots \sqrt{}^{\backslash} \right\}$

On pose $N = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i \right) + 1$

alors $\begin{cases} N \in \mathbb{N} \\ N \geqslant 2 \end{cases}$ donc N admet un diviseur premier i_0

$$\exists i_0 \in [\![1\ ;\ n]\!]\,, \begin{cases} p_{i_0} \mid N \\ p_{[}i_0] \mid \displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i \end{cases} \quad \text{donc } p_{i_0} \mid 1$$

d'où $p_{i_0} = 1$ ce qui est faux car p_{i_0} est premier

$\boxed{\text{conclusion}}$ $\mathcal{P}$ est infini ■

IV.2 Décomposition en produit de nombres premiers

Théorème IV.2.1
Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près des facteurs) sous la forme

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ avec $\forall i \in [\![1\ ;\ k]\!]\,, \alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et p_i est un nombre premier.

Définition/Propriétés IV.2.2 (Corrolaire)
Tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique (à l'ordre près des facteurs) sous la forme

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p}$$

où $(\alpha_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille presque nulle d'entiers naturels, c'est-à-dire une famille dans laquelle tous les éléments sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

IV.3 Valuation p-adique

Définition/Propriétés IV.3.1
Soit p un nombre premier et n un entier naturel non nul.

L'entier α_p qui apparaît dans la décomposition primaire de n

$$n = \prod_{p \in \surd} p^{\alpha_p}$$

est appelé valuation p-adique de n et noté $v_p(n)$.

<u>Autrement dit</u>

$v_p(n)$ est le plus grand entier naturel k tel que p^k divise n

Définition/Propriétés IV.3.2 (Valuation p-adique d'un produit)
Pour tout nombre premier p et tous entiers naturels non nuls n et n', on a :

$$v_p(nn') = v_p(n) + v_p(n')$$

Définition/Propriétés IV.3.3 (Caractérisation de la divisibilité)
Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

b divise a si, et seulement si, pour tout nombre premier p, on a : $v_p(b) \leqslant v_p(a)$

Démonstration
Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, procédons par double équivalence

- $\boxed{\implies}$ on suppose $b \mid a$

  alors $\exists q \in \mathbb{N}, a = bq$ donc $\forall p \in \mathcal{P}, v_p(a) = v_p(b) + v_p(q) \implies v_p(a) \geqslant v_p(b)$
- $\boxed{\impliedby}$ on suppose $\forall p \in \mathcal{P}, v_p(a) \geqslant v_p(b)$

  alors $p^{v_p(a)} = p^{v_p(a) - v_p(b)} \times p^{v_p(b)}$ donc $p^{v_p(b)} \mid p^{v_p(a)}$ ainsi

  $\prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(b)} \mid \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(a)}$ donc $b \mid a$ ■

Définition/Propriétés IV.3.4 (PGCD et PPCM)
Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Les PGCD et PPCM des entiers a et b vérifient :

$$a \wedge b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\left(v_p(a), v_p(b)\right)}$$

$$a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\left(v_p(a), v_p(b)\right)}$$

Démonstration
Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$

- Montrons que $a \wedge b = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\left(v_p(a), v_p(b)\right)}$

  on note $d = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\left(v_p(a), v_p(b)\right)}$

  $\forall p \in \mathcal{P}, v_p(d) = \min\left(v_p(a), v_p(b)\right)$

donc $\forall p \in \mathcal{P}, \begin{cases} v_p(d) & \leqslant v_p(a) \\ v_p(d) & \leqslant v_p(b) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} d & \mid a \\ d & \mid b \end{cases}$

on note alors $\begin{cases} a = da' & \text{avec } a' \in \mathbb{N}^* \\ b = db' & \text{avec } b' \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ Montrons alors que $a' \wedge b' = 1$ ce qui donnerais alors $a \wedge b = d\,(a' \wedge b') = d$

Soit k un diviseur commun à a' et b' différent de 1 alors $k \geqslant 2$ donc k admet un diviseur premier p'

donc $\begin{cases} p' \mid a' \\ p' \mid b' \end{cases}$ d'où $\begin{cases} v_{p'}(p') \leqslant v_{p'}(a) \\ v_{p'}(p') \leqslant v_{p'}(b) \end{cases}$ *i.e.* $\begin{cases} 1 \leqslant v_{p'}(a) & (1) \\ 1 \leqslant v_{p'}(b) & (2) \end{cases}$ Si $v_{p'}(a) \leqslant v_{p'}(b)$ alors $v_{p'}(d) = v_{p'}(a)$ et $v_{p'}(a) = v_{p'}(d) + v_{p'}(a')$ d'où $v_{p'}(a') = 0$ ce qui contredit (1)

Si $v_{p'}(b) < v_{p'}(a)$ alors $v_{p'}(d) = v_{p'}(b)$ donc $v_{p'}(b') = 0$

Donc $k = 1$ d'où $a' \wedge b' = 1$ d'où $a \wedge b = d$

- Montrons que $a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\left(v_p(a), v_p(b)\right)}$ on a :

$$\begin{aligned} a \vee b = \frac{ab}{a \wedge b} &= \frac{\left(\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(a)}\right)\left(\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(b)}\right)}{\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\min\left(v_p(a), v_p(b)\right)}} \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\left(v_p(a), v_p(b)\right)} * \end{aligned}$$

IV.4 Congruences

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition IV.4.1
x est dit congru à y modulo n s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + nk$ autrement dit si $x - y \in n\mathbb{Z}$.

Notation : $x \equiv y\ [n]$

IV.5 Caractérisation

Définition/Propriétés IV.5.1
$x \equiv y\ [n]$ si, et seulement si, les restes des divisions euclidiennes de x et y par n sont égaux.

Démonstration
Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ Montrons la caractérisation par double inclusion

- $\boxed{\implies}$ On suppose $x \equiv y\ [n]$ on écrit la division euclidienne de y par n

  $\exists (q, r) \in \mathbb{Z} \times [\![0\ ;\ n-1]\!]\, , y = nq + r$

  par hypothèse on a : $\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + nk$

  donc $x = n(k + q) + r$ est la division euclidienne de x par n donc r est le reste de la division euclidienne de x et y par n

- $\boxed{\impliedby}$ On suppose que x et y ont le même reste dans la division euclidienne de x et y par n

  Ainsi $\exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2, \exists r \in [\![0\ ;\ n-1]\!] \begin{cases} x & = nk + r \\ y = nk' + r \end{cases}$

  donc $x - y = n(k - k')$ *i.e.* $x - y \in n\mathbb{Z}$ *i.e.* $x \equiv y\ [n]$ ∎

IV.6 Propriétés

Définition/Propriétés IV.6.1

(1) $x \equiv x\ [n]$ (réflexivité)

(2) si $x \equiv y\ [n]$ alors $y \equiv x\ [n]$ (symétrie)

(3) si $x \equiv y\ [n]$ et $y \equiv z\ [n]$ alors $x \equiv z\ [n]$ (transitivité)

IV.7 Opération

Définition/Propriétés IV.7.1

(1) Si $x \equiv y\ [n]$ et $z \equiv t\ [n]$ alors $x + z \equiv y + t\ [n]$ (compatibilité avec l'addition)

(2) Si $x \equiv y\ [n]$ et $z \equiv t\ [n]$ alors $xz \equiv yt\ [n]$. (compatibilité avec la multiplication)

IV.8 Inverse modulo n

Définition/Propriétés IV.8.1

- Si x et n sont premiers entre eux, il existe un couple d'entiers (u, v) tel que $ux + vn = 1$.

  On en déduit que
  $$ux \equiv 1\ [n]$$
  et on dit que u est un inverse de x modulo n.
- Si u est un inverse de x modulo n alors il existe un couple d'entiers (u, v) tel que $ux + vn = 1$. On en déduit que x et n sont premiers entre eux.

IV.9 Petit Théorème de Fermat

Théorème IV.9.1
Si p est un nombre premier alors :

(1) $\forall a \in \mathbb{Z}, a^p \equiv a\ [p]$.

(2) $\forall a \in \mathbb{Z}, a \wedge p = 1 \implies a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

Chapitre 16

Dérivation

Sommaire

Dans ce chapitre, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point.

I Dérivation des fonctions à valeurs réelles

I.1 Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I.

Définition I.1.1 (Définition avec le taux d'accroissement)

f est dite dérivable en a si la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite réelle ℓ en a.

Dans ce cas,

la limite ℓ obtenue est appelée dérivée de f en a et notée$f'(a)$.

Définition/Propriétés I.1.2 (Caractérisation de la dérivabilité en un point par D.L d'ordre 1)
f est dérivable en a si, et seulement si, il existe $(b_0, b_1) \in \mathbb{R}^2$ et une application $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, f(x) = b_0 + b_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Dans ce cas, $b_0 = f(a)$ et $b_1 = f'(a)$ et on dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.

Démonstration

- $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose f dérivable en a alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} f'(a)$

  On pose $\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$

  alors $\varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$ et $\forall x \in I \setminus \{a\}, (x-a)\varepsilon(x) = f(x) - f(a) - f'(x)(x-a)$ donc $f(x) = f(a) + f'(x)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$
- $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose qu'il existe $(b_0, b_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :
  - si $x \neq a$ alors $f(x) = b_0 + b_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0$
  - si $x = a$: $f(a) = b_0$

  donc pour $x \neq a$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = b_1 + \varepsilon(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} b_1$ ainsi f dérivable en a avec $f'(a) = b_1$ ■

Définition/Propriétés I.1.3 (Condition nécessaire de dérivabilité en un point)
Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Remarque

La réciproque est FAUSSE comme le prouve l'exemple classique de la fonction valeur absolue en 0.

Démonstration
Si f dérivable alors $\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ donc $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} f(a)$ d'où f continue en a ■

Définition/Propriétés I.1.4 (Interprétations géométrique et cinématique)

- Si f admet une dérivée au point a alors la courbe représentative de f admet une tangente en $M(a, f(a))$ dont la pente est égale à $f'(a)$.
- Si $f(t)$ est l'abscisse à l'instant $t \geqslant 0$ d'un mobile se déplaçant sur une droite et si f admet une dérivée au point $a \geqslant 0$ alors $f'(a)$ est la vitesse instantanée de ce mobile à l'instant a.

I.2 Dérivabilité à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et a un point de I.

Définition I.2.1

- On suppose ici que a n'est pas l'extrémité gauche de I.

  f est dite dérivable à gauche en a si $x \longmapsto \dfrac{1}{x-a}(f(x)-f(a))$ admet une limite à gauche en a.

  La limite obtenue (unique si elle existe) est appelée dérivée à gauche de f en a et notée $f'_g(a)$.
- On suppose ici que a n'est pas l'extrémité droite de I.

  f est dite dérivable à droite en a si $x \longmapsto \dfrac{1}{x-a}(f(x)-f(a))$ admet une limite à droite en a.

  La limite obtenue (unique si elle existe) est appelée dérivée à droite de f en a et notée $f'_d(a)$.

Propriétés I.2.2
On suppose ici que a n'est pas extrémité de I.

f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Dans ce cas, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

I.3 Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur

Définition/Propriétés I.3.1
Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans R.

Si f admet un extremum local en un point a de I qui n'est pas une extrémité de I, et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$ Remarques

- Les points a de I en lesquels f est dérivable avec $f'(a) = 0$ sont dits points critiques de f.
- La détermination des points critiques indique où des extremums sont susceptibles d'exister. Une étude complémentaire du signe de $f(x) - f(a)$ au voisinage du point critique a est nécessaire pour conclure s'il y extremum local ou non en ce point a.
- Il peut y avoir des extremums locaux pour f en un point extrémité a de l'intervalle I en lequel f est dérivable sans que $f'(a)$ ne soit égal à 0.

Démonstration
On suppose, sans perte de généralité, que f admet un maximum local en a, point de I qui n'est pas extrémité de I, et que f est dérivable en a. Le cas du minimum local s'en déduit en remplaçant f par $-f$.

Alors, par définition d'un maximum local, il existe un réel δ strictement positif tel que

$$\forall x \in]a-\delta\ ;\ a+\delta[\ ,\ f(x) \leqslant f(a)$$

Ainsi,

$$\forall x \in]a-\delta\ ;\ a[\ ,\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$$

et

$$\forall x \in]a\ ;\ a+\delta[\ ,\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$$

Comme f est dérivable en a et que a n'est pas extrémité de I, f est dérivable à droite et à gauche en a avec

$$f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$$

Par passage à la limite dans les inégalités précédentes, on a d'abord $f'_g(a) \geqslant 0$ et $f'_d(a) \geqslant 0$ puis

$$0 \leqslant f'(a) \leqslant 0$$

ce qui donne par antisymétrie que $f'(a) = 0$.

Bilan : Si f a un extremum local en un point a de $\mathring{I}$ et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque : $\mathring{I}$ désigne l'intérieur de I ,c'est-à-dire ici, l'ensemble des points de I qui sont centres d'un intervalle ouvert inclus dans I. ■

I.4 Dérivée sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition I.4.1
f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point a de I.

Dans ce cas,

la fonction qui, à tout a de I fait correspondre $f'(a)$ est appelée application dérivée de f et notée f'.

Notation Dans la suite, on note $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur I, à valeurs réelles.

Définition/Propriétés I.4.2 (Opérations sur les fonctions dérivables)
Les opérations sur les limites vues dans le chapitre “Limite et continuité” permettent de montrer que $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire, produit et quotient (sous réserve que cela ait du sens).

Plus précisément :

- une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I à valeurs réelles est dérivable sur I :
$$\forall (f,g) \in (\mathcal{D}(I,\mathbb{R}))^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \text{ et } (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$
- un produit de fonctions dérivables sur I à valeurs réelles est dérivable sur I :
$$\forall (f,g) \in (\mathcal{D}(I,\mathbb{R}))^2, fg \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \text{ et } (fg)' = f'g + fg'$$
- un quotient de fonctions dérivables sur I à valeurs réelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur I est dérivable sur I :
$$\forall (f,g) \in (\mathcal{D}(I,\mathbb{R}))^2, \forall x \in I, g(x) \neq 0 \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Démonstration (Preuve dérivée $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$)
Soit $(f,g) \in (\mathcal{D}(I,\mathbb{R}))^2$ avec $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ Soit $a \in I$,

Pour $x \in I \backslash \{a\}$
$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} &= \frac{\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(a)g(x)}}{x-a} \\
&= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \times \frac{1}{g(a)g(x)} \\
&= \frac{1}{g(a)g(x)} \times \left(\frac{(f(x)-f(a))\,g(a)}{x-a} - \frac{f(a)\,(g(x)-g(a))}{x-a} \right) \\
&= \frac{1}{g(a)g(x)} \times \left(\frac{(f(x)-f(a))}{x-a} g(a) - f(a) \frac{(g(x)-g(a))}{x-a} \right)
\end{aligned}$$
Par passge à la limite vers a et par définition de la dérivée on retrouve donc
$$\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \frac{1}{g^2(a)} \times (f'(a)g(a) - f(a)g'(a)) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$
■

Définition/Propriétés I.4.3 (Composition de fonctions dérivables)
Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles tel que, pour tout x de I,$f(x)$ appartient à J.

Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I avec
$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Démonstration
Soit $a \in I$. On note Δ la fonction définie sur I par :

$$\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{g(t) - g(f(a))}{t - f(a)} & \text{si } t \neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si } t = f(a) \end{cases}$$

Par dérivabilité de g en $f(a)$, on a $\lim\limits_{t \longrightarrow f(a)} \Delta(t) = g'(f(a))$ c'est-à-dire $\lim\limits_{t \longrightarrow f(a)} \Delta(t) = \delta(f(a))$ donc Δ est continue en $f(a)$. Comme f est continue en a puisqu'elle y est dérivable, on en déduit alors par composition que $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \Delta(f(x)) = \Delta(f(a))$ ce qui donne :

$$\lim_{x \longrightarrow a} \Delta(f(x)) = g'(f(a))$$

ce qui donne :

$$\lim_{x \longrightarrow a} \Delta(f(x)) = g'(f(a))$$

Par dérivabilité de f en a, on a :

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Comme pour tout $x \in I \backslash \{a\}$,on peut écrire

$$\frac{g(f(a)) - g(f(a))}{x - a} = \Delta(f(x)) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

. On conclut par produit que la fonction $x \longmapsto \dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a}$ admet une limite finie en a qui vaut $g'(f(a)) \times f'(a)$ autrement dit que $g \circ f$ est dérivable en a de dérivée $g'(f(a)) \times f'(a)$.

<u>Conclusion</u> : $g \circ f$ est dérivable sur I de dérivée $(g' \circ f) \times f'$. ■

Définition/Propriétés I.4.4 (Réciproque d'une fonction dérivable)
Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles.

Si f est une bijection de I sur $J = f(I)$, dérivable sur I et que sa dérivée ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et vérifie

$$\forall y \in J, \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{1}(y)\right)}$$

Démonstration
On suppose les hypothèses réunies. Alors f est continue sur I (car elle y est dérivable), à valeurs réelles et injective (car elle est bijective de I sur J). D'après une propriété du chapitre “Limite et continuité”,f est donc strictement monotone sur I.

Par théorème de la bijection continue, on en déduit en particulier que f^{-1} est continue sur J.

Soit $b \in J$.

Pour tout $y \in J \setminus \{b\}$, on peut écrire :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}\right)^{-1}$$

car $y \neq b$ et f^{-1} injective donnent $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$

Par continuité de f^{-1} en b, on a $f^{-1}(y) \underset{y \longrightarrow b}{\longrightarrow} f^{-1}(b)$ et, par dérivabilité de f en $a = f^{-1}(b)$, on a : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} f'(a) = f'(f^{-1}(b))$. Une composition de limites donne donc :

$$\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} \underset{y \longrightarrow b}{\longrightarrow} f'(f^{-1}(b))$$

Comme $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$ par hypothèse sur f', par limite d'une fonction inverse, on obtient :

$$\left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}\right)^{-1} \underset{y \longrightarrow b}{\longrightarrow} \left(f'(f^{-1}(b))\right)^{-1}$$

Ainsi,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \underset{y \longrightarrow b}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \ (\in \mathbb{R})$$

Conclusion : f^{-1} est dérivable en tout b de J, donc sur J ,avec

$$\forall b \in J, \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f' f^{-1}(b)}$$

■

II Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

II.1 Théorème de Rolle

Théorème II.1.1 (Théorème de Rolle)
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction définie sur $[a\,;\,b]$ à valeurs réelles.

Si f est continue sur le segment $[a\,;\,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;\,b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel c dans l'intervalle ouvert $]a\,;\,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration
On suppose les hypothèse réunies

f étant continue sur le segment $[a\ ;\ b]$ et à valeurs réelles, par théorème, f est bornée et atteint ses bornes.

On note $m = \min f$ et $M = \max f$, et $(x_1, x_2) \in [a\ ;\ b]^2$ tel que $m = f(x_1)$ et $M = f(x_2)$.

On raisonne par disjonction de cas.

