

Maths – MP2I

Eliott Paquet

23 juillet 2025

Introduction

Ce document réunit l'ensemble de mes cours de Mathématiques de MP2I, ainsi que les TDs (travaux dirigés) les accompagnant. J'ai adapté certaines formulations me paraissant floues ou ne me plaisant pas mais le contenu pur des cours est strictement équivalent. Le document est organisé selon la hiérarchie suivante : chapitre, I), 1), a).

Les éléments des tables des matières initiale et présentes au début de chaque chapitre sont cliquables (amenant directement à la partie cliquée). C'est également le cas des références à des éléments antérieurs de la forme, par exemple, « Démonstration 5.22 ».

Dernier TD corrigé : aucun.

Table des matières

I	Cours	3
1	trigonométrie (Rappels et compléments)	4
1.1	Cercle trigonométrique	4
1.1.1	Relation de congruence modulo 2π sur \mathbb{R}	4
1.2	Cosinus et sinus	5
1.2.1	Formules et valeur remarquables	5
1.3	La fonction tangente	7
2	Inégalité et fonction (rappel et compléments)	8
2.1	Inégalité	8
2.1.1	Relation d'ordre sur \mathbb{R}	8
2.2	Valeur absolue d'un réel.	13
2.3	Partie entière d'un réel	14
2.4	Généralité sur les fonctions	15
2.5	Fonction et relation d'ordre	18
2.6	Dérivation des fonctions d'une variable réelle.	19
3	Calcul algébrique (rappels et compléments)	26
3.1	Sommes et produit finis.	26
3.2	Cas des sommes doubles finies	31
3.3	Système linéaire de deux équations à deux inconnues	32
3.4	Système linéaire de trois équations à trois inconnues	33
3.5	Algorithme du Pivot	34

4	Nombres complexes	36
4.1	Généralité	36
4.2	Conugué d'un nombre complexe	38
4.3	module d'un nombre complexe	38
4.4	Nombre complexe de module 1 et trigonométrie	39
4.5	Forme trigonométrique pour les nombres complexes non nuls	42
4.6	Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes	43

Première partie

Cours

Chapitre 1

trigonométrie (Rappels et compléments)

Sommaire

1.1	Cercle trigonométrique	4
1.1.1	Relation de congruence modulo 2π sur \mathbb{R}	4
1.2	Cosinus et sinus	5
1.2.1	Formules et valeur remarquables	5
1.3	La fonction tangente	7

Dans ce chapitre, on rappelle ce qui a été vu en trigonométrie au lycée et on complète avec les formules d'addition et de duplication ainsi que l'étude de la fonction tangente.

1.1 Cercle trigonométrique

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Définition 1.1 (Cercle trigonométrique)

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1

Propriétés 1.2 (enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique)

Soit M un point du plan.

Le point M appartient au cercle trigonométrique si, et seulement si, il existe un réel t tel que les coordonnées de M dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) sont $(\cos t ; \sin t)$

1.1.1 Relation de congruence modulo 2π sur \mathbb{R}

Définition 1.3

Deux réels a et b sont dits congrus modulo 2π s'il existe un entier relatif k tel que $a - b = 2k\pi$

Notation : $a \equiv b [2\pi]$

Définition/Propriétés 1.4

On dit que la relation \equiv est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} car elle vérifie les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout réel x , on a : $x \equiv x [2\pi]$. (réflexivité)
- (2) Pour tout couple de réels (x, y) tel que $x \equiv y [2\pi]$, on a : $y \equiv x [2\pi]$ (symétrie)
- (3) Pour tout triplet de réels (x, y, z) tel que $x \equiv y [2\pi]$ et $y \equiv z [2\pi]$, on a : $x \equiv z [2\pi]$ (transitivité)

1.2 Cosinus et sinus

1.2.1 Formules et valeur remarquables

Formule 1.5 (Formule de base)

Pour tout réel t , on a :

- (1) $\cos(\pi - t) = -\cos t$ et $\sin(\pi - t) = \sin t$
- (2) $\cos(\pi + t) = -\cos t$ et $\sin(\pi + t) = -\sin t$
- (3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$
- (4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque 1.6

Soient a et b des réels :

$$\begin{aligned} \bullet \cos a = \cos b &\iff \begin{cases} a \equiv b [2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv -b [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k' \in \mathbb{Z}, a = -b + 2k'\pi \end{cases} \\ \bullet \sin a = \sin b &\iff \begin{cases} a \equiv b [2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv \pi - b [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k' \in \mathbb{Z}, a = \pi - b + 2k'\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Formule 1.7 (Formule d'addition)

Pour tout couple de réels (a, b) on a :

$$(1) \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$(2) \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$(3) \sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$(4) \sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

Formule 1.8 (Formule de simpson)

Pour tout couple de réels (a, b) on a :

$$(1) \sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin(a) \cos(b) \iff \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b)) = \sin(a) \cos(b)$$

$$(2) \cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b) \iff \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b)) = \cos(a) \cos(b)$$

Application 1.9

Calcul :

$$\int_0^\pi \sin(x) \cos(3x) dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} (\sin(4x) + \sin(2x)) dx = 0$$

Formule 1.10 (Formule de duplication)

Pour tout réel a , on a :

$$(1) \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - \sin^2(a)$$

$$(2) \sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a)$$

Propriétés 1.11 (Sinus et Cosinus)

- La fonction \cos est définie sur \mathbb{R} , paire et périodique de période 2π . Elle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée vérifie $\cos' = -\sin$
- La fonction \sin est définie sur \mathbb{R} , impaire et périodique de période 2π . Elle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée vérifie $\sin' = \cos$

Propriétés 1.12 (Inégalité remarquable)

Pour tout réel t , on a : $|\sin(t)| \leq |t|$

1.3 La fonction tangente

Définition 1.13

La fonction $\frac{\sin}{\cos}$ est appelée la fonction tangente et notée \tan

Propriétés 1.14

La fonction \tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, impaire et périodique de période π . Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ et sa dérivée vérifie $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\tan^2}$

Formule 1.15

Pour tout réel t , on a :

(1) $\tan(\pi - t) = -\tan(t)$

(2) $\tan(\pi + t) = \tan(t)$

(3)

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	NULL

Formule 1.16 (addition et duplication)