- Si $m = M$ alors f est une fonction constante donc sa dérivée est la fonction nulle ; le résultat attendu est alors immédiat.
- Si $m < M$ alors l'un des réels m ou M est différent de $f(a)$. Dans la suite, on suppose, sans perte de généralité, que $m \neq f(a)$.

Alors $f(x_1) \neq f(a)$ et $f(x_1) \neq f(b)$ (puisque $f(a) = f(b)$) donc $x_1 \neq a$ et $x_1 \neq b$.

On en déduit que x_1 appartient à l'intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$. Comme de plus f est dérivable en x_1 et y admet un minimum global (donc un extremum local), on conclut par condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur que $f'(x_1) = 0$.

Conclusion : Il existe un réel c dans l'intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$ tel que $f'(c) = 0$. ■

Définition/Propriétés II.1.2 (Interprétations géométrique et cinématique)
Si les hypothèses du théorème de Rolle sont réunies alors :

- il existe un point en lequel la courbe représentative de f admet une tangente horizontale ;
- il existe un instant c en lequel la vitesse instantanée d'un mobile dont l'abscisse à l'instant $t \geqslant 0$ sur une droite est donnée par $f(t)$, est nulle.

II.2 Accroissements finis

Définition/Propriétés II.2.1 (Egalité des accroissements finis)
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction définie sur $[a\ ;\ b]$ à valeurs réelles.

Si f est continue sur $[a\ ;\ b]$, dérivable sur $]a\ ;\ b[$ alors il existe c dans $]a\ ;\ b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Démonstration
On suppose les hypothèses réunies et on définit

$$g : x \longmapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

g est définie et continue sur le segment $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$, à valeurs réelles avec $g(a)=g(b)$.

Par théorème de Rolle, il existe donc un réel c dans $]a\,;b[$ tel que $g'(c)=0$ avec $g' : x \longmapsto f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ce qui donne :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

et donc

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$$

■

Définition/Propriétés II.2.2 (Inégalité des accroissements finis)
Soit f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est majorée par un réel k alors f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire que :

$$\forall (x,y)\in I^2, |f(x)-f(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

Démonstration
On suppose les hypothèses réunies et $(x,y)\in I^2$. Le cas $x=y$ étant immédiat, on suppose sans perte de généralité que $x<y$.

Alors f est continue sur $[x\,;y]$, dérivable sur $]x\,;y[$ donc, par égalité des accroissements finis, il existe un réel c dans $]x\,;y[$ tel que :

$$f(y)-f(x) = f'(c)(y-x)$$

. Ainsi $|f(y)-f(x)| = |f'(c)|\,|y-x|$ puis, par hypothèse sur $|f'||$, on en déduit :

$$|f(y)-f(x)| \leqslant k\,|y-x|$$

. Ceci étant vrai pour tout $(x,y)\in I^2$, f est donc k-lispchitzienne ■

II.3 Applications des théorèmes des accroissements finis

Soit f une fonction définie et dérivable sur I à valeurs réelles.

Définition/Propriétés II.3.1 (Caractérisation des applications constantes)
f est constante si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$

Démonstration

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Si f est constante alors sa dérivée est nulle.
- $\boxed{\Longleftarrow}$ Si la dérivée de f est nulle alors l'inégalité des accroissements finis donne, pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant 0 \times |x - y|$ donc $|f(x) - f(y)| = 0$ puis $f(x) = f(y)$ ce qui implique que f est constante. ■

Définition/Propriétés II.3.2 (Caractérisation des fonctions dérivables monotones)

(1) f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.

(2) f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.

Démonstration (Caractérisation des fonctions croissantes)

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Si f est croissante sur I alors, pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.

  Comme f est dérivable en x, f est dérivable à droite en x donc, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve $\displaystyle\lim_{y \longrightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$ c'est-à-dire $f'_d(x) \geqslant 0$ et enfin $f'(x) \geqslant 0$.
- $\boxed{\Longleftarrow}$ on suppose que f' est positive. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Par égalité des accroissements finis, il existe $c \in\,]x\,;y[$ tel que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$ donc, par hypothèse de positivité, on trouve $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$ ce qui prouve que f croissante ■

Définition/Propriétés II.3.3 (Caractérisation des fonctions dérivables strictement monotones)

(1) f est strictement croissante sur I si, et seulement si, les conditions suivantes sont réunies :
   (a) pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
   (b) il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tel que, pour tout x de $[a\,;b]$, $f'(x) = 0$.

(2) f est strictement décroissante sur I si, et seulement si, les conditions suivantes sont réunies :
   (a) pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
   (b) il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tel que, pour tout x de $[a\,;b]$, $f'(x) = 0$.

Démonstration (Caractérisation des fonctions strictement croissantes)

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Si f est strictement croissante sur I alors f est croissante sur I donc f' est positive. Par ailleurs, si on suppose l'existence de réels a et b dans I avec $a < b$ tels que $f'_{|[a;b]} = 0$ alors $f'_{|[a;b]}$ est constante ce qui contredit la stricte croissance de f sur I. Ainsi, il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tel que, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f'(x) = 0$.
- $\boxed{\Longleftarrow}$ on suppose que, pour tout x de I, f$'(x) \geqslant 0$ et que de plus, il n'existe pas de segment inclus dans I sur lequel la restriction de f' est nulle. Alors f est croissante sur I ainsi il n'existe pas de segment inclus dans I tel que $f_{|[a;b]}$ est une fonction constante. Si f n'est pas strictement croissante, il existe un couple $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$ et $f(a) \geqslant f(b)$. Par croissance de f sur I, on en déduit :$\forall x \in [a\,;\,b]\,, f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ donc $\forall x \in [a\,;\,b]\,, f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(a)$ puis $\forall x \in [a\,;\,b]\,, f(x) = f(a)$. Ainsi $f_{|[a;b]}$ est constante ce qui contredit ce qui précède. On conclut donc que : f est strictement croissante sur I . ∎

Théorème II.3.4 (Théorème de la limite de la dérivée)
Soit a un point de I.

Si f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$ et si $f'_{|I\setminus\{a\}}$ admet une limite réelle ℓ en a alors

$$\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Dans ce cas :

(1) f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$;

(2) f' est continue en a.

Remarque

La fonction f peut être dérivable en a sans que $f_{|I\setminus\{a\}}$ ait une limite réelle en a (par exemple, pour la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$).

Démonstration
On suppose les hypothèses réunies et on considère un réel strictement positif ε.

Puisque $f'_{|I\setminus\{a\}}$ a pour limite le réel ℓ, il existe un réel strictement positif δ tel que :

$$\forall x \in I\setminus\{a\}\,, |x - a| \leqslant \delta \implies |f'(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Prenons alors $x \in I\setminus\{a\}$ tel que $|x - a| \leqslant \delta$.

f étant continue sur I et dérivable sur $I\setminus\{a\}$, f est continue sur le segment $[a\,;\,x]$ ou $[x\,;\,a]$ (suivant que $a < x$ ou $a > x$), dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;\,x[$ ou $]x\,;\,a[$.

D'après l'égalité des accroissements finis, il existe donc un réel c_x dans $]a\,;\,x[$ ou $]x\,;\,a[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

Comme c_x appartient à l'intervalle ouvert d'extrémités a et x, on a :

$$c_x \in I \backslash \{a\} \text{ et } |c_x - a| \leqslant |x - a| \leqslant \delta$$

D'après ce qui a été dit précédement, on en déduit $|f'(c_x) - \ell| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I \backslash \{a\}, |x - a| \leqslant \delta \implies \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit : $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a pour limite le réel ℓ en a donc f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$.

De plus, $f'(a) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f'(x)$ donc f' est continue en a. ■

Définition/Propriétés II.3.5 (Extension du théorème de la limite de la dérivée)
Soit a un point de I.

Si f est continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et si $f'_{|I \backslash \{a\}}$ admet une limite infinie ℓ en a alors

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

III Classe C^k

Soit f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

III.1 Notations

Notation III.1.1
On pose $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, sous réserve que cela ait du sens, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.

III.2 Définitions

Définition III.2.1
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- f est dite k fois dérivable sur I si $f^{(k)}$ existe.
- f est dite de classe C^k sur I si f est k fois dérivable sur I avec $f^{(k)}$ continue sur I.
- f est dite de classe C^∞ sur I si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe C^k sur I.

Remarque

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

L'ensemble des applications de classe C^k sur I à valeurs dans R est souvent noté $C^k(I, \mathbb{R})$.

III.3 Opérations sur les fonctions de classe C^k avec $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Définition/Propriétés III.3.1
$C^k(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire, produit et quotient (sous réserve que cela ait du sens). Plus précisément :

- une combinaison linéaire de fonctions de classe C^k sur I à valeurs réelles est de classe C^k sur I :

$$\forall (f,g) \in \left(C^k(I,\mathbb{R})\right)^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g \in C^k(I,\mathbb{R}) \text{ et } (\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$$

- un produit de fonctions de classe Ck sur I à valeurs réelles est de classe Ck sur I :

$$\forall (f,g) \in \left(C^k(I,\mathbb{R})\right)^2, fg \in C^k(I,\mathbb{R}) \text{ et } \underbrace{(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} f^{(i)} g^{(k-i)} = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} f^{(k-i)} g^{(i)}}_{\text{formule de Leibniz}}$$

- un quotient de fonctions de classe C^k sur I à valeurs réelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur I est de classe C^k sur I.

III.4 Composition de fonctions de classe C^k avec $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Définition/Propriétés III.4.1
Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles tel que, pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J.

Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.

Si f est de classe C^k sur I et si g est de classe C^k sur J alors $g \circ f$ est de classe C^k sur I.

III.5 Réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Définition/Propriétés III.5.1
Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles.

Si f est une bijection de I sur $J = f(I)$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et que sa dérivée ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.

IV Cas des fonctions à valeurs complexes

IV.1 Ce qui s'étend aux fonctions complexes

Définition/Propriétés IV.1.1

- Dérivée en un point et sur un intervalle : définition et caractérisations, lien avec la continuité, dérivées à gauche et à droite, opérations
- Classe $\mathcal{C}^k$: définition, opérations
- Inégalité des accroissements finis

IV.2 Ce qui ne s'étend pas aux fonctions complexes

Définition/Propriétés IV.2.1

- — Résultats utilisant la relation d'ordre :
  - — la notion d'extremum local (et donc la condition nécessaire d'existence d'un extremum local)
  - — le théorème de Rolle
  - — l'égalité des accroissements finis
  - — les caractérisations des fonctions constantes ou monotones parmi les fonctions dérivables.
- Composition de fonctions dérivables
- Réciproque d'une fonction dérivable

IV.3 Quelques résultats qui s'étendent détaillés

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs complexes.

Définition IV.3.1

- f est dite dérivable en $a \in I$ si la fonction à valeurs complexes $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite complexe ℓ en a appelée nombre dérivé de f en a et notée $\ell = f'(a)$.
- f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Définition/Propriétés IV.3.2 (Caractérisation)

- f est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}\left((f)\right)$ et $\mathrm{Im}\left((f)\right)$ le sont.

  Dans ce cas,
  $$(\mathrm{Re}\,(f))'\,(a) = (\mathrm{Re}\,(f'(a))) \text{ et } (\mathrm{Im}\,(f))'\,(a) = (\mathrm{Im}\,(f'(a)))$$

— f est dérivable (respectivement de classe C^k) sur I si, et seulement si, $\mathrm{Re}\left((f)\right)$ et $\mathrm{Im}\left((f)\right)$ le sont.

Définition/Propriétés IV.3.3 (Inégalité des accroissements finis)
Si f est de classe C^1 sur I et si $|f'|$ est majorée par un réel k alors f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

Démonstration
Rappel On rappelle que le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis ne se généralisent pas au cas des fonctions à valeurs complexes (non réelles).

Par exemple, la fonction $g : t \longmapsto e^{2i\pi t}$ est continue sur le segment $[0\,;1]$, dérivable sur $]0\,;1[$ avec $g(0) = g(1)$ mais sa dérivée $g' : t \longmapsto 2i\pi e^{2i\pi t}$ ne s'annule pas sur $]0\,;1[$.

La preuve de l'inégalité des accroissements finis dans le cas des fonctions à valeurs complexes ne peut donc se faire comme dans le cas réel. On peut tout de même démontrer cette inégalité, pour les fonctions à valeurs complexes de classe C1 sur un intervalle, en admettant des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment que l'on verra dans le chapitre "Intégration sur un segment".

On suppose que f est de classe C^1 sur I et que $|f'|$ est majorée par un réel k.

Soit $(x,y) \in I^2$ avec $x \leqslant y$.

Comme f' est continue sur le segment $[x\ ;\ y]$ et f une primitive de f' sur I, on peut écrire

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_x^y f'(t)dt\right|$$

puis, par propriété du module de l'intégrale,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \int_x^y |f'(t)|\, dt$$

Par hypothèse sur $|f'|$ et croissance de l'intégrale, on a alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \int_x^y k dt i.e. |f(x) - f(y)| \leqslant k(y - x)$$

Ainsi :

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leqslant y \implies |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|y - x|$$

puis

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|y - x|$$

Autrement dit, f est lipschitzienne de rapport k. ■

Chapitre 17

Structure algébriques usuelles

Sommaire

I généralité

Soit E un ensemble.

I.1 Loi de composition interne

Définition/Propriétés I.1.1
On appelle loi de composition interne sur E toute application f de $E \times E$ dans E.

A tout couple (x, y) de $E \times E$, est ainsi associée une unique image $f(x, y) \in E$ souvent notée

$x \star y$ ou $x \top y$ et appelée composé de x et y pour la loi de composition interne $\star$ ou $\top$.

Remarque

Un ensemble muni d'une loi de composition interne est dit magma.

I.2 Définitions - Propriétés

Définition/Propriétés I.2.1 (Associativité, commutativité)
Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite :

(1) associative si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$
(2) commutative si $\forall (x, y) \in E^2, x \star y = y \star x$.

Définition/Propriétés I.2.2 (Elément neutre)
On dit qu'une loi de composition interne $\star$ sur E admet un élément neutre s'il existe e dans E tel que

$$\forall x \in E, x \star e = e \star x = x$$

Remarques

(1) Si $\star$ admet un élément neutre sur E alors celui-ci est UNIQUE.

(2) Un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et qui admet un élément neutre est dit monoïde.

Démonstration (Unicité de l'élement neutre)
Supposons qu'il existe deux élément neutre e et e' dans E pour la l.c.i $\star$

Alors $\forall x \in E \begin{cases} x \star e & = x \\ x \star e' & = x \end{cases}$

en particulier en prenant $x = e'$ dans le premier cas et $x = e$ dans le deuxième cas, on obtient :

$$e = e \star e' = e' \star e = e'$$

donc on a bien $e = e'$, Ainsi $\star$ admet un unique élément neutre dans E. ∎

Définition/Propriétés I.2.3 (Inversibilité)
Soit $\star$ une loi de composition interne sur E qui admet un élément neutre e.

Un élément x de E est dit inversible s'il existe x' dans E tel que

$$x \star x' = x' \star x = e$$

Remarques

- Si de plus la loi est associative alors :
  - l'élément x' est UNIQUE et dit inverse de x ;
  - si x et y sont des éléments de E inversibles alors l'élément $x \star y$ est inversible d'inverse $y' \star x'$.
- Les termes "symétrisable" et "symétrique" sont parfois utilisés à la place de "inversible" et inverse".

Démonstration (Unicité de l'élément inversible si $\star$ est associative)

Soit $(x, x', x'') \in E^3$ tel que $\begin{cases} x \star x' = x' \star x & = e \quad (1) \\ x' \star x'' = x'' \star x' & = e \quad (2) \end{cases}$

alors $x'' \star (x \star x') = x'' \star e$ donc par associativité $(x'' \star x) \star x' = x''$ donc d'après (2) on a $e \star x' = x''$ et donc $x' = x''$

Conclusion Si la l.c.i est associative sur E et admet un neutre alors tout élement inversible admet un unique inverse ■

Définition/Propriétés I.2.4 (Distributivité)
Soit $\star$ et $\top$ deux lois de composition interne sur$E$.

On dit que la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $\star$ si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x \top (y \star z) & = (x \top y) \star (x \top z) \\ (y \star z) \top x & = (y \top x) \star (z \top x) \end{cases}$$

Définition/Propriétés I.2.5 (Quelques exemples usuels de lois de composition interne)

- Loi +
  - sur les ensembles de nombres $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
  - sur les ensembles de fonctions : $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $C^n(I, \mathbb{K})$;
  - sur les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- Loi $\times$

— sur les ensembles de nombres $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}, \mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$;
— sur les ensembles de fonctions : $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $C^n(I, \mathbb{K})$;
— sur les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

- Autres lois
  — sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E :$\cup, \cap$ et $\setminus$;
  — sur l'ensemble des applications de E dans E avec E un ensemble : $\circ$.

I.3 Partie stable

Définition/Propriétés I.3.1
Soit $\star$ une loi de composition interne sur E.

On dit qu'une partie A de E est stable pour la loi $\star$ si $\forall (x, y) \in A^2, x \star y \in A$.

II Groupes, sous-groupes

II.1 Groupes

Définition II.1.1
Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $\star$ telle que :

- $\star$ est associative.
- G admet un élément neutre e_G pour la loi $\star$.
- Tout élément x de G admet un inverse x' pour la loi $\star$.

Remarques

(1) Il y a unicité de l'élément neutre de G et de l'inverse de tout élément de G.
(2) Dans tout groupe, il y a au moins un élément : le neutre pour la loi du groupe.
(3) Si $\star$ est commutative, on dit que G est un groupe commutatif (ou groupe abélien).

Notation II.1.2 (Notations dans un groupe additif et un groupe multiplicatif)

- Lorsque la loi du groupe G est notée $+$ alors on parle de groupe additif et on écrit :
  (1) 0_G au lieu de e_G ;
  (2) $-x$ au lieu dex' ;

(3) $nx = \begin{cases} x+\cdots+x \quad (n \text{ fois }) & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 0_G & \text{si } n = 0 \\ -(-nx) & \text{si } n \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$

- Lorsque la loi du groupe G est notée $\times$ alors on parle de groupe multiplicatif et on écrit :
  (1) 1_G au lieu de e_G ;
  (2) x^{-1} au lieu dex' ;
  (3) $x^n = \begin{cases} x\times\cdots\times x \quad (n \text{ fois }) & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 1_G & \text{si } n = 0 \\ (x^{-n})^{-1} & \text{si } n \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$

Définition/Propriétés II.1.3 (Quelques exemples usuels de groupes déjà rencontrés cette anné

- Groupes additifs
  — dans les ensembles de nombres : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
  — dans les ensembles de fonctions : $\mathcal{F}(X,\mathbb{K}), \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$;
  — dans les ensembles de matrices : $mathcal M_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- Groupes multiplicatifs
  — dans les ensembles de nombres : $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}, \mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$;
  — dans les ensembles de matrices : $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Définition/Propriétés II.1.4 (Groupe des permutations d'un ensemble)
Soit X un ensemble.

L'ensemble des applications de X dans X qui sont des bijections est un groupe pour la loi de composition interne $\circ$, appelé groupe des permutations de l'ensemble X et noté S_X.