Pour tout couple de réels (a, b) n'appartenant pas à l'ensemble $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a :

(1) Si $a + b$ n'appartient pas à l'ensemble $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ alors $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

(2) Si $a - b$ n'appartient pas à l'ensemble $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ alors $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

(3) Si $2a$ n'appartient pas à l'ensemble $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ alors $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

Exercice/Exemple 1.17

Soit t réel n'appartenant pas à $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\begin{aligned}\sin(t) &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \times 2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\end{aligned}$$

Chapitre 2

Inégalité et fonction (rappel et compléments)

Sommaire

2.1	Inégalité.	8
2.1.1	Relation d'ordre sur \mathbb{R}	8
2.2	Valeur absolue d'un réel	13
2.3	Partie entière d'un réel	14
2.4	Généralité sur les fonctions	15
2.5	Fonction et relation d'ordre	18
2.6	Dérivation des fonctions d'une variable réelle	19

Dans ce chapitre, sont rassemblés des rappels ou compléments sur les inégalités ainsi que des fondamentaux sur les fonctions de variable réelle à valeurs réelles (sans preuve ni évocation de continuité).

2.1 Inégalité

2.1.1 Relation d'ordre sur \mathbb{R}

Définition 2.1

On dit que la relation \leq est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} car elle vérifie les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout réel x , on a : $x \leq x$. (réflexivité)
- (2) Pour tout couple de réels (x, y) tel que $x \leq y$ et $y \leq x$, on a : $y = x$ (antisymétrie)
- (3) Pour tout triplet de réels (x, y, z) tel que $x \leq y$ et $y \leq z$, on a : $x \leq z$ (transitivité)

Propriétés 2.2 (Compatibilité avec les opérations)

Soit x, y, z, t et a des réels.

- (1) Si $x \leq y$ et $z \leq t$ alors $x + z \leq y + t$
- (2) Si $x \leq y$ et $0 \leq a$ alors $ax \leq ay$
- (3) Si $x \leq y$ et $a \leq 0$ alors $ay \leq ax$
- (4) Si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$ alors $0 \leq xz \leq yt$

Notation 2.3 (Intervalles de \mathbb{R})

Les parties I de \mathbb{R} pouvant s'écrire sous l'une des formes suivantes sont dites intervalles de \mathbb{R} :

- $I = \emptyset$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \underset{\text{notation}}{=} [a ; b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leq b$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \underset{\text{notation}}{=} [a ; b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ et $a < b$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \underset{\text{notation}}{=}]a ; b]$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times \mathbb{R}$ et $a < b$
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \underset{\text{notation}}{=}]a ; b[$ avec $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ et $a < b$

Propriétés 2.4

(1) Passage à l'inverse dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \leq y \iff \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \forall y \in \mathbb{R}_-^*, x \leq y \iff \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$$

(2) Passage au carré dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \leq y \iff x^2 \leq y^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \forall y \in \mathbb{R}_-^*, x \leq y \iff y^2 \leq x^2$$

(3) Passage à la racine carrée dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, x \leq y \iff \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$$

(4) Passage à l'exponentielle ou au logarithme népérien dans une inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y \iff e^x \leq e^y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \leq y \iff \ln x \leq \ln y$$

Exercice/Exemple 2.5

Montrer $\forall x \in [0 ; 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Correction 2.6 (2 Méthode)

Soit $x \in [0 ; 1]$

(1) Raisonnement par équivalence

$$\begin{aligned}x(1-x) \leq \frac{1}{4} &\iff 0 \leq \frac{1}{4} - x(1-x) \\&\iff 0 \leq x^2 - x + \frac{1}{4} \\&\iff 0 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Ceci étant vrai $\forall x \in [0 ; 1]$, car $\Delta = 0$ et $x_0 = \frac{1}{2}$, on conclut $\forall x \in [0 ; 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

(2) étude de la fonction $f : [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{1}{4} - x(1-x)$$

Exercice/Exemple 2.7

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Correction 2.8

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} \geq 2 &\iff \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2 \\&\iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\&\iff (x - 1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Ceci étant vrai $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on conclut $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice/Exemple 2.9

Encadrer $\frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + \sqrt{x+2} + 3}$ pour $x \in [-1 ; 1]$.

Correction 2.10

Soit $x \in [-1 ; 1]$

(1) numérateur :

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 1 &\iff 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\iff 0 \leq 2x^2 \leq 2 \\ &\iff 0 \leq 2x^2 - x + 1 \leq 4 \end{aligned}$$

(2) denominateur :

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 1 &\iff 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\iff 4 \leq x^2 + \sqrt{x+2} + 3 \leq 4 + \sqrt{3} \\ &\iff \frac{1}{4 + \sqrt{3}} \leq \frac{1}{x^2 + \sqrt{x+2} + 3} \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi par produit des deux inégalités on as $0 \leq \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + \sqrt{x+2} + 3} \leq 1$ pour $x \in [-1 ; 1]$.

Exercice/Exemple 2.11

Encadrer $\frac{x - y^2 + 3}{x^2 + y^2 - y}$ pour $\forall (x, y) \in [1 ; 2]^2$.

Correction 2.12

Soit $x \in [-1 ; 1]$

(1) numérateur :

$$1 - 4 + 3 \leq x - y^2 + 3 \leq 2 - 1 + 4 \iff 0 \leq x - y^2 + 3 \leq 5$$

(2) denominateur :

$$\begin{aligned} 0 \leq y - 1 \leq 1 &\iff 0 \leq y^2 - y \leq y \\ &\iff 0 \leq y^2 - y \leq 2 \\ &\iff 1 \leq x^2 + y^2 - y \leq 6 \\ &\iff \frac{1}{6} \leq \frac{1}{x^2 + y^2 - y} \leq 1 \end{aligned}$$

Ainsi par produit des deux inégalités on as $0 \leq \frac{x - y^2 + 3}{x^2 + y^2 - y} \leq 5$ pour $\forall (x, y) \in [1 ; 2]^2$.

Définition 2.13 (Parties majorées, majorants, maximum)

Une partie A de \mathbb{R} est dite majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout réel x de A , on a : $x \leq M$. Un tel réel M est alors dit :

- majorant de A dans le cas général.
- maximum de A dans le cas particulier où M appartient à A .