Définition/Propriétés II.1.5 (Produit fini de groupes)
Soit $(G_1,\perp)$ et $(G_2,\top)$ deux groupes.

Le produit cartésien $G_1\times G_2$ muni de la loi $\star$ définie par :

$$\forall(x_1,x_2)\in G_1\times G_2, \forall(y_1,y_2)\in G_1\times G_2, (x_1,x_2)\star(y_1,y_2) = (x_1\perp y_1, x_2\top y_2)$$

est un groupe, dit groupe-produit.

Dans ce groupe-produit,

- l'élément neutre est (e_{G_1}, e_{G_2}) où e_{G_1} est le neutre de G_1 et e_{G_2} est le neutre de G_2 ;
- l'inverse de (x_1,x_2) de $G_1\times G_2$ est (x_1',x_2') où x_1' est l'inverse de x_1 et x_2' l'inverse de x_2.

Remarques

- on en déduit, par exemple, que :
  — $\mathbb{K}^2$ est un groupe additif de neutre $(0,0)$ dans lequel $(-x,-y)$ est l'inverse de (x,y) ;
  — $(\mathbb{K}^*)^2$ est un groupe multiplicatif de neutre $(1,1)$ dans lequel (x^{-1},y^{-1}) est l'inverse de (x,y).
- La propriété s'étend à un nombre fini $m \quad (\geqslant 2)$ de groupes $(G_1, \underset{1}{\perp}), (G_2, \underset{2}{\perp}), \ldots, (G_m, \underset{m}{\perp})$.
- Ainsi, par exemple, $\mathbb{K}_m$ est un groupe additif et $(\mathbb{K}^*)^m$ est un groupe multiplicatif.

II.2 Sous-groupes

Définition II.2.1
Soit $(G, \star)$ un groupe.

Une partie H de G est dite sous-groupe de G si les deux conditions suivantes sont réunies :
- H est une partie stable pour la loi $\star$;
- H est un groupe pour la loi de composition interne obtenue par restriction à H de la loi de composition interne $\star$ de G.

Définition/Propriétés II.2.2 (Caractérisation)
Une partie H d'un groupe $(G, \star)$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, les conditions suivantes sont réunies :
(1) $H \neq \emptyset$ $\qquad (e_G \in H)$
(2) $\forall (x,y) \in H^2, x \star y \in H$ $\qquad$ (stabilité par composition)
(3) $\forall x \in H, x' \in H$ avec x' l'inverse de x dans $(G, \star)$ $\qquad$ (stabilité par passage à l'inverse)

Caractérisation alternative
Une partie H d'un groupe $(G, \star)$ est un sous-groupe de G si, et seulement si :

$$H \neq \emptyset \text{ et } \forall (x,y) \in H^2, x \star y' \in H$$

III Morphisme de groupes

III.1 Morphisme

Définition III.1.1
Une application $f : G \longrightarrow G'$ est dite morphisme de groupes si G et G' sont des groupes de lois respectives $\star$ et $\perp$ avec

$$\forall (x,y) \in G \times G, f(x \star y) = f(x) \perp f(y)$$

Propriétés III.1.2
Si $f : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes alors :

- l'image de l'élément neutre de G par f est l'élément neutre de G', c'est-à-dire :
$$f(e_G) = e_{G'}$$
- pour tout $x \in G$, l'inverse de l'image de x par f est l'image de l'inverse de x par f, c'est-à-dire :
$$(f(x))' = f(x')$$

Démonstration
Soit $f : G \longrightarrow G'$

- Montrons que $f(e_G) = e_{G'}$
On a $f(e_G) = f(e_G \star e_G) = f(e_G) \perp f(e_G)$
ainsi par composition par l'inverse de $f(e_G)$, on trouve $(f(e_G))' \perp f(e_G) = \big((f(e_G))' \perp f(e_G)\big) \perp f(e_G)$
donc $e_{G'} = e_{G'} \perp f(e_G) = f(e_G)$ par associativité de $\perp$ puis par définition de $e_{G'}$.
- Montrons que l'inverse d'une image st l'image de l'inverse
Soit $x \in G$ alors :
$$f(x) \perp f(x') = f(x \star x') = f(e_G) = e_{G'}$$
$$f(x') \perp f(x) = f(x' \star x) = f(e_G) = e_{G'}$$
donc $(f(x))' = f(x')$ ■

Définition/Propriétés III.1.3 (Image directe et réciproque)
Si $f : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes alors,

(1) l'image directe de tout sous-groupe H de G, est un sous-groupe de G'.

(2) l'image réciproque de tout sous-groupe H' de G' est un sous-groupe de G.

Démonstration

- Montrons que si H est un sous groupe de G alors $f(H)$ sous groupe G'
  - $f(H) \subset G'$ par définition de f
  - $f(H) \neq \emptyset$ car $e_{G'} \in f(H)$ puisque $e_{G'} = f(e_G)$ avec $e_G \in H$
  - Soit $(x, y) \in (f(H))^2$,Montrons que $x \perp y' \in f(H)$ Par hypothèse il existe a et b dans H tel que $\begin{cases} x &= f(a) \\ y &= f(b) \end{cases}$
  alors
  $$\begin{aligned} x \perp y &= f(a) \perp (f(b))' \\ &= f(a) \perp f(b') \\ &= f(a \star b') \text{ avec } a \star b' \in H \text{ car } H \text{ sous groupe} \end{aligned}$$
  Ainsi $x \perp y \in f(H)$

donc par caractérisation, $f(H)$ sous groupe de G'

- Montrons que si H' est un sous groupe de G' alors $f^{-1}(H)$ sous groupe G'
  - — $f^{-1}(H') \subset G$ par définition de f^{-1}
  - — $f^{-1}(H') \neq \emptyset$ car $e_G \in f^{-1}(H')$ puisque $e_{G'} = f(e_G)$ avec $f^{-1}(e_{G'}) \in H$
  - — Soit $(x, y) \in \left(f^{-1}(H')\right)^2$,Montrons que $x \star y' \in f^{-1}(H')$ Par hypothèse $\begin{cases} f(x) & \in H' \\ f(y) & \in H' \end{cases}$

    alors

$$\begin{aligned} f(x \perp y') &= f(x) \perp (y') \\ &= f(x) \perp f(b)' \end{aligned}$$

  d'où $f(x \star y') \in H'$ car H' sous-groupe ainsi $x \star y' \in f^{-1}(H')$

  Donc par caractérisation, $f^{-1}(H')$ est un sous groupe de G ■

Définition/Propriétés III.1.4 (Noyau et image d'un morphisme de groupes)
Si $f : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes alors,

(1) L'image directe $f(G)$ est un sous-groupe particulier de G', dit image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{Im} f \underset{\text{déf}}{=} f(G) \underset{\text{déf}}{=} \{y \in G' \mid \exists x \in G, y = f(x)\}$$

(2) L'image réciproque $f^{-1}(\{e_{G'}\})$ est un sous-groupe particulier de G, dit noyau de f et noté $\ker f$

$$\ker f \underset{\text{déf}}{=} f^{-1}(\{e_{G'}\}) \underset{\text{déf}}{=} \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$$

Définition/Propriétés III.1.5 (Caractérisation des morphisme injectif)
Un morphisme de groupes $f : G \longrightarrow G'$ est injectif si, et seulement si, $\ker f = \{e_G\}$

Démonstration
Soit $f : (G, \star) \longrightarrow (G', \perp)$ un morphisme de groupe
Montrons que f injectif $\iff \ker f = \{e_G\}$ par double implication

- $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose $\ker f = \{e_G\}$
  Soit $(x, y) \in G$ tel que $f(x) = f(y)$
  alors par composition par $(f(x))'$ on a :

$$\begin{aligned} (f(x))' \perp f(x) = (f(x))' \perp f(y) &\iff e_{G'} = f(x') \perp f(y) \\ &\iff e_{G'} = f(x' \star y) \end{aligned}$$

  ainsi, $x' \star y \in \ker f$, donc $x' \star y = e_G$ par hypothèse puis par composition à gauche on trouve $y = x$

  <u>Conclusion</u> f est injective
- $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose f injective
  si $\ker f \neq \{e_G\}$ alors il existe $x \in \ker f$ tel que $x \neq e_G$ avec $f(x) = e_{G'}$.
  Donc $f(x) = f(e_G)$ d'où $x = e_G$ car f est injective ce qui est absurde, car on a supposé $x \neq e_G$

  <u>Conclusion</u> $\ker f = \{e_G\}$ ■

III.2 Isomorphisme

Définition III.2.1
f est dit isomorphisme de groupes si f est un morphisme de groupes et f est bijective.

Propriétés III.2.2
Si $f : G \longrightarrow G'$ est un isomorphisme de groupes alors $f^{-1} : G' \longrightarrow G$ est un isomorphisme de groupes.

IV Anneaux, corps

IV.1 Anneaux

Définition IV.1.1
Un anneau est un ensemble A muni de deux lois de composition interne $\star$ et $\perp$ telles que :

(1) $(A, \star)$ est un groupe commutatif ;

(2) $\perp$ est associative ;

(3) $\perp$ est distributive par rapport à la loi $\star$;

(4) A admet un élément neutre pour la loi $\perp$.

Remarqes

- Il y a unicité de l'élément neutre pour la loi $\perp$.
- Si $\perp$ est commutative, on dit que A est un anneau commutatif.
- Si les lois de A sont notées $+$ et $\times$, les éléments neutres de A pour les lois $+$ et $\times$ sont alors souvent notés respectivement 0_A et 1_A (ou 0 et 1 s'il n'y a pas de confusion possible) et 1_A est appelé élément unité de l'anneau.

Définition/Propriétés IV.1.2 (Quelques exemples usuels d'anneaux déjà rencontrés cette anné
- Dans les ensembles de nombres : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
- Dans les ensembles de fonctions : $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $C^n(I, \mathbb{K})$;
- Dans les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition/Propriétés IV.1.3 (Calculs dans un anneau)
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

(1) $\forall x \in A, 0_A \times x = x \times 0_A = 0_A$ et $\forall x \in A, (-1_A) \times x = x \times (-1_A) = -x$

(2) $\forall (x, y) \in A^2, (-x) \times y = x \times (-y) = -(x \times y)$ et $(-x) \times (-y) = x \times y$

(3) $\forall (x, y, z) \in A^3, (x - y) \times z = (x \times z) - (y \times z)$ et $z \times (x - y) = (z \times x) - (z \times y)$

(4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in A^2, x \times y = y \times x \implies (x + y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times y^{n-k}$

(5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in A^2, x \times y = y \times x \implies x^n - y^n = (x - y) \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \times y^{n-1-k}$

Définition/Propriétés IV.1.4 (Groupe des inversibles d'un anneau)
Si $(A, +, \times)$ est un anneau alors l'ensemble

$$G = \{x \in A \mid x \text{ admet un symétrique pour la loi } \times \text{ dans } A\}$$

muni de la loi $\times$ est un groupe, dit groupe des inversibles de l'anneau $(A, +, \times)$

IV.2 Sous-anneaux

Définition/Propriétés IV.2.1
Une partie H d'un anneau $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de A si, et seulement si,

(1) $1_A \in H$

(2) $\forall (x, y) \in H2, x + y \in H$

(3) $\forall x \in H, -x \in H$

(4) $\forall (x, y) \in H2, xy \in H$

Remarque On peut remplacer les conditions (2) et (3) par $\forall (x, y) \in H2, x - y \in H$.

IV.3 Morphisme d'anneaux

Définition IV.3.1
Une application $f : A \longrightarrow B$ est dite morphisme d'anneaux si A et B sont des anneaux de lois respectives $(+, \times)$ et $(\star, \perp)$ avec :

(1) $f(1_A) = 1_B$

(2) $\forall (x, y) \in A^2, f(x + y) = f(x) \star f(y)$

(3) $\forall (x, y) \in A^2, f(x \times y) = f(x) \perp f(y)$

Propriétés IV.3.2
Si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux alors f est un morphisme de groupes.

Définition/Propriétés IV.3.3 (Image et noyau d'un morphisme d'anneaux)

- Si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-anneau de B.
- Si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux avec $B \neq \{0_B\}$ alors $\ker f$ n'est pas sous-anneau de A.

  En effet, on a $f(1_A) = 1_B$ mais $1_B \neq 0_B$ (sinon B serait égal à $\{0_B\}$) donc 1_A n'appartient pas à $\ker f = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$ et, par conséquent, $\ker f$ n'est pas sous-anneau de A.

IV.4 Isomorphisme d'anneaux

Définition IV.4.1
f est dit isomorphisme d'anneaux si f est un morphisme d'anneaux et f est bijective.

Propriétés IV.4.2
Si $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme d'anneaux alors $f^{-1} : B \longrightarrow A$ est un isomorphisme d'anneaux.

IV.5 Anneau intègre

Définition IV.5.1
On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est un anneau intègre si les conditions suivantes sont réunies :

(1) $A \neq \{0_A\}$

(2) $\forall (a, b) \in A^2, a \times b = 0_A \implies a = 0_A$ ou $b = 0_A$

Remarque
Des éléments a et b de A tels que $a \times b = 0_A$ avec $a \neq 0_A$ et $b \neq 0_A$ sont dits diviseurs de 0_A.

Définition/Propriétés IV.5.2 (Quelques exemples d'anneaux intègres/non intègres déja rencon

- Dans les ensembles de nombres : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des anneaux intègres.
- Dans les ensembles de fonctions : $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $C^n(I, \mathbb{K})$ ne sont pas des anneaux intègres.
- Dans les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ n'est pas un anneau intègre.

IV.6 Corps commutatif

Définition IV.6.1
On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est un corps commutatif si les conditions suivantes sont réunies :

(1) $A \neq \{0_A\}$.

(2) A est commutatif.

(3) tout élément de A différent de 0_A admet un inverse dans A pour la loi $\times$.

Propriétés IV.6.2
Tout corps commutatif est un anneau intègre.

Définition/Propriétés IV.6.3 (Sous-corps)
Une partie H d'un corps $(A, +, \times)$ est un sous-corps de A si, et seulement si, les conditions suivantes sont réunies :

(1) H est un sous-anneau de A.

(2) $\forall x \in H, x \neq 0_A \implies x^{-1} \in H \quad$ (où x^{-1} désigne l'inverse de x pour la loi $\times$)

Chapitre 18

Polynômes

Sommaire

Dans ce chapitre ,$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Anneau des polynômes à une indéterminée

I.1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

La construction de $\mathbb{K}[X]$ n'étant pas au programme, on se contente ici d'une présentation sommaire.

Définition/Propriétés I.1.1 (Polynômes (formels) à coefficients dans $\mathbb{K}$)
Une suite $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang est dite polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'élément a_k est appelé coefficient de degré k de P .

Notations

- L'ensemble des polynômes à coefficients dans K est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est dit polynôme nul et noté $0_{\mathbb{K}[X]}$ ou même 0.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de degré k qui vaut 1 est noté X^k.

Définition/Propriétés I.1.2 (égalité entre deux polynômes (formels))
Deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients de même degré sont égaux.

Définition/Propriétés I.1.3 (Degré d'un polynôme (formel))
Le degré d'un polynôme $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $K[X]$ est noté $\deg(P)$ et défini de la manière suivante :

$$\deg(P) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} & \text{si } P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \\ -\infty & \text{si } P = 0_{\mathbb{K}[X]} \end{cases}$$

Définition/Propriétés I.1.4 (Coefficient dominant d'un polynôme (formel))
Soit $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul de $K[X]$.

- Si P est de degré n alors a_n est dit coefficient dominant de P .
- Si le coefficient dominant de P est égal à 1, on dit que P est un polynôme unitaire.

I.2 L'anneau intègre $(\mathbb{K}[X], +, \times)$

Définition/Propriétés I.2.1 (Multiplication par un scalaire, somme et produit)
Soit $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $K[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

- Le polynôme de $K[X]$ noté $\lambda.P$ défini ci-dessous est dit polynôme multiplication de P par λ :

$$\lambda.P = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

- Le polynôme de $K[X]$ noté $P + Q$ défini ci-dessous est dit polynôme somme de P et Q :

$$P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

- Le polynôme de $K[X]$ noté $P \times Q$ défini ci-dessous est dit polynôme produit de P et Q :

$$P \times Q = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec, pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

Remarque

On peut faire l'analogie ici avec les expressions des coefficients des applications polynomiales obtenues après multiplication d'une application polynomiale par un scalaire, addition ou multiplication de deux applications polynomiales. En particulier, l'expression imposée pour les coefficients du produit de deux polynômes s'explique en pensant aux produits d'applications polynomiales.

Définition/Propriétés I.2.2 (Notation usuelle des polynômes)
Si $P = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ alors on note

$$P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k \text{ ou } P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

Remarques

- La somme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ est finie car tous ses termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.
- Par définition du produit de deux polynômes, on a bien $X^2 = X \times X$ et même plus généralement, $X^k = X \times X^{k-1} = X^{k-1} \times X$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ ce qui justifie a posteriori la notation X^k choisie.

Définition/Propriétés I.2.3 (Effet des opérations polynomiales sur le degré)
Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

$$\deg(\lambda.P) = \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0$$

$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

$$\begin{cases} \deg(P+Q) & = \max(\deg(P), \deg(Q)) \text{ si } \deg(P) \neq \deg(Q) \\ \deg(P+Q) & \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) \text{ si } \deg(P) = \deg(Q) \end{cases}$$

Démonstration
Démonstration du degré du produit de deux polynôme :

on a pour tout n entier naturel tel que $n \geqslant s + \ell + 1$ avec $s = \deg(P)$ et $\ell = \deg(Q)$, $c_n = 0$
On a aussi

$$\begin{aligned} c_{s+\ell} &= \sum_{k=0}^{s+\ell} a_k + b_{s+\ell-k} \\ &= a_s b_\ell \qquad \text{car si } k \neq s \text{ alors } k > s \text{ donc } a_s = 0 \text{ ou } s + \ell - k > \ell \text{ donc } b_{s+\ell-k} = 0 \end{aligned}$$

or $a_s \neq 0$ et $b_\ell \neq 0$ donc $a_s b_\ell \neq 0$ ainsi $\deg(P \times Q) = s + \ell = \deg(P) + \deg(Q)$ ∎

Définition/Propriétés I.2.4 (Structure d'anneau intègre commutatif)
$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau intègre commutatif dont l'élément neutre

- pour la loi + est le polynôme nul $(0, 0, \dots\dots)$ noté $0_{\mathbb{K}[X]}$;
- pour la loi $\times$ est le polynôme $X^0 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ noté $1_{\mathbb{K}[X]}$.

En particulier , on a :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, PQ = 0_{\mathbb{K}[X]} \implies P = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

I.3 L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$

Définition I.3.1
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.
Remarques

- Pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_{n+1}[X]$
- Les éléments de $\mathbb{K}_0[X]$ sont appelés les polynômes constants.

Définition/Propriétés I.3.2 (Structure de $\mathbb{K}_n[X]$)
$\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. Remarques

- $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas stable pour la loi $\times$ donc n'est pas un anneau pour les lois usuelles + et $\times$
-

I.4 Composition de polynômes

Définition I.4.1
Soit $\forall (P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$.

On appelle polynôme composé de P et Q et on note $P \circ Q$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$$

Remarque

On rappelle que $Q^0 = 1_{\mathbb{K}[X]}$

Définition/Propriétés I.4.2 (Degré)
Si P et Q sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et si Q est non constant alors

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Soit $(A, B, C, D) \in (\mathbb{K}[X])^4$

II.1 Divisibilité

Définition II.1.1
S'il existe Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$, on dit que B divise A (ou que B est un diviseur de A, ou que A est divisible par B ou encore que A est un multiple de B) et on note $B \mid A$.

Remarque

Si B est non nul et si B divise A alors il existe un unique Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

Définition/Propriétés II.1.2 (Ensembles des diviseurs et des multiples)

- On note$\mathcal{D}(A) = \{B \in \mathbb{K}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{K}[X], A = BQ\}$ l'ensemble des diviseurs de A
  - Si $A = 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $\mathcal{D}(A) = \mathbb{K}[X]$.
  - Si $A \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $\mathcal{D}(A)$ est composée de polynômes de degré $n \leqslant \deg(A)$
- On note $B\mathbb{K}[X] = \{BQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des multiples de B.
  - Si $B = 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $B\mathbb{K}[X] = \left\{0_{\mathbb{K}[X]}\right\}$
  - Si $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $B\mathbb{K}[X]$ est composé de $0_{\mathbb{K}[X]}$ et de polynômes de degré $n \geqslant \deg(B)$.

Définition/Propriétés II.1.3 (Caractérisation des polynômes associés)
$A \mid B$ si, et seulement si, il existe λ dans $\mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$. (A et B sont alors dits associés)

Propriétés II.1.4 (Propriétés)

(1) $A \mid A$

(2) Si $A \mid B$ et $B \mid C$ alors $A \mid C$

(3) Si $A \mid B$ et $C \mid D$ alors $AC \mid BD$

(4) Si $A \mid B$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \mid B^n$

(5) Si $C \mid A$ et $C \mid B$ alors, pour tout $(U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $C \mid AU + BV$

II.2 Division euclidienne

Théorème II.2.1 (Théorème de la division euclidienne)
Pour tout (A,B) *de* $(\mathbb{K}[X])^2$ *avec* $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, *il existe un unique couple* (Q,R) *de* $(\mathbb{K}[X])^2$ *tel que :*

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Dans la division euclidienne de A *par* B, A *est appelé dividende,* B *diviseur,* Q *quotient et* R *reste.*

Démonstration
Soit $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$

- $\boxed{\text{unicité}}$
  On suppose qu'il existe deux couple (Q,R) et (Q_1,R_1) de $(\mathbb{K}[X])$ tel que :
  (1) $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$
  (2) $A = BQ_1 + R_1$ et $\deg(R_1) < \deg(B)$
  Alors $B(Q-Q_1) = R - R_1$ et donc $\deg(B) + \deg(Q-Q_1) = \deg(R-R_1)$
  avec $\deg(R-R_1) \leqslant \max(\deg(R), \deg(R_1))$ donc $\deg(R-R_1) < \deg(B)$. Ainsi , $\deg(B)+\deg(Q-Q_1) < \deg(B)$ donc $\deg(Q-Q_1) < 0$ ce qui donne $Q - Q_1 = 0_{\mathbb{K}[X]}$. On en déduit $Q = Q_1$ puis $R = R_1$.
- $\boxed{\text{existence}}$
  — Dans le cas où B divise A, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$ donc le couple$(Q, 0_{\mathbb{K}[X]})$ convient.
  — On se place donc dans le cas où B ne divise pas A et on note $J = \{\deg(A - BQ) \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$

  L'ensemble J est non vide (car il contient le degré de A) et est inclus dans $\mathbb{N}$ (car il ne contient pas $-\infty$ puisque B ne divise pas A donc, quel que soit $Q \in \mathbb{K}[X], A - BQ \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$). L'ensemble J admet donc un minimum que l'on note r et il existe donc $QQ \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(A - BQ) = r$.

  Montrons que le polynôme $R = A - BQ$ est de degré r strictement inférieur au degré b de B.

  Pour cela, on peut raisonner par l'absurde, en supposant que $\deg(R) \geqslant deg(B)$ donc $r - b \geqslant 0$.

  En notant α le coefficient dominant de R, le polynôme$S = R - \alpha X^{r-b} B$ est alors de degré strictement inférieur à r. Or S peut s'écrire aussi $S = A - B\left(Q + \alpha X^{r-b}\right)$ donc $S = A - BT$ avec $T \in \mathbb{K}[X]$ ce qui prouve que $\deg(S) \in J$ et donc que $\deg(S) \geqslant r$ car $rest\ell eminimumdeJ$. Ceci contredit le résultat $\deg(S) < r$ trouvé.

  Ainsi, $\deg(R) < b$ donc $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ ce qui prouve l'existence attendue.

$\boxed{\text{conclusion}}$ il existe un unique couple (Q,R) de $(\mathbb{K}[X])^2$ tel que : $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$. ■

Définition/Propriétés II.2.2 (Caractérisation de la divisibilité)
Soit $(A,B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

B divise A si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

III Fonction polynomiales et racines

III.1 Fonction polynomiale associée à un polynôme

Définition III.1.1
A tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty}$ de $\mathbb{K}[X]$, on peut associer une fonction $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \widetilde{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

Cette fonction $\widetilde{P}$ est dite fonction polynomiale associée à P.

Remarque

Par abus d'écriture, on utilise souvent la même notation pour P et $\widetilde{P}$ alors que ce sont des objets de nature différente (une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ presque nulle pour l'un et une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ pour l'autre).

Propriétés III.1.2
Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :

$$\widetilde{\lambda P} = \lambda \widetilde{P} \qquad \widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q} \qquad \widetilde{P \times Q} = \widetilde{P} \times \widetilde{Q} \qquad \widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$$

III.2 Racine (ou zéro) d'un polynôme

Définition III.2.1
On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine (ou un zéro) du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$.

Remarques

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, l'écriture $P(\alpha)$ n'a a priori pas de sens car P est une suite et pas une fonction. En pratique, on note tout de même $P(\alpha)$ au lieu de $\widetilde{P}(\alpha)$ et on parle d'évaluation du polynôme P en α et non pas de la valeur de P en $X = \alpha$ ce qui n'a pas de sens.

Définition/Propriétés III.2.2 (Caractérisation en termes de divisibilité)
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

α est une racine de P dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, le polynôme $X - \alpha$ divise P

Démonstration

- $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose α racine de P
  Par théoreme de la division euclidienne sur P par $X-\alpha$:
  $$\exists (Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2, P = Q(X-\alpha) + R$$
  avec $\deg(R) < \deg(X-\alpha)$ donc $R = \beta$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.
  Par égalité sur les applications polynomiale on a donc $\widetilde{P} = \left(\widetilde{X-\alpha}\right)\widetilde{Q} + \widetilde{R}$
  Or α est racine de P donc
  $$\begin{aligned} \widetilde{P}(\alpha) = 0 &\iff 0 = \left(\widetilde{(\alpha-\alpha)}\right)\widetilde{Q(\alpha)} + \widetilde{R(\alpha)} \\ &\iff 0 = \widetilde{R(\alpha)} \\ &\iff 0 = \beta \end{aligned}$$
  Donc $P = (X-\alpha)Q$ ainsi $(X-\alpha) \mid P$
- $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $(X-\alpha) \mid P$
  alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X-\alpha)Q$ ainsi $\widetilde{P} = \left(\widetilde{X-\alpha}\right)\widetilde{Q}$
  d'où $\widetilde{P}(\alpha) = \left(\widetilde{\alpha-\alpha}\right)\widetilde{Q}(\alpha) = 0$
  donc α est racine de P.

$\boxed{\text{conclusion}}$ α est une racine de P dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, le polynôme $X-\alpha$ divise P ∎

Définition/Propriétés III.2.3 (Propriété sur le nombre de racines)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors P a une infinité de racines dans $\mathbb{K}$.
- Si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors P a au plus $\deg(P)$ racines dans $\mathbb{K}$.

<u>Remarque</u> :
Le polynôme P est entièrement déterminé par la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ associée. En effet si, $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$ alors $\widetilde{P-Q} = 0_{\mathbb{K}[X]}$ donc $P-Q$ a une infinité de racines et par conséquent $P-Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ puis $P = Q$

Démonstration
On note $n = \deg(P)$.
Supposons que P a strictement plus de n racines distinctes dans ce cas il existe $(\alpha_1, \dots \alpha_{n+1})$ qui sont racines de P, alors par propriété :
$$Q = \prod_{k=1}^{n+1} (X - \alpha_k) \text{ divise } P$$
donc $\deg(Q) \leqslant \deg(P)$ *i.e.* $n+1 \leqslant n$ ce qui est faux. ∎

Définition/Propriétés III.2.4 (Multiplicité d'une racine)
Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$.

On dit que α est racine de multiplicité m dans P si $\begin{cases} (X-\alpha)^m \text{ divise } P \\ (X-\alpha)^{m+1} \text{ divise } P \end{cases}$
autrement dit s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X-\alpha)^m Q \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0$$

Remarques

- Dire que α est de multiplicité 0 dans P signifie que α n'est pas racine de P.
- Une racine de P est dite simple (resp. double, triple,...) si sa multiplicité est 1 (resp. 2,3,...)

III.3 Polynômes scindé

Définition III.3.1
Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1 (non nécessairement distincts).

Définition/Propriétés III.3.2 (Propriété sur le degré)
Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$.
Si P est scindé sur $\mathbb{K}$ alors le degré de P est égal à la somme des multiplicités de ses racines dans $\mathbb{K}$.

Définition/Propriétés III.3.3 (Divisibilité par un produit de polynômes distintc de degré 1)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant r racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$
Alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - a_k)$ divise P

Démonstration
Montrons cette propriété par récurrence.

- Pour $r = 1$ la propriété est vérifié

- Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que, Pour tout P de $\mathbb{K}[X]$ ayant r racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ on a $\prod_{k=1}^{r} (X - a_k) \mid P$
Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ ayant$r+1$ racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$. Par hypothèse de récurrence, $\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)$ divise P donc il existe un polynôme Q de $K[X]$ tel que $P = Q \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)$
. Comme α_{r+1} est racine de P, en évaluant ces polynômes en α_{r+1}, on trouve $0 = Q(\alpha_{r+1}) \prod_{k=1}^{r} (\alpha_{r+1} - \alpha_k)$
donc $Q(\alpha_{r+1}) = 0$ puisque les α_k sont deux à deux distincts.
Ainsi, Q a pour racine α_{r+1} donc, par propriété, $(X - \alpha_{r+1})$ divise Q i. e. il existe un polynôme S tel que$Q = (X - \alpha_{r+1})S$ ce qui donne $P = S \prod_{k=1}^{r+1} (X - \alpha_k)$ La propriété est donc vraie au rang $r+1$.

$\boxed{\text{conclusion}}$ Si $P \in \mathbb{K}[X]$ a r racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$ alors $\prod_{k=1}^{r} (X - a_k)$ divise P ■

IV Polynômes dérivés

IV.1 Dérivée formelle d'un polynôme

Définition IV.1.1

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme P noté P' défini par

$$P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Définition/Propriétés IV.1.2 (Degré du polynôme dérivé)

Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ alors $\begin{cases} \deg(P') = \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ P' = 0_{\mathbb{K}[X]} & \text{sinon} \end{cases}$

Définition/Propriétés IV.1.3 (Lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée)
Dans le cas particulier où P est un polynôme à coefficients réels, on a $\widetilde{P'} = \left(\widetilde{P}\right)'$

Définition/Propriétés IV.1.4 (Opération sur les polynômes dérivés)
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
Alors :

$$(\lambda P)' = \lambda P' \quad (P+Q)' = P' + Q' \quad (P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q' \quad (P \circ Q)' = Q'(P' \circ Q)$$

IV.2 Polynômes dérivés successifs

Définition IV.2.1
Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
On pose $P^{(0)} = P$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$ appelé polynôme dérivé formel de P d'ordre $k+1$

Définition/Propriétés IV.2.2 (Degré des polynômes dérivés successifs)

Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et n un entier naturel alors $\begin{cases} \deg(P^{(n)}) = \deg(P) - n & \text{si } \deg(P) \geqslant n \\ P^{(n)} = 0_{\mathbb{K}[X]} & \text{sinon} \end{cases}$

Définition/Propriétés IV.2.3 (Opérations sur les polynômes dérivés successifs)
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$
Alors :

$$(\lambda P)^{(n)} = \lambda P^{(n)}$$

$$(P+Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$$

$$(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} P^{(k)} \times Q^{(n-k)} = \binom{k}{n} P^{(n-k)} \times Q^{(k)} \qquad \text{formule de Leibniz}$$

Définition/Propriétés IV.2.4 (Formule de Taylor polynomiale)
Pour tout polynôme de P de $\mathbb{K}[X]$ et tout α dans $\mathbb{K}$, on a :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^k(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$$

<u>Remarque</u>

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le coefficient de degré k de P est $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$

Démonstration

- Préliminaire :
  Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$
  Montrons que :$Q = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^k(0)}{k!}(X)^k$
  Soit $Q = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$
  alors $Q^{(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_i \left(X^i\right)^{(k)}$ avec $\left(X^i\right)^{(k)} = 0_{\mathbb{K}[X]}$ si $k > i$
  donc

$$\begin{aligned} Q^{(k)}(0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^k(0)}{k!}(X)_i^a \frac{i!}{(i-k)!}X^{i-k} \\ &= a_k \frac{k!}{0!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^k(0)}{k!}(X)_i^a \frac{i!}{(i-k)!}X^{i-k} \\ &= a_k \frac{k!}{0!} \text{ Car en } 0X^{i-k} = 0 \end{aligned}$$

  donc $a_k = \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$ ainsi on conclut que : $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^k(0)}{k!}(X)^k$
- Preuve en α
  On applique le préliminaire à $Q = P \circ (X + \alpha)$
  alors $Q' = (P' \circ (X + \alpha))(X + \alpha)' = P' \circ (X + \alpha)$ donc $Q'(0) = P'(\alpha)$
  et par récurrence immédiate $Q^{(k)} = P^{(k)} \circ (X - \alpha)$ donc $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(\alpha)$
  Ainsi avec le préliminaire on sait : $P \circ (X - \alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^k(\alpha)}{k!}(X)^k$
  d'où $P \circ (X - \alpha) \circ (X + \alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^k(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k$

$\boxed{\text{conclusion}}$ $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha \in \mathbb{K}, P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^k(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k$ ■

Définition/Propriétés IV.2.5 (Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes
Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

α est racine de multiplicité m dans P si, et seulement si, $\begin{cases} P^{(k)}(\alpha) = 0 & \text{pour tout } k \in [\![0\,;m-1]\!] \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

Remarque On en déduit que si α est de multiplicité m non nulle dans P alors α est de multiplicité $m - 1$ dans P'.

Démonstration
Par la formule de Taylor polynomiale en α on a :

$$P = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^k(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k + (X-\alpha)^m \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{P^k(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

i.e. $P = (X-\alpha)^m Q + R$ avec $\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^k(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k & = R \text{ et } \deg(R) < \deg\left((X-\alpha)^m\right) \\ \displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{P^k(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k & = Q \end{cases}$ On en déduit que :

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est racine de multiplicité au moins } m &\iff (X-\alpha)^m \mid P \\ &\iff \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^k(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = 0_{\mathbb{K}[X]} \\ &\iff \forall k \ [\![1 \ ; m-1]\!] \ P^{(k)}(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

conclusion α est racine de multiplicité m dans P si, et seulement si, $\begin{cases} P^{(k)}(\alpha) = 0 & \text{pour tout } k \in [\![0 \ ; m-1]\!] \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$ ∎

V Trois classiques incontournables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

V.1 Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale

Définition/Propriétés V.1.1
L'évaluation en $\alpha \in \mathbb{K}$ du polynôme de degré n, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, peut se faire ainsi :

$$P(\alpha) = a_0 + \alpha\left(a_1 + \alpha\left(a_2 + \cdots + \alpha\left(a_{n-1} + \alpha a_n\right)\right)\right)$$

Cet algorithme dit "schéma de Horner" a une complexité linéaire (en version itérative ou récursive) alors que la méthode naïve d'évaluation a une complexité quadratique.

V.2 Formule d'interpolation de Lagrange

Définition/Propriétés V.2.1
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ une famille de n éléments de $\mathbb{K}$.

Il existe un unique polynôme P de $K_{n-1}[X]$ tel que : $\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!], P(x_j) = y_j$. Ce polynôme, dit polynôme interpolateur de Lagrange, est donné par :

$$p = y_1 L_1 + \ldots y_n + L_n \qquad \text{avec} \qquad \forall i \in [\![1 \,;\, n]\!], L_i = \frac{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(X - x_k)}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(x_i - x_k)}$$

Remarque :

- $\forall (i,i) \in ([\![1 \,;\, n]\!])^2\ L_i(x_j) = \delta_{ij}$
- Plus généralement les polynômes Q de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!], Q(x_j) = y_j$ sont les polynômes.

$$Q = P + \left(\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)\right) S$$

où P est le polynôme interpolateur de Lagrange et S un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $(y_1, \ldots, y_n)$ une famille de n éléments de $\mathbb{K}$.

- $\boxed{\text{unicité}}$
On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q de $K_{n-1}[X]$ tels que :$\forall j \in [\![1 \,;\, N]\!], P(x_j) = Q(x_j) = y_j$
Alors : $\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!], (P - Q)(x_j) = 0$ donc le polynôme $P - Q$ a n racines distinctes.
Comme $P - Q$ appartient à $K_{n-1}[X]$, on en déduit que $P - Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ puis que $P = Q$.
- $\boxed{\text{existence}}$
On exhibe ici un polynôme qui convient.

Pour cela, on pose, pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!], L_i = \dfrac{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(X - x_k)}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(x_i - x_k)}$
Soit $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$

Comme produit de $n-1$ polynômes de degré 1, L_i est un polynôme de degré $n-1$ donc a fortiori L_i appartient à $\mathbb{K}n - 1[X]$. De plus, $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ autrement dit $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
Ainsi, $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$ est un polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie $\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!], P(x_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x_j) = y_j$
.

$\boxed{\text{conclusion}}$ il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!], P(x_j) = y_j$. ∎

V.3 Relations entre coefficients et racines (formules de Viète)

Définition/Propriétés V.3.1
Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n, scindé sur $\mathbb{K}$ de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (répétées avec multiplicité) alors, en notant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a :

$$\forall i \in [\![1\ ;\ n]\!], \sigma_i = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n} \qquad \text{avec } \sigma_i = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_i \leqslant n} \alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\dots\alpha_{k_i}$$

Remarque :
Les formules concernant la somme σ_1 et le produit des racines σ_n sont à connaître par coeur :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Les autres sont à savoir retrouver rapidement.