Définition 2.14 (Parties minorées, minorants, minimum)

Une partie A de \mathbb{R} est dite minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout réel x de A , on a : $m \leq x$. Un tel réel m est alors dit :

- minorant de A dans le cas général.
- minimum de A dans le cas particulier où m appartient à A .

Exercice/Exemple 2.15

Que dire de $B = \left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$?

Correction 2.16

- B est minorée car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{n}{n^2 + 1}$ par ailleurs $0 \in B$ donc 0 est un minimum.
- B est majorée par $\frac{1}{2}$. En effet en notant $U_n = \frac{n}{n^2 + 1}$, On voit que (U_n) est strictement décroissante

Exercice/Exemple 2.17

Que dire de $C = \left\{ \frac{e^x}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$?

Correction 2.18

- C est minorée car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \frac{e^x}{x}$ donc 0 est un minorant mais pas un minimum
- Supposons que C est majorée alors $\exists M \in \mathbb{R}, \forall c \in C, c \leq M$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{e^x}{x} \leq M$ donc par passage à la limite en $+\infty$ on trouve $+\infty \leq M$ ce qui est absurde donc C n'est pas majorée.

Définition 2.19 (Parties bornées)

Une partie A de \mathbb{R} est dite bornée si elle est majorée et minorée autrement dit s'il existe deux réels m et M tel que, pour tout réel x de A , on a : $m \leq x \leq M$.

2.2 Valeur absolue d'un réel

Définition 2.20

Pour tout x réel, la valeur absolue de x , notée $|x|$, est définie par : $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Propriétés 2.21

- (1) Pour tout x réel, on a : $0 \leq |x|$ et $x \leq |x|$
- (2) Pour tout couple (x, y) de réels, on a : $|xy| = |x| |y|$
- (3) Pour tout couple (x, y) de réels tel que y est non nul, on a : $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

Définition/Propriétés 2.22 (Deux inéquations élémentaires)

Pour tout réel x et tout réel positif α , on a :

- (1) $|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha \iff x \in [-\alpha ; \alpha]$
- (2) $|x| \geq \alpha \iff x \leq -\alpha \text{ ou } \alpha \leq x \iff x \in]+\infty ; -\alpha] \cup [\alpha ; +\infty[$

Définition/Propriétés 2.23 (Interprétation sur la droite des réels)

Soit a un réel et b un réel positif.

L'ensemble des réels x vérifiant $|x - a| \leq b$ (resp. $|x - a| \geq b$) est l'ensemble des points de la droite des réels situés à une distance du point a inférieure ou égale (resp. supérieure ou égale) à b .

Propriétés 2.24 (Inégalité triangulaire)

Pour tout couple (x, y) de réels, on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Démonstration 2.25 (inégalité triangulaire)

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} |x + y| \leq |x| + |y| &\iff |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\ &\iff x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| \\ &\iff xy \leq |xy| \end{aligned}$$

Ce qui est vrai donc l'inégalité est bien démontré ■

Exercice/Exemple 2.26

Encadrer $\frac{x \cos(x) + 1}{\sin(x) + 3}$ pour $x \in [-\pi ; 2\pi]$

Correction 2.27

Soit $x \in [-\pi ; 2\pi]$

- numérateur : $|x \cos(x) + 1| \leq |x| |\cos(x)| + 1 \leq 2\pi + 1 = 2\pi + 1$
- dénominateur : $2 \leq |\sin(x) + 3| \leq 4$

Ainsi par produit des deux inégalités on a : $0 \leq \frac{|x \cos(x) + 1|}{|\sin(x) + 3|} \leq \frac{2\pi + 1}{2}$

donc $-\frac{2\pi + 1}{2} \leq \frac{x \cos(x) + 1}{\sin(x) + 3} \leq \frac{2\pi + 1}{2}$ pour $x \in [-\pi ; 2\pi]$.

Propriétés 2.28

Soit un couple (x, y) de réels.

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Démonstration 2.29

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $x = (x - y) + y$ donc $|x| \underset{\text{inég. triang.}}{\leq} |x - y| + |y|$ d'où $|x| - |y| \leq |x - y|$

De même, $y = (x - y) + x$ donc $|y| \underset{\text{inég. triang.}}{\leq} |x - y| + |x|$ d'où $-|x - y| \leq |x| - |y|$

ainsi on a $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$ donc $||x| - |y|| \leq |x - y|$. ■

2.3 Partie entière d'un réel

Propriétés 2.30

Pour tout réel x , il existe un unique entier n tel que :

$$n \leq x < n + 1$$

Définition 2.31

On appelle partie entière de x , notée $\lfloor x \rfloor$, l'unique entier n vérifiant la propriété précédente.

Exemple 2.32

$\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ et $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

2.4 Généralité sur les fonctions

Définition 2.33 (Fonction)

Une fonction de variable réelle à valeurs réelles notée f est un objet mathématique qui, à tout élément x d'une partie non vide de \mathbb{R} , associe un et un seul nombre réel noté $f(x)$.

Notation Fonctionnelle :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Définition 2.34

Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles.

- (1) L'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe est appelé ensemble/domaine de définition de f et souvent noté $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$
 - (2) Soit $x \in D_f$
La valeur réelle $f(x)$ est appelée image de x par f .
 - (3) soit $y \in \mathbb{R}$
S'il existe x dans D_f tel que $f(x) = y$ alors x est dit antécédent de y par f
-

Définition/Propriétés 2.35 (égalité entre fonction)

Deux fonctions f et g de variable réelle à valeurs réelles sont dites égales si les deux conditions suivantes sont réunies :

- les fonctions f et g ont le même ensemble de définition D ;
- pour tout x de D , $f(x) = g(x)$.

dans ce cas, on note $f = g$.

Exercice/Exemple 2.36

est-ce que les fonctions f et g définies par :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \text{ et } g : x \longmapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Sont égales ?

Correction 2.37

Tout d'abord $\forall x \in D_f \cap D_g$, $f(x) = g(x)$ car :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = f(x) \end{aligned}$$

Donc $f = g$ sur $D_f \cap D_g$ mais $D_f =]-1 ; +\infty]$ or $D_g = [-1 ; +\infty[\setminus \{0\}$ donc $D_f \neq D_g$ donc $f \neq g$.