Démonstration
Par hypothèse sur P, on peut écrire

$$P = a_n (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\dots(X - \alpha_n)$$

ce qui donne après calculs dans l'anneau commutatif $\mathbb{K}[X]$

$$P = a_n \Big(X^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) X^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n) X^{n-2} + \dots + (-1)^n \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \Big)$$

ou plus précisément

$$P = a_n \left(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} \right) + \dots (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} X + (-1)^n \sigma_n$$

avec

$$\sigma_i = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_i \leqslant n} \alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\dots\alpha_{k_i}$$

Par ailleurs, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ donc, comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients de même degré sont égaux, on trouve :

$$\forall i [\![1\ ;\ n]\!], (-1)^i \sigma_i a_n = a_{n-i}$$

et donc

$$\forall i \in [\![1\ ;\ n]\!]\ \sigma_i = (-1)^i \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

■

Chapitre 19

Analyse Asymptotique (1)

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

I Relations de comparaison pour les fonctions

I.1 Définition

Définition/Propriétés I.1.1 (Domination)
On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un voisinage V_a de a et une fonction $M : I \cap V_a \longrightarrow \mathbb{K}$ bornée tel que

$$\forall x \in I \cap V_a, f(x) = M(x)g(x)$$

On note alors $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} o\left(g(x)\right)$ ou $f \underset{a}{=} o\left(g\right)$.

Définition/Propriétés I.1.2 (Négligeabilité)
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V_a de a et une fonction $\varepsilon : I \cap V_a \longrightarrow \mathbb{K}$ de limite nulle en a tel que

$$\forall x \in I \cap V_a, f(x) = \varepsilon(x)g(x)$$

On note alors $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{} o(g)$.

Définition/Propriétés I.1.3 (Equivalence)
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a s'il existe un voisinage V_a de a et une fonction $u : I \cap V_a \longrightarrow \mathbb{K}$ de limite égale à 1 en a tel que

$$\forall x \in I \cap V_a, f(x) = u(x)g(x)$$

On note alors $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

I.2 Caractérisations pratiques

Définition/Propriétés I.2.1
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$ tel que a est point ou extrémité de I.
Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a, on a les équivalences suivantes :

(1) $f \underset{a}{=} o(g)$ si, et seulement si, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

(2) $f \underset{a}{=} o(g)$ si, et seulement si, la fonction $\dfrac{f}{g}$ a pour limite 0 en a.

(3) $f \underset{a}{\sim} g$ si, et seulement si, la fonction $\dfrac{f}{g}$ a pour limite 1 en a.

Remarques

- En pratique, ce sont ces caractérisations qui seront utilisées plutôt que les définitions.
- L'étude locale de f au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ se ramène à l'étude de la fonction $f(a+h)$ pour $h \longrightarrow 0$.
- Les équivalences précédentes sont encore valables dans le cas où f et g s'annulent en a avec g qui ne s'annule pas sur un voisinage de a privé de a.

I.3 Lien entre les relations de comparaison

Définition/Propriétés I.3.1
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$ tel que a est point ou extrémité de I.
Alors, on a :

(1) $f \underset{a}{=} o(g) \implies f \underset{a}{=} o(g)$

(2) $f \underset{a}{\sim} g \implies f \underset{a}{=} o(g)$

(3) $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g)$.

I.4 Traduction des croissances comparées à l'aide des "o"

Définition/Propriétés I.4.1 (Au voisinage de $+\infty$)
Pour tous réels strictement positifs α, β et γ, on a :

- $(\ln(x))^\beta \underset{x \longrightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$;
- $x^\alpha \underset{x \longrightarrow +\infty}{=} o(e^{\gamma x})$;
- $x^\alpha \underset{x \longrightarrow +\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$ dans le cas $\alpha < \beta$

Définition/Propriétés I.4.2 (Au voisinage de 0)
Pour tous réels strictement positifs α et β, on a :

(1) $|\ln(x)|^\beta \underset{x \longrightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

(2) $x^\alpha \underset{x \longrightarrow 0}{=} o\left(x^\beta\right)$ dans le cas$\alpha > \beta$.

I.5 Obtention et utilisation des équivalents

Définition/Propriétés I.5.1 (Obtention d'un équivalent par encadrement)
Si f, g et h sont à valeurs réelles et vérifient $g \leqslant f \leqslant h$ au voisinage de a avec $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Définition/Propriétés I.5.2

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g ont même "comportement" au voisinage de a, c'est-à-dire que :
  — f a pour limite ℓ en a si, et seulement si, g a pour limite ℓ en a.
  — f n'a pas de limite en a si, et seulement si, g n'a pas de limite en a.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a.

I.6 Règles usuelles de manipulation des relations de comparaison

Définition/Propriétés I.6.1 (Cas des $\boldsymbol{O}$ (et des $\boldsymbol{o}$))

(1) Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors $f \underset{a}{=} O(\lambda g)$ et $\lambda f \underset{a}{=} O(g)$.

(2) Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et$g \underset{a}{=} O(h)$ alors $f \underset{a}{=} O(h)$.

(3) Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et$h \underset{a}{=} O(g)$ alors $f + h \underset{a}{=} O(g)$.

(4) Si $f \underset{a}{=} O(g)$ alors $fh \underset{a}{=} O(gh)$.

(5) Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $i \underset{a}{=} O(h)$ alors $fi \underset{a}{=} O(gh)$.

(6) Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $\lim\limits_{b} h = a$ alors $f \circ h \underset{b}{=} O(g \circ h)$.

Remarques

- Dans tout ce qui précède, on peut remplacer O par o.
- JAMAIS de "composition des O (ou des o) à gauche" sans preuve directe

Définition/Propriétés I.6.2 (Cas des équivalents)

(1) Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$.

(2) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

(3) Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{=} O(h)$.

(4) Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.

(5) Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $fh \underset{a}{\sim} gh$.

(6) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $i \underset{a}{\sim} h$ alors $fi \underset{a}{\sim} gh$.

(7) Si $f \underset{a}{\sim} g$ avec f et g strictement positives au voisinage de a alors, pour tout réel β, $f^\beta \underset{a}{\sim} g^\beta$.

(8) Si $f \underset{a}{\sim} g$ avec f et g ne s'annulant pas au voisinage de a alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.

(9) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{b} h = a$ alors$f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.

JAMAIS de "composition à gauche" ni de somme d'équivalents sans preuve directe.

II Développements limités

II.1 Généralités

Dans cette partie, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction et a un RÉEL, point ou extrémité de I.

Définition II.1.1
On dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a (abrégé en $DL_n(a)$) s'il existe des éléments $b_0, \ldots, b_n$ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Remarque
En pratique, on se ramènera à la recherche d'un développement limité pour $h \longmapsto f(a+h)$ en 0.

Définition/Propriétés II.1.2 (Exemple important déjà vu)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un $DL_n(0)$ qui est : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x \longrightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$.

Définition/Propriétés II.1.3 (Unicité d'un développement limité)
S 'il existe des éléments $b_0, \ldots, b_n$ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

alors ces éléments sont uniques.

- Ces éléments $b_0, \ldots, b_n$ sont appelés coefficients du $DL_n(a)$ de f .
- La fonction polynomiale $x \longmapsto b_0 + \cdots + b_n(x-a)^n$ est dite partie régulière du $DL_n(a)$ de f .

Démonstration
On raisonne par l'absurde.

Supposons qu'il existe $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec $(b_0, \ldots, b_n) \neq (c_0, \ldots, c_n)$ tel que :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$
$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

On note p le plus petit entier de $[\![0\,;\,n]\!]$ tel que $b_p \neq c_p$.
Puisque$b_k = c_k$ pour tout $k \in [\![0\,;\,p-1]\!]$, on a alors :

$$b_p(x-a)^p + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \underset{x \longrightarrow a}{=} c_p(x-a)^p + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Après division par $(x-a)^p$ sur un voisinage de a privé de a, on trouve :

$$b_p + \cdots + b_n(x-a)n - p + o((x-a)^{n-p}) = c_p + \cdots + c_n(x-a)^{n-p} + o((x-a)^{n-p})$$

Par passage à la limite en a dans cette égalité, on obtient

$$b_p = c_p$$

ce qui est faux par hypothèse sur b_p et c_p.
On en déduit que l'hypothèse initiale est fausse ce qui permet de conclure.
$\boxed{\text{conclusion}}$ si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a alors il est unique. ■

Définition/Propriétés II.1.4 (Troncature d'un développement limité)
Si f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a qui s'écrit $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} \sum_{k=0} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ alors f admet un développement limité à tout ordre $m \in [\![0\,;n]\!]$ obtenu par troncature du $DL_n(a)$:

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{m} b_k(x-a)^k + o((x-a)^m)$$

II.2 Premiers résultats importants

Définition/Propriétés II.2.1 (Développement limité et équivalent)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction et a un RÉEL, point ou extrémité de I.

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a qui s'écrit $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} \sum_{k=p}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ avec $p \in [\![0\,;n]\!]$ et $b_p \neq 0$ alors $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} b_p(x-a)^p$.

Définition/Propriétés II.2.2 (Cas des fonctions paires ou impaires)
On suppose ici que I est centré en 0. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 et que

(1) f est paire alors la partie régulière de son $DL_n(0)$ ne comporte que des monômes pairs.

(2) f est impaire alors la partie régulière de son $DL_n(0)$ ne comporte que des monômes impairs.

Démonstration
On se place dans le cas où f est paire (preuve facile à adapter pour f impaire) et où f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0.

Alors, il existe$(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

Par composition à droite par la fonction $h : x \longmapsto -x$, on trouve :

$$f(-x) \underset{x \longrightarrow}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(-x)^k + o(x^n)$$

donc

$$f(x) \underset{x \longrightarrow}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k x^k + o(x^n)$$

car f est paire.

Par unicité d'écriture du développement limité à l'ordre$n \in \mathbb{N}$ de f en 0, on en déduit :

$$\forall k \in [\![0\ ;\ n]\!]\,,\, b_k = (-1)^k b_k$$

ce qui donne, pour tous les k impairs, $b_k = -b_k$ donc $b_k = 0$. Les coefficients de tous les monômes impairs dans le développement limité de f en 0 sont donc nuls.

$\boxed{\text{conclusion}}$ la partie régulière du $\mathcal{DL}_n(0)$ de f ne comporte que des monômes pairs. ■

Définition/Propriétés II.2.3 (Caractérisation de la continuité et la dérivabilité avec un dévelop
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction et a un RÉEL appartenant à I.

(1) f est continue en a si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 0 en a.
Dans ce cas, on a : $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

(2) f est dérivable en a si, et seulement si, f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.
Dans ce cas, on a : $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$.

ATTENTION Ce résultat n'est pas généralisable. Ainsi, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ admet un $DL_2(0)$ qui est $f(x) = o(x2)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

II.3 Opérations sur les développements limités

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ des fonctions et a un RÉEL tel que a est point ou extrémité de I.

Définition/Propriétés II.3.1 (Combinaison linéaire)
Si f et g admettent des $DL_n(a)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(a)$ dont la partie régulière est obtenue par combinaison linéaire des parties régulières des $DL_n(a)$ de f et g.

Définition/Propriétés II.3.2 (Produit)
Si f et g admettent des $DL_n(a)$ alors la fonction fg admet un $DL_n(a)$ dont la partie régulière peut s'obtenir par troncature à l'ordre n du produit des parties régulières des $DL_n(a)$ de f et g.
Remarque
En pratique, la mise en facteur des termes prépondérants dans $f(x)$ et $g(x)$ permet de prévoir l'ordre des développements limités à utiliser pour obtenir la précision souhaitée pour le DL de fg.

Définition/Propriétés II.3.3 (Inverse/quotient)
Si f admet un $DL_n(a)$ et que $\lim\limits_a f = 0$ alors la fonction $\dfrac{1}{1-f}$ admet un $DL_n(a)$ qui peut s'obtenir par troncature à l'ordre n de la composée à droite de la partie régulière du $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ par la partie régulière du $DL_n(a)$ de f. Remarques

- Cette propriété, combinée à celle vue sur le produit, permet d'obtenir des développements limités pour des quotients de fonctions. Là encore, la mise en facteur des termes prépondérants au numérateur et au dénominateur est un préalable à tout calcul.
- Aucun résultat général sur la composition de développements limités n'est au programme.

II.4 Primitivation d'un développement limité

Théorème II.4.1
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction et a un RÉEL appartenant à I.
Si f est dérivable sur I et si f' admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a de la forme

$$f'(x) \underset{x\longrightarrow a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

alors f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en a qui est

$$f(x) \underset{x\longrightarrow a}{=} f(a) + \frac{c_0}{1}(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o(x-a)^{n+1}$$

Démonstration
Preuve dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}$

Montrons que $g(x) \underset{x\longrightarrow a}{=} o((x-a)^{n+1})$ avec la fonction g: $x \longmapsto f(x) - f(a) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$

D'après les théorèmes généraux, g est dérivable sur I de dérivée $g' : x \longmapsto f'(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$.

D'après l'hypothèse faite sur f', on a donc $g'(x) \underset{x\longrightarrow a}{=} o((x-a)^n)$.

- Soit $x \in I \cap]a\,;+\infty[$. Alors g est continue sur le segment $[a\,;x]$, dérivable sur $]a\,;x[$ et à valeurs réelles. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe donc $c_x \in]a\,;x[$ tel que $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(c_x)$.
- On peut faire de même avec $x \in I \cap]-\infty\,;a[$ en travaillant sur $[x\,;a]$ et $]x\,;a[$.

Ainsi, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, il existe $c_x \in I \setminus \{a\}$ tel que $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(c_x)$ avec $|c_x - a| \leqslant |x-a|$.

On a donc $c_x \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} a$ (par théorème d'encadrement) et on peut écrire :

$$\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \times \frac{1}{(x-a)^n} = \frac{g'(c_x)}{(x-a)^n} = \frac{g'(c_x)}{(c_x-a)^n} \times \frac{(c_x-a)^n}{(x-a)^n}$$

avec :

- $\dfrac{g'(c_x)}{(c_x-a)^n} \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$ par composition de limites, car $c_x \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} a$ et $\dfrac{g'(t)}{(t-a)^n} \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$
- $x \longmapsto \left|\dfrac{(c_x-a)^n}{(x-a)^n}\right|$ bornée (par 1) sur voisinage de a privé de a.

Ainsi $\dfrac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{n+1}} \underset{x\longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$ donc $g(x)-g(a) = o((x-a)^{n+1})$ puis $g(x) = o((x-a)^{n+1})$ car $g(a) = 0$.

En revenant à la définition de g, cela donne $f(x) - f(a) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} \underset{x\longrightarrow a}{=} o((x-a)^{n+1})$ ce qui permet de conclure.

$\boxed{\text{conclusion}}$ $f(x) \underset{x\longrightarrow a}{=} f(a) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1})$

i.e. on peut toujours primitiver un DL terme à terme ■

Définition/Propriétés II.4.2 (Un exemple important)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$ admet un $DL_n(0)$ qui est :

$$-\ln(1-x) \underset{x\longrightarrow 0}{=} x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

Théorème II.4.3 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction et a un RÉEL appartenant à I.
Si f est de classe C^n sur I alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par :

$$f(x) \underset{x\longrightarrow a}{=} f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ce qui peut s'écrire encore

$$f(x) \underset{x\longrightarrow a}{=} \sum_{n}^{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k n)$$

Remarques

- *Ce théorème donne une condition suffisante d'existence d'un **DL** à l'ordre n en a pour f .*
- *Ce n'est pas une condition nécessaire : cf. l'exemple de la fonction*

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

*qui admet bien un **DL** à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$*

Démonstration
On peut procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ pour montrer la propriété suivante :

$$\forall f \in C^n(I,\mathbb{K}), f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k!(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

- Initialisation :
  On a déjà vu que : $\forall f \in C^0(I,\mathbb{K}), f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} f(a) + o(1)$ (par continuité de f en a) donc la propriété est vraie au rang 0.
- Hérédité :
  on suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n.
  On considère une fonction $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{K})$.
  On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à f' car f' appartient à \\$(I,\mathbb{K})$. Cela donne :

$$f'(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^k(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{x \longrightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k+1}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

  Par théorème de primitivation des développements limités, on en déduit que :

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$

  ce qui donne après changement d'indice

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \underset{x \longrightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^{n+1})$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

conclusion : par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n ■

II.5 Développements limités usuels

Définition/Propriétés II.5.1
Soit $n \in \mathbb{N}$

(1) $\exp(x) \underset{x \longrightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$

(2) $\mathrm{sh}(x) \underset{x \longrightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$

(3) $\mathrm{ch}(x) \underset{x \longrightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$

(4) $\sin(x) \underset{x\longrightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$

(5) $\text{ch}(x) \underset{x\longrightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$

(6) $\frac{1}{1-x} \underset{x\longrightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^2 + o(x^n)$

(7) $\ln(1+x) \underset{x\longrightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$

(8) $(1+x)^\alpha \underset{x\longrightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k + o(x^n)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$

(9) $\arctan(x) \underset{x\longrightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$

(10) $\tan(x) \underset{x\longrightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

II.6 Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction

Définition/Propriétés II.6.1 (Calcul d'équivalents ou de limites)
La connaissance de DL permet de déterminer des limites de manière rapide en cas d'indétermination.

Définition/Propriétés II.6.2 (Position relative d'une courbe et de sa tangente)
Soit f une fonction définie sur I, à valeurs RÉELLES et a un REEL appartenant à I.
Si f admet un développement limité à l'ordre$n \geqslant 2$ en a qui s'écrit

$$f(x) \underset{x\longrightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

alors f est dérivable en a avec $b_0 = f(a)$ et $b_1 = f'(a)$ donc

$$f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) \underset{x\longrightarrow a}{=} b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Si de plus, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant p \leqslant n$ et $b_p \neq 0$, on obtient alors :

$$f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) \underset{x\longrightarrow a}{\sim} b_p(x-a)^p$$

Cela permet de connaître, au voisinage de a, le signe de f$(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))$ donc les positions relatives de la courbe de f et de sa tangente au point $(a, f(a))$ dans un repère du plan.

Définition/Propriétés II.6.3 (Condition nécessaire/suffisante d'existence d'un extremum local)
Soit f une fonction définie sur I, à valeurs RÉELLES et a un point de I mais pas extrémité de I.

- Si f a un extremum local en a avec f dérivable en a alors $f'(a) = 0$ *i.e.* a est point critique de f .
- Si a est point critique de f et si f admet un développement limité à l'ordre $n \geqslant 2$ en a qui s'écri

$$f(x) \underset{x \longrightarrow a}{=} f(a) + b_p(x-a)^p + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

avec $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant p \leqslant n$ et $b_p \neq 0$ alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \longrightarrow a}{\sim} b_p(x-a)^p$$

$f(x) - f(a)$ est donc de signe constant localement au voisinage de a uniquement pour p pair.
Dans ce cas, f admet un extremum local en a qui vaut $f(a)$.

Définition/Propriétés II.6.4 (Détermination d'asymptotes)

- Pour étudier une fonction f au voisinage de $-\infty$ (ou $+\infty$), on peut commencer par calculer un développement limité de la fonction $g : t \longmapsto f\,(1)\,t$ en 0^- (ou 0^+).
- En revenant à f avec $f : x \longmapsto g\,(1)\,x$, on obtient alors un développement asymptotique de f au voisinage de $-\infty$ (ou $+\infty$) qu'on peut utiliser pour déterminer d'éventuelles asymptotes à la courbe de f= dans un repère.

Chapitre 20

Espaces Vectoriels

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels

I.1 Définition

Définition I.1.1
On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) tout ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe $.$ telles que :

- $(E,+)$ est un groupe commutatif.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2, \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$
- $\forall x \in E, 1.x = x$ avec 1 l'élément unité de $\mathbb{K}$

Remarque
Les éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sont appelés vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires

I.2 Propriétés immédiates (règles de calcul)

Propriétés I.2.1
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel alors :

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, -(\lambda.x) = (-\lambda).x = \lambda.(-x)$

Démonstration
Montrons la première équivalence par double implication :

- $\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$
  — Si $\lambda = 0$:
$$0.x = (0+0).x$$
$$0.x = 0.x + 0.x$$
$$0_E = 0.x$$
  — Si $x = 0_E$
$$\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E)$$
$$\lambda.0_E = \lambda.0_E + \lambda.0_E$$
$$0_E = \lambda.0_E$$
- Si $\lambda.x = 0_E$
  si $\lambda = 0$ c'est fini donc on suppose $\lambda \neq 0$:
$$x = 1.x$$
$$x = \frac{\lambda}{\lambda}.x$$
$$x = \frac{1}{\lambda}0_E$$
$$x = 0_E$$

$\boxed{\text{conclusion}}$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$ ■

I.3 Produit fini d'espaces vectoriels

Définition/Propriétés I.3.1
Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors le produit cartésien $E = E_1 \times E2 \times \cdots \times E_n$ muni des lois $+$ et . définies, par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \forall y \in E, \begin{cases} x + y & = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda.x & = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \ldots, \lambda.x_n) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} x & = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y & = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dit espace vectoriel produit

I.4 Espaces vectoriels de référence déjà rencontrés

Définition/Propriétés I.4.1
- $\mathbb{K}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
- $\mathbb{K}[X]$
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec (n, p) $\in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
- $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^\Omega$avec Ω un ensemble quelconque non vide.
- $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.

Remarque
Plus généralement, l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, E)$ des fonctions de Ω (ensemble quelconque non vide) dans E($\mathbb{K}$-espace vectoriel) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I.5 Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition/Propriétés I.5.1 (Cas particulier d'une famille finie de vecteurs)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

Un vecteur x de E est dit combinaison linéaire de la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ s'il existe n éléments de $\mathbb{K}$ notés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.
Exemples

- Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire de la famille de vecteurs $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec
$$e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \ldots, \delta_{ni})$$
- Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de la famille de matrices $(E_{ij})_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$ avec
$$E_{ij} = (\delta_{is}\delta_{jt})_{(s,t) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$$

Définition/Propriétés I.5.2 (Cas général d'une famille quelconque de vecteurs)
Soit I un ensemble et $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

Un vecteur x de E est dit combinaison linéaire de la famille $(e_i)_{i \in I}$ s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ presque nulle (*i.e.* dont tous les éléments sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux), telle que
$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$
famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ est appelée famille des coefficients de la combinaison linéaire
Exemple
Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire de la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$

II Sous-espaces vectoriels

II.1 Définition

Définition/Propriétés II.1.1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une partie H de E est dite sous-espace vectoriel de E si :
(1) H est une partie stable par addition et par multiplication par un scalaire ;
(2) H est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois de composition interne et externe obtenues par restriction à H des lois de E.

II.2 Caractérisation

Définition/Propriétés II.2.1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H une partie de E.

H est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, les conditions suivantes sont réunies :
(1) $0_E \in H$
(2) H est stable par combinaison linéaire : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x,y) \in H^2, \lambda.x + \mu.y \in H$

Exemples
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E ; $\{0_E\}$ est dit sous-espace vectoriel nul de E.
- Si E est différent de $\{0_E\}$ alors, pour tout $x \in E \backslash 0_E$, l'ensemble $H = \{\alpha x \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E dit droite vectorielle de E engendrée par le vecteur non nul x.

Remarques

- En pratique, le recours à cette caractérisation est à privilégier systématiquement par rapport à la définition de sous-espace vectoriel dont la vérification des axiomes serait trop coûteuse.
- En pratique, cette caractérisation permet aussi de montrer qu'un ensemble muni d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe est un espace vectoriel en démontrant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence pour ces lois.

II.3 Quelques exemples de sous-espaces vectoriels déjà rencontrés

Définition/Propriétés II.3.1
- $\mathbb{K}_n[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- $C^n(I, \mathbb{K})$, avec $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.
- $\left\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, u \text{ converge}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ alors $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \alpha x + \beta y = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ dit droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.
- Si $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ alors $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dit plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

II.4 Intersection de sous-espaces vectoriels

Définition/Propriétés II.4.1
L'intersection d'une famille (quelconque) de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.
Remarque
La réunion de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel

Démonstration
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(H_i)_{i\in I}$ une fammille de sous-espace vectoriel de E

Montrons que $H = \bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-espace vectoriel de E

- $H \subset E$ car $\forall i \in I, H_i \subset E$
- $0_E \in H$ car $\forall i \in I, 0_E \in H_i$
- H stable par combinaison linéaire :
  Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in H^2$,
  alors $forall i \in I, \alpha x + \beta y \in H_i$ car $x \in H_i$ et $y \in H_i$ et H_i est stable par combinaison linéaire
  ainsi $\alpha x + \beta y \in \bigcap_{i\in I} H_i$ et ainsi $\alpha x + \beta y \in H$

Donc par caractérisation $H = \bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-espace vectoriel de E ∎

II.5 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition II.5.1
L'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant la partie A est appelée sous-espace vectoriel de E engendré par la partie A et notée $\text{Vect}\,(A)$.
Remarque
Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E, on note aussi $\text{Vect}\,(a_i)_{i\in I}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la partie $\{a_i \mid i \in I\}$ de E.

Définition/Propriétés II.5.2 (Caractérisation)
$\text{Vect}\,(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion, qui contient A.

Théorème II.5.3
- *Si A est vide alors* $\text{Vect}\,(A)$ *est égal à* $\{0_E\}$.
- *Si A est non vide alors* $\text{Vect}\,(A)$ *est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.*

III Familles génératrices, libres ou bases d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une famille (partie) de E.

III.1 Famille (partie) génératrice

Définition III.1.1
La famille (partie) F de E est dite génératrice de E si $E = \text{Vect}\,(F)$
Remarques

- On dit aussi que "F engendre E" au lieu de "F est génératrice de E".
- En pratique, seule l'inclusion $E \subset \text{Vect}\,(F)$ est à établir pour montrer que F engendre E. L'autre inclusion est immédiate car E est espace vectoriel donc stable par combinaison linéaire. Montrer qu'une famille F est génératrice de E, c'est donc montrer que tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de cette famille F.

Propriétés III.1.2
L'ajout d'un vecteur de E à une famille génératrice de E donne une nouvelle famille génératrice de E.

III.2 Famille (partie) libre

Définition III.2.1
La famille (ou partie) F de E est dite libre (ou linéairement indépendante) si toute combinaison linéaire nulle d'éléments de F a ses coefficients nuls.
ATTENTION à ne pas commettre la confusion avec "si les coefficients de la combinaison linéaire sont tous nuls alors celle-ci est nulle" ce qui est vrai que la famille soit libre ou non.

Propriétés III.2.2
- Si on enlève un élément à une famille libre de E, on obtient une famille libre.
- Si on ajoute à une famille libre de E un élément de E qui n'est pas combinaison linéaire de cette famille, on obtient une famille libre

Définition/Propriétés III.2.3 (Un exemple important à connaître)
Toute famille de polynômes de $\mathbb{K}\,[X]$ de degrés entiers distincts est libre.

Démonstration
On considère une combinaison linéaire nulle de polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré entier distincts que l'on note $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = 0_{\mathbb{K}[X]}$ avec $\begin{cases} \lambda_i & \in \mathbb{K} \\ P_i & \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \end{cases}$.
On note $d_i = \deg(P_i)$
Par définition on a $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{K}[X]}$
Par définition deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux, on touve donc :
$\lambda_n C_d(P_n) = 0$ avec $C_d(P_n)$ le coefficients dominants de P_n
d'où $\lambda_n = 0$ car $C_d(P_n) \neq 0$
de même pour tout les coefficients on retrouve donc $\forall i \in [\![1 ; n]\!]\ \lambda_i = 0$
$\boxed{\text{conclusion}}$ $\mathbb{K}[X]$ est libre

III.3 Famille (partie) liée

Définition III.3.1
La famille (partie) F de E est dite liée (ou dépendante linéairement) si elle n'est pas libre.
Remarque
Les familles (parties) de E qui contiennent le vecteur 0_E sont liées.

Définition/Propriétés III.3.2 (Caractérisations)
La famille F de E est liée si, et seulement si, l'une des assertions suivantes est vérifiée :

(1) il existe une combinaison linéaire nulle d'éléments de F qui n'a pas tous ses coefficients nuls.
(2) il existe un élément de la famille F qui est combinaison linéaire des autres éléments de F.

III.4 Base

Définition III.4.1
La famille F est dite base de E si F est une famille génératrice de E et libre.

Définition/Propriétés III.4.2 (Caractérisation)
La famille F est une base de E si, et seulement si, tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de F.
Dans ce cas, la famille presque nulle des coefficients de la combinaison linéaire égale au vecteur x est appelée famille des coordonnées de x dans la base F de E.

Démonstration
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une fammille de E
Montrons que F est une base si, et seulement si, tout vecteurd de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de F par double implication

- $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose F comme base de E
alors F est génératric de E donc tout x de E est un combinaison linéaire de F sous la forme $x = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i$ où $(\lambda_i)_{i\in i}$ est une famille de scalaire presque nul et $F = (f_i)_{i\in i}$
On suppose que x s'écrit aussi $x = \sum_{i\in I} \mu_i f_i$ alors $0_E = \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) f_i$
donc $\forall i \in I, \lambda_i - \mu_i = 0 \iff \forall i \in I, \lambda_i = \mu_i$ car F est libre car base de E
Ainsi tout x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de F
- $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que tout x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de F alors F est génératrice de E, de plus pour tout combinaison linéaire nulle de F :
$$\sum_{i\in I} \lambda_i f_i = 0_E \tag{20.1}$$
$$\sum_{i\in I} \lambda_i f_i = \sum_{i\in I} 0.f_i \tag{20.2}$$
donc $\forall i \in I, f_i = 0$ par unicité d'écriture de 0_E donc F est libre et génératrice, c'est donc une base.

$\boxed{\text{conclusion}}$ F est une base si, et seulement si, tout vecteurd de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de F ■

Définition/Propriétés III.4.3 (Bases de référence à connaître)
- Bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}^n[X]$.
- Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}^n[X]$

IV Somme et somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soit E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

IV.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel

Définition IV.1.1
La somme des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 est l'ensemble noté $E_1 + E_2$ défini par :
$$E_1 + E_2 = \{x \in E \mid \exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, x = x_1 + x_2\}$$

Propriétés IV.1.2
Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.
Remarque
$E_1 + E_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $E_1 \cup E_2$.

IV.2 Somme directe

Définition IV.2.1
La somme $E_1 + E_2$ est dite directe, et notée dans ce cas $E_1 \oplus E_2$, si la décomposition de tout vecteur de $E_1 + E_2$ comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 est unique.

Définition/Propriétés IV.2.2 (Caractérisation par l'intersection)
La somme $E_1 + E_2$ est directe si, et seulement si,$E_1 \cap E2 = \{0_E\}$.

Démonstration
Montrons que $E_1 + E_2$ est directe si, et seulement si, $E_1 \cap E2 = \{0_E\}$ par double application

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $E_1 + E_2$ directe

  — $\{0_E\} \subset E_1 \cap E_2$ car E_1 et E_2 sous-espace vectoriel de E

  — Soit $x \in E_1 \cap E_2$
  alors $\underset{\in E_1}{x} + \underset{\in E_2}{0_E} = \underset{\in E_2}{x} + \underset{\in E_1}{0_E}$
  donc par unicité d'écriture ,car $x \in E_1 \oplus E_2$, on as $x = 0_E$ donc $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$
- $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$
  Soit $(x_1, x_1') \in E_1^2$ et $(x_2, x_2') \in E_2^2$ tel que $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$
  ainsi $\underset{\in E_1}{x_1 - x_1'} = \underset{\in E_2}{x_2 - x_2'}$ d'où $x_1 - x_1' \in E_1 \cap E_2$ *i.e.* $x_1 - x_1' = 0_E$
  donc $x_1 = x_1'$ et $x_2 = x_2'$ càd que $E_1 + E_2$ possède l'unicité d'écriture et donc c'est une somme direct

$\boxed{\text{conclusion}}$ $E_1 + E_2$ est directe si, et seulement si, $E_1 \cap E2 = \{0_E\}$ ■

IV.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition IV.3.1
E_1 et E_2 sont dits supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$.

Définition/Propriétés IV.3.2 (Caractérisations pratiques)

(1) E_1 et E_2 sont supplémentaires si, et seulement si, $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, x = x_1 + x_2$.

(2) E_1 et E_2 sont supplémentaires si, et seulement si, $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Remarque
Le recours à une figure dans le plan ou l'espace pour représenter des sous-espaces supplémentaires est pertinent car il favorise la compréhension intuitive de la situation étudiée.

Chapitre 21

Espaces vectoriels de dimension finie

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Existence de bases

I.1 Définition

Définition I.1.1
On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie mais pas $\mathbb{K}[X]$.

I.2 Algorithme de construction de bases

Définition/Propriétés I.2.1
Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \leqslant n$ et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Si la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre et si la famille $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ est génératrice de E alors E admet une base qui contient à la fois :

- tous les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$;
- certains vecteurs parmi les vecteurs $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

Démonstration
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ une famille génératrice de E telle que la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Algorithme en langage naturel

$\mathcal{L} \leftarrow \{x_1, \ldots, x_p\}$
Pour tout entier k allant de $p+1$ à n, faire :
Si $L \cup \{x_k\}$ libre alors $L \leftarrow L \cup_a cco\ell x_k$

Cet algorithme termine et donne une partie L libre composée des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ et de certains vecteurs parmi les vecteurs $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

Notons $\mathcal{B}$ la famille libre ainsi obtenue après balayage et montrons qu'elle engendre E.

- Par construction de $\mathcal{B}$, tout vecteur de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$ donc appartient à Vect (B).
- Par stabilité des sous-espaces vectoriels de E par combinaison linéaire, on a : Vect $(\mathcal{F}) \subset$ Vect $(\mathcal{B})$. Ainsi $E \subset$ Vect $(\mathcal{B})$ (car $\mathcal{F}$ engendre E) puis $E =$ Vect $(\mathcal{B})$ ce qui prouve que $\mathcal{B}$ engendre E.

Conclusion : $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de E donc c'est une base de E. ∎

I.3 Théorèmes

Théorème I.3.1 (Base extraite)
De toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie différent de $\{0_E\}$, on peut extraire une base finie de E.

Démonstration
(1) Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E.

Comme E est de dimension finie, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille finie génératrice $\mathcal{F}'$ de E.

En effet,
par définition de la dimension finie, E admet une partie génératrice finie $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{F}$ engendre E,tout vecteur x de $\mathcal{G}$ est en particulier combinaison linéaire de $\mathcal{F}$, autrement dit il existe un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{F}$ dont x est la combinaison linéaire. Comme $\mathcal{G}$ est elle-même

une partie finie,on en déduit alors qu'on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille finie $\mathcal{F}'$ telle que $\text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{F}')$.Vu le caractère générateur de $\mathcal{G}$, on a $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$ donc $E \subset \text{Vect}(\mathcal{F}')$ et enfin $E = \text{Vect}(\mathcal{F}')$ car $\text{Vect}(\mathcal{F}')$ est un sous-espace vectoriel de E. La famille finie $\mathcal{F}'$ extraite de $\mathcal{F}$ engendre donc E.

Comme E n'est pas réduit à $\{0_E\}$, la famille $\mathcal{F}'$ contient un vecteur non nul x_1 ce qui impliqueque la famille (x_1) est une famille libre de E. D'après l'algorithme de construction de bases, on peut alors construire une base de E qui contient x_1 et certains vecteurs de la famille finie $\mathcal{F}'$ donc de la famille génératrice F.

$\boxed{\text{conclusion}}$ E a une base finie obtenue par extraction de vecteurs d'une famille génératrice.

(2) Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Comme E est de dimension finie alors $\mathcal{L}$ finie par propriété et E admet une famille génératrice finie, notée $\mathcal{F}$, par définition. En concaténant les familles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$, on obtient une nouvelle famille finie génératrice de E (car surfamille de la famille génératrice de E). Par l'algorithme de construction de bases, on obtient alors une base finie de E composée des vecteurs de la famille libre $\mathcal{L}$ et de certains vecteurs de la famille génératrice $\mathcal{F}$.
$\boxed{\text{conclusion}}$ E a une base finie obtenue par complétion d'une famille libre. ■

Théorème I.3.2 (Base incomplète)
Toute famille libre (finie) d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie différent de $\{0_E\}$ peut être complétée en une base finie de E.

Théorème I.3.3 (Existence de bases en dimension finie)
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie différent de $\{0_E\}$ admet des bases finies.

II Dimension d'un espace vectoriel

II.1 Propriétés préliminaires

Définition/Propriétés II.1.1 (Cardinal des familles libres en dimension finie)
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E à n élements alors toute famille libre $\mathcal{L}$ de E a au plus n vecteurs :

$$\text{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \text{Card}(\mathcal{G})$$

Remarque :
Dans le théorème de la base incomplète, on peut donc remplacer “famille libre finie” par “famille libre”.

Démonstration
On note $\mathcal{G}$ une partie génératrice de E ayant n vecteurs et on raisonne par l'absurde.

- On suppose qu'il existe une partie libre $\mathcal{L}$ de vecteurs de E ayant $n+1$ éléments.

  Pour $k \in [\![0 ; n]\!]$, on note $P(k)$ la propriété suivante :
  "il existe une partie génératrice $\mathcal{G}_k$ de E comportant k éléments de $\mathcal{L}$ et $n-k$ éléments de $\mathcal{G}$".

  Montrons que, pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$, $P(k)$ est vraie.

  — $P(0)$ est vraie car la partie $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ convient.