Définition 2.38 (représentation graphique d'une fonction)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'ensemble de points C_f défini par

$$C_f = \{M(x ; f(x)) \mid x \in D_f\}$$

est appelé représentation graphique de f (ou courbe représentative de f).

Définition 2.39 (Parité,imparité et périodicité d'une fonction)

- Une fonction f est dite paire si, pour tout x de son domaine de définition, on a : $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est dite impaire si, pour tout x de son domaine de définition, on a : $f(-x) = -f(x)$.
- Une fonction f est dite périodique de période T si, pour tout x de son domaine de définition, on a : $f(x+T) = f(x)$.

Exercice 2.40

Montrer que toute fonction de \mathbb{R} peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Correction 2.41 (Analyse-synthèse)

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction quelconque

- Analyse : Supposons qu'il existe $\begin{cases} p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ paire} \\ i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ impaire} \end{cases}$ telles que $f = p + i$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) & (1) \\ f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x) & (2) \end{cases}$

— $\frac{1}{2} ((1)+(2))$ donne $p : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

— $\frac{1}{2} ((1)-(2))$ donne $i : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

- Synthèse : vérifions que le seul couple trouvé convient :

— $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = p(x) + i(x)$

— $p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$

Ainsi f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et impaire

Définition 2.42 (opération et composition)

Soit f et g deux fonctions de variable réelle à valeurs réelles de domaines de définition D_f et D_g .

- La somme de f et g est la fonction, notée $f + g$, définie par $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$.
Son domaine de définition D_{f+g} vérifie : $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
- La multiplication de f par le réel α est la fonction, notée αf , définie par $\alpha f : x \mapsto \alpha f(x)$.
Son domaine de définition $D_{\alpha f}$ vérifie : $D_{\alpha f} = D_f$ si $\alpha \neq 0$.
- Le produit de f et g est la fonction, notée fg , définie par $fg : x \mapsto f(x)g(x)$.
Son domaine de définition D_{fg} vérifie : $D_{fg} = D_f \cap D_g$.
- Le quotient de f par g est la fonction, notée $\text{frac}fg$, définie par $\text{frac}fg : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.
Son domaine de définition $D_{\text{frac}fg}$ vérifie : $D_{\text{frac}fg} = D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}$.
- La composée de g et f est la fonction, notée $g \circ f$, définie par $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$.
Son domaine de définition $D_{g \circ f}$ vérifie : $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

Exercice/Exemple 2.43

Domaine de définition de : $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \sqrt{x - \frac{1}{x}}$$

Correction 2.44

Soit $x \in D_f$ alors $x - \frac{1}{x} \geq 0 \iff x \neq 0$ et $\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geq 0$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$(x-1)(x+1)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

ainsi on voit bien que $D_f = [-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

2.5 Fonction et relation d'ordre

Définition 2.45 (Monotonie)

Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles et D une partie de son domaine de définition D_f .

- (1) f est dite **croissante** sur D si, pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.
- (2) f est dite **décroissante** sur D si, pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$.
- (3) f est dite **strictement croissante** sur D si, pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.
- (4) f est dite **strictement décroissante** sur D si, pour tout $(x, y) \in D^2$ tel que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.

Remarque : f est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur D si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D .

Remarque 2.46 (Application de la définition)

Sous réserve que cela ait du sens :

- La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
- La composée de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
- La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante
- Le produit de deux fonctions positives croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).

Définition 2.47

Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles de domaine de définition D_f .

Soit D une partie non vide de D_f .

- (1) f est dite **majorée** sur D si l'ensemble $\{f(x) \mid x \in D\}$ est majoré, c'est-à-dire s'il existe un réel M tel que, pour tout réel x de D , on a : $f(x) \leq M$.
Un tel réel M est alors dit :

- **majorant** de f sur D dans le cas général.
 - **maximum** de f sur D dans le cas particulier où il existe x_0 dans D tel que $M = f(x_0)$.
- (2) f est dite **minorée** sur D si l'ensemble $\{f(x) \mid x \in D\}$ est minoré, c'est-à-dire s'il existe un réel m tel que, pour tout réel x de D , on a : $m \leq f(x)$.
Un tel réel m est alors dit :
- **minorant** de f sur D dans le cas général.
 - **minimum** de f sur D dans le cas particulier où il existe x_0 dans D tel que $m = f(x_0)$.
- (3) f est dite **bornée** sur D si f est majorée et minorée sur D , c'est-à-dire s'il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel x de D , on a : $m \leq f(x) \leq M$.

Propriétés 2.48

Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles de domaine de définition D_f .
Alors f est bornée sur D si, et seulement si, la fonction $|f|$ est majorée sur D .

2.6 Dérivation des fonctions d'une variable réelle

Définition 2.49 (dérivée en un point)

Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles de domaine de définition D_f et x_0 un point de D_f .

f est dite dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0 .

Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ la valeur de cette limite et on l'appelle la dérivée de f en x_0 .

Cela revient à déterminer si la fonction $h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie en 0.

Définition 2.50

fonction dérivée f est dite dérivable sur D_f si elle est dérivable en tout point de D_f .
Dans ce cas, la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f et notée f' .

Définition/Propriétés 2.51 (équation de la tangente)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles et C_f la courbe représentative de f .

Soit x_0 un point de D_f .

Si f est dérivable en x_0 , alors la tangente à la courbe C_f au point $M(x_0, f(x_0))$ est la droite d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Définition/Propriétés 2.52 (opération sur les fonctions dérivable)

Soit I et J des intervalles de \mathbb{R} non vide et non réduits à un point.

(1) Combinaison linéaire :

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles et (α, β) deux réels.

Si f et g sont dérivables sur I , alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$\alpha f + \beta g' = \alpha f' + \beta g'$$

(2) Produit :

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles.

Si f et g sont dérivables sur I , alors fg est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(3) quotient :

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles tel que g est non nulle sur I .

Si f et g sont dérivables sur I , alors $\frac{f}{g}$ est dérivable et sa dérivée vérifie :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(4) Composition :

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelle tel que, pour tout x de I , $f(x)$ appartient à J

Soit g une fonction définie sur J et à valeurs réelles.

Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J , alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Définition/Propriétés 2.53 (Caractérisation des fonctions constantes ou monotones)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles.

(1) f est constante sur I si, et seulement si, pour tout x de I , $f'(x) = 0$.

(2) f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$.

(3) f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$.

(4) f est strictement croissante sur I si, et seulement si, les deux conditions suivante sont réunies :

(a) pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$;

(b) il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tels que pour tout x de $[a ; b]$, on a $f'(x) = 0$.

(5) f est strictement décroissante sur I si, et seulement si, les deux conditions suivante sont réunies :

(a) pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$;

(b) il n'existe pas de réels a et b dans I avec $a < b$ tels que pour tout x de $[a ; b]$, on a $f'(x) = 0$.

Définition/Propriétés 2.54 (dérivées usuelles)

Fonction	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$x \mapsto a$ avec $a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto x^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}^*	$x \mapsto -nx^{-n-1}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto e^x$	\mathbb{R}	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \ln(x)$	\mathbb{R}_+^*	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \sin(x)$	\mathbb{R}	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	\mathbb{R}	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$ ou $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$

Exercice/Exemple 2.55

Calculer $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3(x)}{\cos^5(x)} dx$

Correction 2.56

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3(x)}{\cos^5(x)} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3(x) \times \frac{1}{\cos^2(x)} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3(x) \times (\tan^2(x) + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} (\tan^4(x)) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\tan^4\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan^4\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((\sqrt{3})^4 - 1^4 \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Définition/Propriétés 2.57 (étude pratique d'une fonction)

Le plan d'étude d'une fonction f est en général le suivant :

- Détermination du domaine de définition de f
- Réduction éventuelles du domaine d'étude selon les propriétés de f (parité, périodicité, etc.)
- Limites aux bornes du domaine d'étude
- Etude de la monotonie (le plus souvent, mais pas uniquement, après calcul de la dérivée de f et détermination du signe de celle-ci)
- Construction du tableau de variation de f (limites aux bornes, valeurs remarquables, variations)
- Tracé de la courbe représentative de f

Définition/Propriétés 2.58 (dérivées d'ordre supérieur)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles.

On note

$$f^{(0)} = f$$

puis, pour tout entier naturel k tel que la fonction $f^{(k)}$ existe et est dérivable sur I , on pose :

$$f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$$

Si n est un entier naturel, tel que la fonction $f^{(n)}$ existe alors on dit que f est n -fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est la dérivée d'ordre n (ou dérivée n -ième) de f .

Définition 2.59 (Fonction réciproque)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans J . Si, pour tout y de J , l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution x dans I notée $x = f^{-1}(y)$ alors :

- la fonction f est dite bijection de I sur J
- la fonction f^{-1} ainsi définie sur J et à valeurs dans I , est dite bijection réciproque de f .

Exemples :

- $\sqrt{\cdot}$ est une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ de bijection réciproque $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$.
- \exp est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* de bijection réciproque la fonction \ln

Propriétés 2.60 (Propriétés de la bijection réciproque)

Si f est une bijection de I sur J de bijection réciproque notée f^{-1} alors on a :

- (1) pour tout x de I , $f(f^{-1}(x)) = x$;
- (2) pour tout y de J , $f^{-1}(f(y)) = y$.

Définition/Propriétés 2.61 (représentation graphique)

on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si f est une bijection de I sur J alors la courbe représentative de f et de sa bijection réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Définition/Propriétés 2.62 (dérivée de la bijection réciproque)

Soit f une bijection de I sur J et si f est dérivable sur I alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en tout point y de J tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ avec, dans ce cas :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Démonstration 2.63

Soit f une bijection de I sur J , soit y in J tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$.

on sait que $f(f^{-1}(y)) = y$ donc en appliquant la définition de la dérivée de fonction composée on a :

$$(f(f^{-1}(y)))' = (y)' \iff f'(f^{-1}(y)) \times (f^{-1}(y))' = 1 \iff (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \blacksquare$$

Définition/Propriétés 2.64 (Trois fonction usuelles trigonométriques)

- Fonction Arccos :

La fonction Arccos est la réciproque de la fonction $c : [0 ; \pi] \longrightarrow [-1 ; 1]$ et est donc
$$x \longmapsto \cos(x)$$

définie sur $[-1 ; 1]$ à valeurs dans $[0 ; \pi]$ et dérivable sur $] -1 ; 1[$ de dérivée :

$$\arccos' : x \longmapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Fonction Arcsin :

La fonction Arccos est la réciproque de la fonction $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1 ; 1]$ et est donc définie
$$x \longmapsto \sin(x)$$

sur $[-1 ; 1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $] -1 ; 1[$ de dérivée :

$$\arcsin' : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Fonction Arctan :

La fonction Arccos est la réciproque de la fonction $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[\xrightarrow{x} \mathbb{R}$ et est donc définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ et dérivable sur \mathbb{R} de dérivée :

$$\arctan' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration 2.65 (démonstration de la dérivée de la fonction Arccos)

Soit $y \in [-1 ; 1]$, on note $c : [0 ; \pi] \xrightarrow{x} [-1 ; 1]$
 $x \mapsto \cos(x)$

$$\begin{aligned} c'(c^{-1}(y)) &= -\sin(c^{-1}(y)) \\ &= -\sqrt{\sin^2(c^{-1}(y))} \quad \text{car } c^{-1}(y) \in [0 ; \pi] \text{ donc } \sin(c^{-1}(y)) \geq 0 \\ &= -\sqrt{1 - \cos^2(c^{-1}(y))} \\ &= -\sqrt{1 - y^2} \end{aligned}$$

Ainsi d'après la définition de la dérivée de la bijection réciproque on a : $\text{Arccos}'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ ■

Remarque 2.66 (démonstration d'une relation intéressante entre Arctan(x) et Arctan($\frac{1}{x}$))

Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$, on as $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et f dérivable sur D_f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{Arctan}'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \\ &= \frac{-1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\text{Arctan}'(x)$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) + \text{Arctan}'(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(f(x) + \text{Arctan}(x))' = 0$

Ainsi il existe c un réel tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) + \text{Arctan}(x) = c$

$$\text{Pour } x = 1, f(1) + \text{Arctan}(1) = c$$

$$f(1) + \frac{\pi}{4} = c$$

$$c = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$

De manière analogue on trouve $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$

Chapitre 3

Calcul algébrique (rappels et compléments)

Sommaire

3.1	Sommes et produit finis.	26
3.2	Cas des sommes doubles finies.	31
3.3	Système linéaire de deux équations à deux inconnues	32
3.4	Système linéaire de trois équations à trois inconnues.	33
3.5	Algorithme du Pivot	34

3.1 Sommes et produit finis

Notation 3.1

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée par un ensemble I fini.