  — Soit $k \in [\![0 ; n-]\!]$ tel que $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(k+1)$ est vraie.
  Par hypothèse de récurrence, il existe $\mathcal{G}_k = \{\ell_1, \ldots, \ell_k, g_1, \ldots, g_{n-k}\}$ partie génératrice de E telle que $\forall i \in [\![1 ; n-k]\!], \ell_i \in \mathcal{L}$ et $\forall i \in [\![1 ; n-k]\!], g_i \in \mathcal{G}$

  Comme la partie $\mathcal{L}$ comporte $n+1$ éléments et que l'entier k est inférieur ou égal à $n-1$, il existe un vecteur ℓ de $\mathcal{L}$ qui est différent des vecteurs $\ell_1, \ldots, \ell_k$. Ce vecteur ℓ appartient à E donc, par définition de $\mathcal{G}_k$, il existe une famille de scalaires $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k}) \in \mathbb{K}^n$ telle que
  $$\ell = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ell_i + \sum_{i=1}^{n-k} \beta_i g_i$$
  La partie $\{\ell_1, \ldots, \ell_k, \ell\}$ est incluse dans la partie libre $\mathcal{L}$ donc elle est libre et par conséquent, le vecteur ℓ n'est pas combinaison linéaire de $\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$. Ainsi la famille de scalaires $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-k})$ est différente de $(0, \ldots, 0)$ autrement dit il existe $i \in [\![1 ; n-k]\!]$ tel que β_i est non nul. Quitte à rénuméroter les β_i, on peut supposer que β_{n-k} est non nul ce qui permet d'écrire
  $$g_{n-k} = \frac{1}{\beta_{n-k}}\ell - \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\beta_{n-k}} \ell i - \sum_{i=1}^{n-1-k} \frac{\beta_i}{\beta_{n-k}} g_i$$
  En notant $\ell_{k+1} = \ell$ et $\mathcal{G}_{k+1} = \{\ell_1, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}, g_1, \ldots, g_{n-k-1}\}$, cela prouve que le vecteur g_{n-k} appartient à Vect $(\mathcal{G}_{k+1})$. Comme par ailleurs, $\mathcal{G}_k \setminus \{g_{n-k}\}$ est inclus dans $\mathcal{G}_{k+1}$, on en déduit que Vect $(\mathcal{G}_k) \subset$ Vect $(\mathcal{G}_{k+1})$ puis $E \subset$ Vect $(\mathcal{G}_{k+1})$ (car $\mathcal{G}_k$ est génératrice de E) et enfin que $E =$ Vect $(\mathcal{G}_{k+1})$.

  Autrement dit, la partie $\mathcal{G}_{k+1}$ est génératrice de E et comporte $k+1$ éléments de $\mathcal{L}$ et $n-(k+1)$ éléments de $\mathcal{G}$. La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

  Par théorème de récurrence, la propriété $P(k)$ est donc vraie pour tout entier k de $[\![0 ; n]\!]$.

  En particulier, $P(n)$ est vraie. Il existe donc une partie génératrice de E composée de n vecteurs de $\mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ comporte $n+1$ vecteurs, l'un des vecteurs de $\mathcal{L}$ est donc combinaison linéaire des n autres vecteurs ce qui contredit le caractère libre de$\mathcal{L}$.
  $\boxed{\text{conclusion}}$: il n'existe pas de parties libres à $n+1$ éléments dans E.

- On suppose qu'il existe une famille libre de E ayant un nombre de vecteurs supérieur ou égal à $n+1$. Toute sous-famille de cette famille libre est alors libre par propriété. En particulier, toute sous-famille à $n+1$ éléments de cette famille est libre ce qui est faux d'après la propriété démontrée ci-dessus.
  $\boxed{\text{conclusion}}$ il n'existe pas de parties libres à plus de $n+1$ éléments dans E.

$\boxed{\text{conclusion}}$: Si E a une famille génératrice à n vecteurs alors les familles libres de E ont au plus n vecteurs ■

Définition/Propriétés II.1.2 (Cardinal des bases en dimension finie)
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ alors :

- toutes les bases de E sont finies ;
- toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs (appelé cardinal des bases).

II.2 Dimension

Définition II.2.1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On appelle dimension de E, et on note $\dim E$, l'entier naturel défini de la manière suivante :

- Si $E \neq \{0_E\}$ alors $\dim E = \mathrm{Card}\,(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.
- Si $E = \{0_E\}$ alors $\dim E = 0$.

Remarque
L'espace vectoriel nul est donc le seul $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à 0.

Définition/Propriétés II.2.2 (Dimension d'espaces vectoriels déjà rencontrés)

(1) $\dim \mathbb{K}^n = n$

(2) $\dim \mathbb{K}_n\,[X] = n + 1$

(3) $\dim \mathcal{M}_{n,p}\,(\mathbb{K}) = n \times p$

(4) Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et $a \in \mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$. L'ensemble-solution sur I de $(E) : y' + a(t)y = 0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

(5) Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants
Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ L'ensemble-solution sur $\mathbb{R}$ de $(E) : y'' + ay' + by = 0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

(6) Suites récurrentes linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants
Soit $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. L'ensemble des suites (u_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

II.3 Caractérisation des bases en dimension finie

Définition/Propriétés II.3.1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Une famille libre de E est une base de E si, et seulement si, elle compte n vecteurs.

(2) Une famille génératrice de E est une base de E si, et seulement si, elle compte n vecteurs.

II.4 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition/Propriétés II.4.1
On appelle rang d'une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et on note $\operatorname{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\operatorname{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dim \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Remarque
On a $\operatorname{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant n$ avec égalité si, et seulement si, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre.

II.5 Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels

Définition/Propriétés II.5.1
Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E_1 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie avec

$$\dim E_1 \times \cdots \times E_n = \dim E_1 + \cdots + \dim E_n$$

Remarque
Si, pour tout $j \in [\![1 \,;\, n]\!]$, on note, $\mathcal{B}_j$ une base de E_j alors une base de $E_1 \times \cdots \times E_n$ est la concaténation des familles

$$\Big((e, 0_{E_2}, \ldots, 0_{E_n})_{e \in \mathcal{B}_1}, (0_{E_1}, e, \ldots, 0_{E_n})_{e \in \mathcal{B}_2}, \ldots, (0_{E_1}, (0_{E_2}), \ldots, e)_{e \in \mathcal{B}_n} \Big)$$

III Sous-espaces vectoriels en dimension finie

III.1 Propriétés

Définition/Propriétés III.1.1 (Dimension d'un sous-espace vectoriel)
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie alors

(1) tout sous-espace vectoriel H de E est de dimension finie inférieure ou égale à celle de E.

(2) un sous-espace vectoriel H de E est égal à E si, et seulement si, sa dimension est égale à celle de E.

Remarque
Une base de E obtenue en complétant une base d'un sous-espace vectoriel H de E est dite base de E adaptée à H.

Démonstration
On suppose que E est de dimension finie.

- Dans le cas où E est de dimension nulle, les deux résultats sont immédiats car on a $E = \{0_E\}$ donc le seul sous-espace vectoriel de E est $H = \{0_E\}$ qui est de dimension finie nulle.
- On se place dans le cas où E est de dimension n avec $n \geqslant 1$ autrement dit le cas où $E \neq \{0_E\}$.
  — Dans le cas $H = \{0_E\}$, les deux résultats sont immédiats car H est de dimension finie égale à 0 donc strictement inférieure à n.
  — On se place dans le cas $H \neq 0_E$. Alors H contient un vecteur x_1 différent de 0_E donc $\{x_1\}$ est une partie libre de H (et de E).

  Algorithme en langage naturel
  $\mathcal{L}_1 \longleftarrow \{x_1\}$ Tant que $\mathcal{L}_k$ n'est pas une partie génératrice de H,
  faire $\mathcal{L}_{k+1} \longleftarrow \mathcal{L}_k \cup \{x_{k+1}\}$ avec x_{k+1} un vecteur de $H \backslash \operatorname{Vect}(\mathcal{L}_k)$.

  Par construction, les $\mathcal{L}_k$ sont des parties libres de E donc de cardinal inférieur ou égal à n (qui est la dimension de E) et contiennent k vecteurs de H. L'algorithme se termine donc (sinon la suite des cardinaux des parties $\mathcal{L}_k$ serait une suite d'entiers croissante et majorée par n donc stationnaire ce qui contredirait sa stricte monotonie). Ainsi, il existe un entier k_0 dans $[\![1 ; k]\!]$ tel que $\mathcal{L}_{k_0}$ est une partie génératrice et libre de H donc une base de H de cardinal $k_0 \leqslant n$.

  Par définition, H est donc de dimension finie avec $\dim H \leqslant \dim E$.

  Par ailleurs, si $\dim H = \dim E$ alors, par définition, toute base $\mathcal{B}_H$ de H a pour cardinal la dimension de E. Comme H est un sous-espace vectoriel de E, $\mathcal{B}_H$ est donc une famille libre de E qui a pour cardinal la dimension de E. Par caractérisation des bases, $\mathcal{B}_H$ est donc une base de E ce qui implique que $E = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_H)$ donc que $E = H$ puisque $\mathcal{B}_H$ est base de H.
  $\boxed{\text{conclusion}}$ tout sous-espace vectoriel H de E est de dimension finie telle que $\dim H \leqslant \dim E$ avec égalité des dimension si, et seulement si, H est égal à E. ■

Définition/Propriétés III.1.2 (Egalité de sous-espaces vectoriels en dimension finie)
Soit H et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
$H = G$ si, et seulement si, $H \subset G$ et $\dim H = \dim G$.

III.2 Dimension d'une somme (formule de Grassmann)

Définition/Propriétés III.2.1
Soit H et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Si H et G sont de dimension finie alors $H + G$ est de dimension finie avec

$$\dim H + G = \dim H + \dim G - dim H \cap G$$

Remarques
Si de plus la somme $H + G$ est directe alors :

- $\dim H \oplus G = \dim H + \dim G$
- la concaténation d'une base de H et d'une base de G donne une base de $H \oplus G$ dite adaptée à la somme directe.

Démonstration
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension non nécessairement finie) et, H et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.

- Par propriété, $H \cap G$ est sous-espace vectoriel de E inclus dans H donc sous-espace vectoriel de H.
  Comme H est de dimension finie, $H \cap G$ est de dimension finie donc admet une base finie $\mathcal{B}_{H \cap G} = (e_i)_{i \in I}$. Comme $\mathcal{B}_{H \cap G} = (e_i)_{i \in I}$ est une famille libre de $H \cap G$ (donc de H et G), on peut la compléter en :
  — une base finie $\mathcal{B}_H$ de H en lui ajoutant des vecteurs h_j avec $j \in J$;
  — une base finie $\mathcal{B}_G$ de G en lui ajoutant des vecteurs g_k avec $k \in K$.
  La famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant les familles $(e_i)_{i \in I}$,$(h_j)_{j \in J}$ et $(g_k)_{k \in K}$ est alors une famille génératrice du sous-espace vectoriel$H + G$. En effet, tout élément de $H + G$ s'écrit comme somme d'un élément de H et d'un élément de G donc comme combinaison linéaire de la famille obtenue en concaténant $\mathcal{B}_H$ et $\mathcal{B}_G$ et donc a fortiori comme combinaison linéaire de $\mathcal{B}$.

  Comme $\mathcal{B}$ est une famille finie, $H + G$ est alors de dimension finie par définition.
- Montrons que la famille $\mathcal{B}$ ainsi créée est une base de $H + G$. On considère une combinaison linéaire nulle de la famille $\mathcal{B}$. Elle peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i \in I} \alpha_i e_i + \sum_{j \in J} \beta_j h_j + \sum_{k \in K} \gamma_k g_k = 0_E$$

  avec $(\alpha_i)_{i \in I}, (\beta_j)_{j \in J}$ et $(\gamma_k)_{k \in K}$ trois familles de scalaires. Alors

$$\underbrace{\sum_{j \in J} \beta_j h_j}_{\in H} = \underbrace{- \sum_{i \in I} \alpha_i e_i - \sum_{k \in K} \gamma_k g_k}_{\in G}$$

donc le vecteur $\sum_{j\in J}\beta_j h_j$ appartient à $H\cap G$. Comme $(e_i)_{i\in I}$ est une base de $H\cap G$, il existe donc une unique famille de scalaires $(\alpha_i')_{i\in I}$ telle que

$$\sum_{j\in J}\beta_j h_j = \sum_{i\in I}\alpha_i' e_i$$

En réinjectant dans la toute première égalité, on trouve

$$\sum_{i\in I}(\alpha_i+\alpha_i')e_i + \sum_{k\in K}\gamma_k g_k = 0_E$$

Comme $\mathcal{B}_G$ est une base de G, c'est une famille libre de E donc l'égalité précédente implique que

$$\forall i\in I, \alpha_i+\alpha_i' = 0 \text{ et } \forall k\in K, \gamma_k = 0$$

En réinjectant dans la trouve première égalité, on trouve

$$\sum_{i\in I}\alpha_i e_i + \sum_{j\in J}\beta_j h_j = 0_E$$

Comme $\mathcal{B}_H$ est une base de H, c'est une famille libre de E donc l'égalité précédente implique que

$$\forall i\in I, \alpha_i = 0 \text{ et } \forall j\in J, \beta_j = 0$$

avec de plus

$$\forall k\in K, \gamma_k = 0$$

En résumé, toute combinaison linéaire nulle de la famille $\mathcal{B}$ a ses coefficients nuls donc, par définition, $\mathcal{B}$ est libre. Comme $\mathcal{B}$ est de plus une famille génératrice de $H+G$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $H+G$.

Par construction de la famille finie $\mathcal{B}$, on a :

$$\mathrm{Card}\,(\mathcal{B}) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{B}_H) + \mathrm{Card}\,(\mathcal{B}_G) - \mathrm{Card}\,(\mathcal{B}_{H\cap G})$$

Par définition de la dimension d'un espace vectoriel, on a alors :

$$\dim H+G = \dim H + \dim G - \dim H\cap G$$

$\boxed{\text{conclusion}}$ $\dim H+G = \dim H + \dim G - dim H\cap G$ ■

III.3 Sous-espaces supplémentaires

Théorème III.3.1 (Théorème d'existence)
Tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède au moins un supplémentaire.
Remarques

- *Il n'y a pas unicité des supplémentaires dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Ainsi $H = X^2\mathbb{K}_1[X]$ et $G = (X^2+1)\mathbb{K}_1[X]$ sont des sous-espaces vectoriels différents de $E = \mathbb{K}_3[X]$ tous deux supplémentaires de $\mathbb{K}_1[X]$ dans l'espace vectoriel de dimension finie E.*
- *L'existence d'un supplémentaire pour tout sous-espace vectoriel en dimension quelconque dépasse les ambitions du programme de MP2I-MPI.*

Démonstration
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de E.

- Dans le cas où $H = \{0_E\}$, on a immédiatement$E = \{0_E\} \oplus E$ donc H admet comme supplémentaire E.
- On se place dans le cas où $H \neq \{0_E\}$. Comme H est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de dimension finie E, H est alors de dimension finie supérieure ou égale à 1. H admet donc une base finie $\mathcal{B}_H = (e_1, \ldots, e_p)$, avec $p = \dim H$, que l'on peut compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots e_n)$ de E où $n = \dim E$ Par unicité d'écriture de tout vecteur de E dans la base $\mathcal{B}$ et par définition d'une somme directe, on en déduit que
$$E = \operatorname{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p\right) \oplus \operatorname{Vect}\left(e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$$
autrement dit, que
$$E = H \oplus Vect(e_{p+1}, \ldots, e_n)$$
ce qui signifie que H admet Vect $\left(e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$ comme supplémentaire.

conclusion tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie a un supplémentaire. ■

Définition/Propriétés III.3.2 (Caractérisation des sous-espaces supplémentaires avec la dimens
Soit H et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

(1) H et G sont supplémentaires si, et seulement si, $\dim E = \dim H + \dim G$ et $H + G = E$

(2) H et G sont supplémentaires si, et seulement si, $\dim E = \dim H + \dim G$ et $H \cap G = \{0_E\}$

Remarque
Lorsque H et G sont des sous-espaces supplémentaires de E, la concaténation d'une base de H et d'une base de G donne une base de E dite adaptée à la décomposition en somme directe.

Chapitre 22

Application Linéaire (1)

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et, sauf mention contraire $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I Généralités

I.1 Définitions - Notations

Définition I.1.1

(1) Une application u de E dans F est dite application linéaire de E dans F si :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall(x,y)\in E^2, u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y).$$

(2) Les applications linéaires de E dans F constituent $\mathcal{L}(E,F)$.

(3) Les applications linéaires bijectives de E dans F sont dites isomorphismes de E sur F .

(4) Les applications linéaires de E dans E sont dites endomorphismes de E et constituent $\mathcal{L}(E)$.

(5) Les endomorphismes bijectifs de E sont dits automorphismes de E et constituent $\mathcal{GL}(E)$.

Remarque

Toute application u linéaire de E vers F est un morphisme de groupes additifs donc $u(0_E)=0_F$.

I.2 Opérations

Définition/Propriétés I.2.1

(1) La combinaison linéaire de deux applications linéaires est une application linéaire.

(2) La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

(3) La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

I.3 Structures algébriques des ensembles d'applications linéaires

Définition/Propriétés I.3.1

(1) $(\mathcal{L}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel car sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(E,F)$.

(2) $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau dont l'élément neutre pour la loi $\circ$ est Id_E .

(3) $(\mathcal{GL}(E),\circ)$ est un groupe dit groupe linéaire.

I.4 Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel

Définition/Propriétés I.4.1

Si u est une application linéaire de E dans F alors

(1) l'image directe par u d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F ;

(2) l'image réciproque par u d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

I.5 Image et noyau d'une application linéaire

Définition/Propriétés I.5.1 (Structures algébriques)
Si u est une application linéaire de E dans F alors :

(1) $\operatorname{Im} u = u(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de F , appelé image de u ;

(2) $\ker u = u^{-1}\{0_F\} = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé noyau de u.

Définition/Propriétés I.5.2 (Famille génératrice de l'image d'une application linéaire)
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $E = \operatorname{Vect}((x_i)_{i\in I})$ alors $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}((u(x_i))_{i\in I})$.

Définition/Propriétés I.5.3 (Caractérisation des applications linéaires injectives/surjectives)

(1) Une application linéaire u de E dans F est injective si, et seulement si, $\ker u = \{0_E\}$.

(2) Une application (linéaire) u de E dans F est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im} u = F$.

Remarques
Sans la linéarité, l'équivalence 1 n'est pas conservée alors que l'équivalence 2 est conservée.

I.6 Rang d'une application linéaire

Définition I.6.1 (Définition du rang d'une application linéaire)
Une application linéaire u de E dans F est dite de rang fini si son image $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie. Dans ce cas, la dimension de $\operatorname{Im}(u)$ est appelée rang de u et notée $\operatorname{rg}(u)$:

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$$

Définition/Propriétés I.6.2 (Conditions suffisantes de finitude du rang)

(1) Si $u : E \longrightarrow F$ est linéaire et E de dimension finie alors u est de rang fini avec $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim E$.

(2) Si $u : E \longrightarrow F$ est linéaire et F de dimension finie alors u est de rang fini avec $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim F$.

Définition/Propriétés I.6.3 (Rang d'une composée)
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

(1) Si u et v sont de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et vérifie $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

(2) Invariance du rang par composition par un isomorphisme

  (a) si u est un isomorphisme et v de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$.

  (b) si v est un isomorphisme et u de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.

Démonstration

- On suppose que u et v sont de rang fini.

  — Comme v est de rang fini alors $\operatorname{Im} v$ est de dimension finie. L'inclusion naturelle $\operatorname{Im} v \circ u \subset \operatorname{Im} v$ donne alors que $\operatorname{Im} v \circ u$ est de dimension finie (comme sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie), donc que $v \circ u$ est de rang fini, avec $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v)$ par définition du rang.