La somme (resp. le produit) de tous les réels de la famille est notée $\sum_{i \in I} a_i$ (resp. $\prod_{i \in I} a_i$).

- Si I est l'ensemble vide, on convient que : $\sum_{i \in I} a_i = 0$ et $\prod_{i \in I} a_i = 1$.
- Si $I = \{1, 2, \dots, n\}$ avec n un entier naturel non nul, on note $\sum_{i=1}^n a_i$ ou $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$ au lieu de $\sum_{i \in I} a_i$ (resp. $\prod_{i=1}^n a_i$ ou $\prod_{1 \leq i \leq n} a_i$ au lieu de $\prod_{i \in I} a_i$).

Propriétés 3.2 (opération et calcul par paquets)

- Pour toutes familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ de réels indexées par I et pour tout couple (α, β) de réels, on a :

$$\sum_{i \in I} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \sum_{i \in I} a_i + \beta \sum_{i \in I} b_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} (a_i b_i) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \left(\prod_{i \in I} b_i \right)$$

- Pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels indexée par I avec $I = I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} a_i = \prod_{i \in I_1} a_i \prod_{i \in I_2} a_i$$

Exercice/Exemple 3.3

Calculer : $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$ avec $n \in \mathbb{N}$

Correction 3.4

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{2k+1} (2k+1) + \sum_{k=1}^n (-1)^{2k} (2k) \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) + \sum_{k=1}^n 2k \\ &= - \left(2 \sum_{k=0}^{n-1} k + n \right) + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= - \left(2 \frac{(n-1)n}{2} + n \right) + 2 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1 - n + 1 - 1) \\ &= n\end{aligned}$$

Définition/Propriétés 3.5 (téléscopage)

Soit $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de réels avec n supérieur ou égal à 2.

(1) La somme $\sum_{i=1}^n b_{i+1} - b_i$ est dite somme télescopique et vaut $b_{n+1} - b_1$.

(2) Si tous les b_i sont non nuls, le produit $\prod_{i=1}^n \frac{b_{i+1}}{b_i}$ est dit produit télescopique et vaut $\frac{b_{n+1}}{b_1}$.

Définition/Propriétés 3.6 (Somme usuelles)

Pour tout entier naturel n et tout réel x différent de 1, on a :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Démonstration 3.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

- Démonstration de $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$\sum_{k=1}^n (k^2 - (k-1)^2) = n^2 \quad (*) \quad (\text{téléscopage})$$

donc via (*) on as :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^2 - (k-1)^2) = n^2 &\iff \sum_{k=1}^n (k^2 - k^2 + 2k - 1) = n^2 \\ &\iff 2 \left(\sum_{k=1}^n k \right) - n = n^2 \\ &\iff \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

- Démonstration, via un raisonnement similaire, de $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$, on as :

$$\sum_{k=1}^n (k^3 - (k-1)^3) = n^3 \quad (*) \quad (\text{téléscopage})$$

donc via (*) on as :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^3 - (k-1)^3) = n^3 &\iff \sum_{k=1}^n (k^3 - k^3 + 3k^2 - 3k + 1) = n^3 \\ &\iff \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3 \\ &\iff 3 \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) - 3 \left(\sum_{k=1}^n k \right) + n = n^3 \\ &\iff 3 \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) = 3 \left(\sum_{k=1}^n k \right) - n + n^3 \\ &\iff 3 \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) = \frac{3n(n+1) - 2n + 2n^3}{2} \\ &\iff 3 \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) = \frac{n(2n+1)(n+1)}{2} \\ &\iff \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \end{aligned}$$

- Démonstration, via un raisonnement similaire, de $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, on as :

$$\sum_{k=0}^n x^k - x^{k+1} = 1 - x^{n+1} \quad (*) \quad (\text{télescopage})$$

■

donc via (*) on as :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n x^k - x^{k+1} = 1 - x^{n+1} &\iff \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) - \left(\sum_{k=0}^n x^{k+1} \right) = 1 - x^{n+1} \\ &\iff \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) - x \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) = 1 - x^{n+1} \\ &\iff (1-x) \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) = 1 - x^{n+1} \\ &\iff \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \end{aligned}$$

Définition/Propriétés 3.8 (Factorisation de $a^n - b^n$)

Pour tout n entier naturel non nul et tout couple (a, b) de réels, on a :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b) \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} \right) \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \end{aligned}$$

Démonstration 3.9 (preuve par télescopage)

Pour tout n entier naturel non nul et tout couple (a, b) de réels, on a :

$$\begin{aligned}(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\&= \sum_{k=0}^{n-1} (a-b) a^{n-1-k} b^k \\&= \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-(k)} b^k - a^{n-(k+1)} b^{k+1}) \\&= a^n b^0 - a^0 b^n \quad (\text{télescopage}) \\&= a^n - b^n\end{aligned}$$

Définition/Propriétés 3.10 (coefficients binomiaux)

Soit n un entier naturel non et k entière relatif, on a :

- (1) $\binom{k}{n} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!k!} & \text{si } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0 & \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n \end{cases}$
- (2) $\binom{k}{n} = \binom{n-k}{n}$ (symétrie)
- (3) $\binom{k}{n} + \binom{k+1}{n} = \binom{k+1}{n+1}$ (relation de Pascal)
- (4) $\binom{k}{n}$ est un entier naturel

Définition/Propriétés 3.11 (Formule du binôme de Newton)

Pour tout couple (a, b) de réels et tout entier naturel n , on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^k b^{n-k}$$

Démonstration 3.12 (Formule du binôme par récurrence)

Soit a et b des réels

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^k b^{n-k}$

On note $P(n)$ la Propriété « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^k b^{n-k}$ »

- Initialisation : $P(0)$ est vrai car $\begin{cases} (a+b)^0 &= 1 \\ \sum_{k=0}^0 \binom{k}{0} a^k b^{-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 &= 1 \end{cases}$
- Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vrai, Montrons que $P(n+1)$ est vrai :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^k b^{n-k} \quad (\text{Hérédité}) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} (a^{k+1} b^{n-k} + a^k b^{n+1-k}) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{k-1}{n} a^{k+1} b^{n-(k-1)} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} a^k b^{n+1-k} + \binom{0}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{k}{n+1} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{k}{n+1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{n+1} a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ vrai ■

3.2 Cas des sommes doubles finies

Définition 3.13

Soit A un ensemble fini de couples et $(a_{i,j})_{(i,j) \in A}$ une famille de réels indexée par A . La somme de tous les réels de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in A}$ est notée $\sum_{(i,j) \in A} a_{i,j}$ et appelée somme double.

Remarque : Si A est l'ensemble vide, on convient que $\sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} = 0$

Définition/Propriétés 3.14 (Sommes double rectangulaires)

Dans le cas où $A = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ avec n et m des entiers naturels non nuls,

- la somme double $\sum_{(i,j) \in A} a_{i,j}$ est rectangulaire

- le somme double $\sum_{(i,j) \in A} a_{i,j}$ s'écrit aussi $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j}$
- la somme double $\sum_{(i,j) \in A} a_{i,j}$ vaut :

$$\sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)$$

- si $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(c_j)_{1 \leq j \leq m}$ sont des familles finies de réels, alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \left(\sum_{j=1}^m c_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} b_i c_j$$

Définition/Propriétés 3.15 (somme double triangulaire)

Dans le cas où $A = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ avec n un entier naturel non nul,

- La somme double $\sum_{(i,j) \in A} a_{i,j}$ est dite triangulaire.
- La somme double $\sum_{(i,j) \in A} a_{i,j}$ s'écrit aussi $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ et vaut :

$$\sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j a_{i,j} \right)$$

3.3 Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Définition/Propriétés 3.16 (rappel de première)

Dans le plan \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , toute droite D admet une équation de la forme

$$ax + by = c$$

où a , b et c sont des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

Avec ces notations,

- le vecteur \vec{n} de coordonnées (a, b) est un vecteur normal à D ;
- le vecteur \vec{u} de coordonnées $(-b, a)$ est un vecteur directeur de D .

Définition/Propriétés 3.17 (Système linéaire de deux équations à deux inconnues)

Soit a, b, c, a', b' et c' des réels. Le système d'équations

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

d'inconnues les réels x et y est dit système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Définition/Propriétés 3.18 (Interprétation géométrique)

Dans le cas où $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$, résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection entre deux droites D et D' du plan. Trois cas se présentent :

- Les droites sont confondues donc (S) a une infinité de solutions qui forment une droite ;
- Les droites sont sécantes donc (S) a une unique solution ;
- Les droites sont parallèles non confondues donc (S) n'a pas de solutions.

3.4 Système linéaire de trois équations à trois inconnues

Définition/Propriétés 3.19 (rappel de terminale)

Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout plan P admet une équation de la forme

$$ax + by + cz = d$$

où a, b, c et d sont des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

- le vecteur \vec{n} de coordonnées (a, b, c) est un vecteur normal à P ;
- deux vecteurs non colinéaires pris parmi les vecteurs de coordonnées $(-b, a, 0)$, $(0, -c, b)$ et $(-c, 0, a)$ donnent la direction de P .

Définition/Propriétés 3.20 (Système linéaire de deux équations à trois inconnues)

Soit a, b, c, d, a', b', c' et d' des réels. Le système d'équations

$$(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

d'inconnues les réels x, y et z est dit système linéaire de deux équations à trois inconnues.

Définition/Propriétés 3.21 (Interprétation géométrique)

Dans le cas où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection entre deux plans P et P' de l'espace. Trois cas se présentent :

- Les plans sont confondus donc (S) a une infinité de solutions qui forment un plan ;
- Les plans sont sécants donc (S) a une infinité de solutions qui forment une droite ;
- Les plans sont parallèles non confondus donc (S) n'a pas de solutions.

Définition/Propriétés 3.22 (Système linéaire de trois équations à trois inconnues)

Soit $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c''$ et d'' des réels. Le système d'équations

$$(S) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

d'inconnues les réels x, y et z est dit système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Définition/Propriétés 3.23 (Interprétation géométrique)

Dans le cas où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ et $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$, résoudre le système (S) revient à déterminer l'intersection entre trois plans P, P' et P'' de l'espace. Cela conduit à distinguer huit cas de figures qui donnent quatre types d'ensemble-solution pour (S) :

- Le système (S) a une infinité de solutions qui forment un plan ;
- Le système (S) a une infinité de solutions qui forment une droite ;
- Le système (S) a une unique solution ;
- Le système (S) n'a pas de solutions.

3.5 Algorithme du Pivot

Remarque 3.24 (Remarque préliminaire)

En cycle terminal, de petits systèmes linéaires ont été rencontrés et résolus dans des cas simples, le plus souvent par “substitution”.

En MP2I, nous utiliserons en priorité la méthode de résolution par “pivot”. Plus efficace et élégante, cette technique sera reprise au semestre 2 dans le chapitre “Matrices” pour résoudre plus généralement des systèmes linéaires de n équations à p inconnues.

Définition/Propriétés 3.25 (Opérations élémentaires)

On reprend les notations des paragraphes III. et IV. et on note L_i la i -ème ligne du système (S) .

On appelle opérations élémentaires sur les lignes du système linéaire (S) :

- (1) l'échange de deux lignes distinctes : $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$;
- (2) la multiplication d'une ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$;
- (3) l'addition à une ligne du produit d'une autre ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$ et $\lambda \neq 0$.

Propriétés 3.26 (Propriété importante)

Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire le transforme en un système linéaire équivalent c'est-à-dire un système ayant le même ensemble de solutions.