  — D'autre part, $\operatorname{Im} v \circ u = \{v \circ u(x) \mid x \in E\} = \{v(u(x)) \mid x \in E\}$ donc on a :

$$\operatorname{Im} v \circ u = \{v(y) \mid y \in \operatorname{Im} u\}$$

  On s'intéresse alors à $\tilde{v} = v_{|\Im u}$ autrement dit à l'application $\tilde{v} : \operatorname{Im} u \longrightarrow G$ définie par

$$\forall y \in \operatorname{Im} u, \tilde{v}(y) = v(y)$$

  $\tilde{v}$ est linéaire (car v l'est) d'espace de départ, $\operatorname{Im} u$, de dimension finie (car u est de rang fini) donc, par propriété, $\tilde{v}$ est de rang fini avec $\operatorname{rg}(\tilde{v}) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u)$ c'est-à-dire $\dim(\operatorname{Im} \tilde{v}) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u)$.

  Par définition de $\tilde{v}$, on a donc $\operatorname{Im} v \circ u = \operatorname{Im} \tilde{v}$ ce qui permet de conclure que $\dim(\operatorname{Im} v \circ u) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u)$ autrement dit que $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u)$.

  Ainsi $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v)$ et $rg(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u)$ donc $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$

  $\boxed{\text{conclusion}}$ si u et v sont de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

- Invariance du rang par composition par un isomorphisme

  (1) On suppose que u est un isomorphisme et que v de rang fini.
  On a vu au 1 que $\operatorname{Im} v \circ u = \{v(y) \mid y \in \operatorname{Im} u\}$ autrement dit que $\operatorname{Im} v \circ u = v(\operatorname{Im} u)$ par définition de l'image directe d'un ensemble.

  Or u est un isomorphisme de E vers F donc est en particulier surjectif ce qui donne $\operatorname{Im} u = F$.
  Ainsi, $\operatorname{Im} v \circ u = v(F)$ avec $v(F) = \operatorname{Im} v$, par définition de l'image de v, linéaire de F dans G.

  On en déduit que $\operatorname{Im} v \circ u = \operatorname{Im} v$ ce qui prouve que $v \circ u$ est de rang fini (car v l'est) et que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$.

  $\boxed{\text{conclusion}}$ pour u isomorphisme et v de rang fini, on a $v \circ u$ de rang fini et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$.

(2) On suppose que v est un isomorphisme et u de rang fini. On reprend les notations et une partie des résultats de la preuve du 1

— On a $\operatorname{Im} v \circ u = \operatorname{Im} \tilde{v}(\star)$ avec $\tilde{v} = v_{|\operatorname{Im} u}$ qui est de rang fini car elle est linéaire sur un espace de dimension finie $\operatorname{Im} u$.Par conséquent, $\operatorname{Im} \tilde{v}$ est de dimension finie et donc $\operatorname{Im} v \circ u$ aussi vu l'égalité écrite. Autrement dit, $v \circ u$ est de rang fini.

— Déterminons une base de $\operatorname{Im} \tilde{v}$ (donc de $\operatorname{Im} v \circ u$)

Soit $(y_1, \dots, y_n)$ une base de $\operatorname{Im} u$ (espace de départ de $\tilde{v}$) avec $n = \dim \operatorname{Im} u$.

Alors, par propriété, $\operatorname{Im} \tilde{v} = \operatorname{Vect}(\tilde{v}(y_1), \dots, \tilde{v}(y_n))$ *i.e.*$(\tilde{v}(y_1), \dots, \tilde{v}(y_n))$ engendre $\operatorname{Im} \tilde{v}$.

De plus, $(\tilde{v}(y_1), \dots, \tilde{v}(y_n))$ est une famille libre de G.

En effet, pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 \tilde{v}(y_1) + \cdots + \lambda_n \tilde{v}(y_n) = 0_G$, on a

$\lambda_1 v(y_1) + \cdots + \lambda_n v(y_n) = 0_G$ donc, par linéarité de v,$v(\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n) = 0_G$ ce qui prouve que$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$ appartient au noyau de v. Comme v est un isomorphisme, v est en particulier linéaire injective donc son noyau est réduit à $\{0_F\}$. On en déduit que$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n = 0_F$ puis, par liberté de $(y_1, \dots, y_n)$, que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ ce qui prouve la liberté de $(\tilde{v}(y_1), \dots, \tilde{v}(y_n))$.

Ainsi,$(\tilde{v}(y_1), \dots, \tilde{v}(y_n))$ est une base de $\operatorname{Im} \tilde{v}$ donc $\dim \operatorname{Im} \tilde{v} = n = \dim \operatorname{Im} u$ puis. On obtient alors : $\dim \operatorname{Im} v \circ u = \dim \operatorname{Im} u$ autrement dit $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.
$\boxed{\text{conclusion}}$ pour v isomorphisme et u de rang fini, on a $v \circ u$ de rang fini et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$. ■

II Des applications linéaires usuelles

II.1 Homothéties

Définition II.1.1
Soit$\lambda \in \mathbb{K}$.
L'application $h_\lambda = \lambda \mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme de E appelé homothétie de rapport λ .

II.2 Projections/projecteurs

On suppose ici que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors :

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, x = x_1 + x_2$$

.

Définition II.2.1 (Définition géométrique)
L'application $p : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall x \in E, p(x) = x_1$$

est appelée projection (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2.

Propriétés II.2.2 (Propriétés)
Si p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2 alors :

(1) p est un endomorphisme de E qui vérifie $p \circ p = p$;

(2) $E_1 = \operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid p(x) = x\}$;

(3) $E_2 = \ker p$.

Définition/Propriétés II.2.3 (Caractérisation algébrique)
Une application $p : E \longrightarrow E$ est un projecteur de E si, et seulement si, p est linéaire et $p^2 = p$.
Dans ce cas, on a :

(1) $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$;

(2) p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker p$;

(3) $\forall x \in E, x = p(x) + (x - p(x))$ avec $\begin{cases} p(x) & \in \operatorname{Im} p \\ x - p(x) & \in \ker p \end{cases}$

Définition/Propriétés II.2.4 (Remarques)

(1) Le seul projecteur de E bijectif est Id_E .

(2) On peut avoir $E = \operatorname{Im} u \oplus \ker u$ sans que l'endomorphisme u de E ne soit un projecteur.

II.3 Symétries

On suppose ici que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors :

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, x = x_1 + x_2$$

Définition II.3.1 (Définition géométrique)
L'application $s : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall x \in E, s(x) = x_1 - x_2$$

est appelée symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.
Remarque
Cette application vérifie $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ où p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Propriétés II.3.2
Si s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 alors :

(1) s est un endomorphisme de E qui vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$;
(2) $E_1 = \ker(s - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$;
(3) $E_2 = \ker(s + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$.

Définition/Propriétés II.3.3 (Caractérisation algébrique)
Une application $s : E \longrightarrow E$ est une symétrie de E si, et seulement si, s est linéaire et $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
Dans ce cas :

(1) $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$;
(2) s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$;
(3) $\forall x \in E, x = \dfrac{1}{2}(x + s(x)) + \dfrac{1}{2}(x - s(x))$ avec $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x + s(x)) & \in \ker(s - \mathrm{Id}_E) \\ \dfrac{1}{2}(x - s(x)) & \in \ker(s + \mathrm{Id}_E) \end{cases}$

Définition/Propriétés II.3.4 (Bijectivité des symétries)
Toute symétrie s de E est un automorphisme de E dont la bijection réciproque est s.

III Isomorphismes

III.1 Détermination d'une application linéaire

Définition/Propriétés III.1.1 (Action sur une base)
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de F alors il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que :

$$\forall i \in I, u(e_i) = f_i.$$

Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par la connaissance de son action sur les vecteurs d'une base de son espace vectoriel de départ.

Définition/Propriétés III.1.2 (Recollement)
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E avec $u_1 \in L(E_1, F)$ et $u_2 \in L(E_2, F)$ alors il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que :

$$u_1 = u_{|E_1} \text{ et } u_2 = u_{|E_2}$$

Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par la connaissance de son action sur les vecteurs de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de son espace vectoriel de départ.

III.2 Caractérisations de l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité

Définition/Propriétés III.2.1
Soit u une application linéaire de E dans F et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E.

(1) u est surjective si, et seulement si, $(u(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F .

(2) u est injective si, et seulement si, $(u(e_i))_{i\in I}$ est une famille libre de F .

(3) u est bijective si, et seulement si, $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de F .

III.3 Applications linéaires entre espaces de même dimension finie

Définition/Propriétés III.3.1 (Caractérisation des isomorphismes)
Si u est une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de même dimension finie alors les trois propositions suivantes sont deux à deux équivalentes.

(1) u est injective

(2) u est surjective

(3) u est bijective.

Définition/Propriétés III.3.2 (Caractérisation des automorphismes)
Si u est un endomorphisme de E avec E de dimension finie alors les trois propositions suivantes sont deux à deux équivalentes.

(1) u est bijective.

(2) u est inversible à droite (c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que$u \circ v = \mathrm{Id}_E$).

(3) u est inversible à gauche (c'est-à-dire qu'il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u = \mathrm{Id}_E$).

III.4 Espaces vectoriels isomorphes

Définition III.4.1
Deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de E vers F .

Définition/Propriétés III.4.2 (Caractérisation par la dimension)
Si E est de dimension finie alors F est isomorphe à E si, et seulement si, E et F ont même dimension.

Définition/Propriétés III.4.3 (dimension de $\mathcal{L}(E,F)$)
Si E et F sont de dimension finie alors $\mathcal{L}(E,F)$ l'est aussi et$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

IV Théorème du rang

IV.1 Théorème du rang (version géométrique)

Théorème IV.1.1
Si u est une application linéaire de E vers F et si S est un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E alors l'application $\tilde{u} : S \longrightarrow \Im u$ définie par

$$\forall x \in S, \tilde{u}(x) = u(x)$$

est un isomorphisme.
Remarques

- *L'image d'une application linéaire est donc isomorphe à tout supplémentaire de son noyau.*
- *On dit aussi que u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$.*
- *On note parfois $\tilde{u}$ de la manière suivante $\tilde{u} = u_{|S}^{|\mathrm{Im}(u)}$ en parlant de bi-restriction de u.*

Théorème IV.1.2 (Théorème du rang (version dimension finie))
Si u est une application linéaire de E vers F avec E de dimension finie alors

(1) u est de rang fini ;

(2) $\dim E = \dim \ker(u) + \mathrm{rg}(u)$.

Remarques

- *la dimension finie de l'espace de départ sur lequel est définie l'application linéaire suffit ici.*
- *ATTENTION*
  Le théorème du rang n'implique pas l'égalité $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u$ $(\star)$. En effet,
  - $(\star)$ *peut n'avoir aucun sens si E et F sont distincts (sens de $x + y$ avec $x \in E$ et $y \in F$?) ;*
  - $(\star)$ *peut être fausse si E et F sont égaux (cf $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = P'$).*

V Formes linéaires et hyperplans

V.1 Formes linéaires

Définition/Propriétés V.1.1
Toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$ est dite forme linéaire sur E.
Exemple
Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E alors tout x de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{i\in I} \underbrace{e_i^\star(x)}_{\in\mathbb{K}} e_i$$

Les fonctions $e_i^\star : E \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des formes linéaires sur E dite formes coordonnées relativement à B.

V.2 Hyperplans

Définition V.2.1
Un sous-espace vectoriel de E est dit hyperplan s'il est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Définition/Propriétés V.2.2 (Caractérisations des hyperplans comme supplémentaires de droit
Soit H un sous-espace vectoriel de E.
H est un hyperplan de E si, et seulement si, H est supplémentaire d'une droite de E.
Remarque
Dans le cas où H est un hyperplan, pour toute droite D de E non contenue dans H, on a : $E = H \oplus D$.

Démonstration

- On suppose que H est un hyperplan de E.
  Alors, par définition, il existe φ dans $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ avec $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ tel que $H = \ker \varphi$.

  Comme φ n'est pas nulle, il existe un vecteur a de E tel que $\varphi(a) \neq 0$ autrement dit tel que $a \in E \backslash H$.
  Le sous-espace vectoriel $D = \text{Vect}\,(a)$ est alors une droite puisque a est différent de 0_E .

  <u>Montrons que $E = H \oplus D$</u>
  Soit $x \in E$.
  — $\boxed{\text{analyse}}$ on suppose qu'il existe $(x_H, x_D) \in H \times D$ tel que $x = x_H + x_D$.

    Alors : $\exists \lambda \in \mathbb{K}, x_D = \lambda a$ et $x_H = x - x_D$ avec $\varphi(x_H) = 0$ par définition de H. Par linéarité de φ, cela donne $\varphi(x) - \lambda\varphi(a) = 0$ puis $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ car $\varphi(a) \neq 0$.

    On en déduit donc que le seul couple (x_H, x_D) possible est $\left(x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a, \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a\right)$.
  — $\boxed{\text{synthèse}}$: on a bien $x = \left(x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a\right) + \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a$ avec $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a \in D$ (par définition de D car $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \in \mathbb{K}$) et $x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a \in H$ (par définition de H et linéarité de φ car $\varphi\left(x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a\right) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\varphi(a) = 0$).

  On en déduit que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de H et d'un élément de D. Ainsi $E = H \oplus D$ ce qui prouve que H est supplémentaire d'une droite de E.
- On suppose que H est supplémentaire d'une droite de E que l'on note $D = \text{Vect}\,(a)$ avec $a \neq 0_E$.

  Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme

  $$x = x_H + \lambda_a \text{ avec } x_H \in H \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}$$

  On définit alors l'application linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ par recollement en posant :

  $$\forall x_H \in H, \varphi(x_H) = 0 \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda a) = \lambda$$

  Alors, φ est une forme linéaire (par définition), non nulle car $\varphi(a) = 1 (\neq 0)$ et de noyau H. En effet,

  $$\varphi(x) = 0 \iff \varphi(x_H + \lambda a) = 0 \iff \varphi(x_H) + \varphi(\lambda a) = 0 \iff \lambda = 0 \iff x = x_H \iff x \in H$$

  On en déduit donc, par définition, que H est un hyperplan de E.

$\boxed{\text{conclusion}}$: H hyperplan de E si, et seulement si, H est supplémentaire d'une droite de E. ∎

V.3 Hyperplans en dimension finie

Sauf mention contraire, dans cette partie, E est de dimension finie non nulle notée n.

Définition/Propriétés V.3.1 (Caractérisations des hyperplans avec la dimension)
Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si, et seulement si, $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Définition/Propriétés V.3.2 (Equations d'un hyperplan en dimension finie)
Soit H un sous-espace vectoriel de E et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
H est un hyperplan de E si, et seulement si, il existe $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ tel que :

$$x \in H \iff a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = 0$$

avec $(x_1, \ldots, x_n)$ la famille des coordonnées du vecteur x de E dans la base $\mathcal{B}$.
L'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = 0$ est dite équation de H dans la base $\mathcal{B}$
Remarque
Dans ce cas, $H = \ker \varphi$ où φ est la forme linéaire sur E définie par

$$\varphi : x \longmapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n$$

.

Définition/Propriétés V.3.3 (Comparaison des équations d'un hyperplan en dimension finie)
Deux formes linéaires non nulles sur E de même noyau sont proportionnelles.
Remarque
: les équations d'un même hyperplan en dimension finie diffèrent donc à une constante multiplicative non nulle près.

Définition/Propriétés V.3.4 (Hyperplans en dimension 2 et 3)

- Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à 2 sont les droites de E. Leurs équations dans une base de E sont de la forme $ax + by = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en notant x et y les coordonnées d'un vecteur de E dans la base considérée.
- Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à 3 sont les plans de E. Leurs équations dans une base de E sont de la forme $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ en notant x, y et z les coordonnées d'un vecteur de E dans la base considérée.

Remarque
On retrouve ainsi la forme des équations cartésiennes de droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ vues dans le chapitre "Espaces vectoriels".

V.4 Intersection d'hyperplans en dimension finie

On suppose ici que E est de dimension finie non nulle n et que $m \in [\![1\ ;\ n]\!]$.

Théorème V.4.1

(1) Si $H_1, \dots, H_m$ sont des hyperplans de E alors $\dim \bigcap_{k=1}^{m} H_k \geqslant \dim E - m$.

(2) Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E - m$ *alors il existe m hyperplans de E notés $H_1, \dots, H_m$ tels que* $F = \bigcap_{k=1}^{m} H_k$.

Démonstration

(1) On note $F = \bigcap^{d} m_{k=1} H_k$ avec $H_1, \dots, H_m$ des hyperplans de E, respectivement noyaux de $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ formes linéaires non nulles sur E. On considère l'application $u : E \longrightarrow K^m$ définie par :

$$\forall x \in E, u(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$$

u est linéaire sur E (car les φ_i le sont) avec E de dimension finie. Le théorème du rang implique donc que $\dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u$.

Par ailleurs, $F = \ker u$ (car $F = \bigcap^{d} m_{k=1} \varphi_k$) et $\dim \operatorname{Im} u \leqslant m$ (car $\operatorname{Im} u \subset K^m$ et $\dim K^m = m$).

Ainsi, $\dim F = \dim E - \dim \operatorname{Im} u$ donc $\dim F \geqslant \dim E - m$.

$\boxed{\text{conclusion}}$: si $H_1, \dots, H_m$ sont des hyperplans de E alors $\dim \bigcap_{k=1}^{m} H_k \geqslant \dim E - m$.

(2) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p= $\dim E - m$.

Soit $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , complétée en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ base de E.

Pour $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$, on note $e_i^\star$ la i_e forme coordonnée relativement à la base $\mathcal{B}$ de E. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in F &\iff \forall i \in [\![p+1\ ;\ n]\!]\ e_i^\star(x) = 0. \\ &\iff x \in \bigcap_{i=p+1}^{n} \ker e_i^\star \\ &\iff x \in \bigcap_{k=1}^{n-p} \ker e_{n-k+1}^\star \qquad \text{(après le changement d'indice } i = n-k+1) \end{aligned}$$

Ainsi $F = \bigcap_{k=1}^{n-p} H_k$ avec $H_k = \ker e_{n-k+1}^\star$ hyperplan de E (comme noyau d'une forme linéaire non nulle sur E) et $n - p = m$.

$\boxed{\text{conclusion}}$: si F est sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E - m$ alors F est intersection de m hyperplans de E. ■

Définition/Propriétés V.4.2 (Système d'équations d'un sous-espace vectoriel)
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E - m$ et $H_1, \ldots, H_m$ des hyperplans de E tels que

$$F = \bigcap_{k=1}^{m} H_k$$

Le système d'équations obtenu en rassemblant des équations des m hyperplans H_i relativement à une base $\mathcal{B}$ de E est appelé système d'équations du sous-espace vectoriel F relativement à B.
Exemple Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ a donc un système d'équations du type

$$\begin{cases} ax + by + cz & = 0 \\ a'x + b'y + c'z & = 0 \end{cases}$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.