Définition/Propriétés 3.27 (résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot)

La résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot se déroule en deux phases :

- phase de descente : en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes du système, on transforme le système en un système de forme "triangulaire" ou "trapézoïdale" comme, par exemple,

$$(S1) : \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ b'_1y = c'_1 \end{cases}$$

$$(S2) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ b'_1y + c'_1z = d'_1 \end{cases}$$

$$(S3) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ c''_1z = d''_1 \end{cases}$$

- phase de remontée : Le système obtenu est équivalent au système initial ; il est facile à résoudre ce qui permet d'obtenir l'ensemble des solutions du système initial. Dans cette phase de remontée, on peut au choix :
 - effectuer des substitutions successives (moins élégant) ;
 - utiliser à nouveau des opérations élémentaires sur les lignes pour réduire le système sous forme "diagonale" (plus élégant et facile à coder).

Remarque 3.28

Les opérations élémentaires effectuées lors de la résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot (phases de descente et de remontée) doivent systématiquement être indiquées en marge du système étudié pour faciliter la lecture des correcteurs et permettre de retrouver les éventuelles erreurs de calcul.

Remarque 3.29 (Pour aller plus loin (pour ceux qui ont suivi l'option maths expertes))

- Les petits systèmes linéaires décrits au III. et IV. peuvent se traduire matriciellement par une équation matricielle du type $AX = B$ avec A et B des matrices à préciser et X une matrice colonne inconnue.
- L'effet des opérations élémentaires sur les lignes de ces systèmes peut se traduire matriciellement par des multiplications de la matrice A à gauche par des matrices inversibles bien

Chapitre 4

Nombres complexes

Sommaire

4.1	Généralité	36
4.2	Conjugé d'un nombre complexe	38
4.3	module d'un nombre complexe	38
4.4	Nombre complexe de module 1 et trigonométrie.	39
4.5	Forme trigonométrique pour les nombres complexes non nuls.	42
4.6	Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes	43

4.1 Généralité

Définition 4.1 (Propriété de \mathbb{C})

On ADMET l'existence d'un ensemble noté \mathbb{C} , dont les éléments sont appelés nombres complexes, tel que :

- (1) \mathbb{C} contient \mathbb{R}
- (2) \mathbb{C} est muni de deux opérations $+$ et \times sur \mathbb{C} qui étendent les opérations $+$ et \times connues sur \mathbb{R} et suivent les mêmes règles de calcul que celles-ci
- (3) \mathbb{C} contient un élément noté i vérifiant $i^2 = -1$
- (4) Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Remarque 4.2

- La forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est dite forme algébrique du nombre complexe z
 - le réel a est dit partie réelle du nombre complexe z et noté $a = \operatorname{Re}(z)$
 - le réel b est dit partie imaginaire du nombre complexe z et noté $b = \operatorname{Im}(z)$
- L'unicité d'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique se traduit par :
Pour tout réels a, b, a' et b' , on a :

$$a + ib = a' + ib' \text{ si, et seulement si, } a = a' \text{ et } b = b'$$

Définition/Propriétés 4.3 (Opération sur \mathbb{C})

L'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est muni deux opérations $+$ et \times définies par, pour tout nombre complexe z de forme algébrique $a + ib$ et tout nombre complexe z' de forme algébrique $a' + ib'$:

$$\begin{cases} z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') \\ z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \end{cases}$$

Définition/Propriétés 4.4 (Extension des résultat vus dans \mathbb{R})

(1) Pour tout n entier naturel et tout nombre complexe z différent de 1, on a :

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

(2) Pour tout n entier naturel et tout couple (z, z') nombres complexes , on a :

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} (z')^k$$

(3) Pour tout n entier naturel et tout couple (z, z') nombres complexes , on a :

$$z^n + (z')^n = (z - z') \left(z^{n-1} + z^{n-2} z' + \cdots + z(z')^{n-2} + (z')^{n-1} \right) = (z - z') \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} (z')^k = (z - z') \sum_{k=0}^{n-1} z^k (z')^{n-1-k}$$

Définition/Propriétés 4.5 (Plan complexe : affixe d'un point, d'un vecteur)

Dans toute la suite, on considère le plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.

- A tout complexe z , on peut associer le point M de coordonnées $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ dit image de z .
- A tout point M de coordonnées (x, y) , on peut associer le complexe $z = x + iy$ dit affixe de M .

On identifie donc \mathbb{C} au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct et on parle de "plan complexe".

A tout complexe z , on peut aussi associer le vecteur \vec{u} de coordonnées $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ dit image de z et à tout vecteur \vec{u} de coordonnées (x, y) , on peut associer le complexe $z = x + iy$ dit affixe de \vec{u} . Ainsi :

- Pour tout vecteur \vec{u} d'affixe z et tout réel α , le vecteur $\alpha \vec{u}$ a pour affixe αz .
- Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{u}' d'affixes respectives z et z' , le vecteur $\vec{u} + \vec{u}'$ a pour affixe $z + z'$.
- Pour tous points M et M' d'affixes respectives z et z' , le vecteur $\vec{MM'}$ a pour affixe $z' - z$.

4.2 Conugué d'un nombre complexe

Définition 4.6

On appelle conjugué d'un nombre complexe z et on note \bar{z} le nombre complexe défini par :

$$\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$$

Pour tout nombre complexe z , le point d'affixe \bar{z} et le point d'affixe z sont symétriques par rapport à l'axe des réels dans le plan complexe.

Définition/Propriétés 4.7

Pour tous nombres complexes z et z' , on a les propriétés suivantes :

(1) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$

(2) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$

(3) $\overline{\bar{z}} = z$

(4) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

(5) $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$

(6) $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

4.3 module d'un nombre complexe

Définition/Propriétés 4.8

On appelle module d'un nombre complexe z et on note $|z|$ le nombre réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$$

Définition/Propriétés 4.9 (interprétation géométriques)

- Pour tout nombre complexe z , le module $|z|$ est :
 - la distance entre le point d'affixe 0 et le point d'affixe z ;
 - la norme de tout vecteur d'affixe z
- Pour tous nombres complexes z et z' le module $|z - z'|$ est :

- la distance entre les points d'affixe z et z' ;
- la norme du vecteur d'affixe $z' - z$
- Soit r un réel positif, z_0 un nombre complexe et M_0 le point d'affixe z_0 .
 - Les points du plan dont l'affixe z vérifie $|z - z_0| = r$ forment le cercle de centre M_0 et de rayon r .
 - Les points du plan dont l'affixe z vérifie $|z - z_0| \leq r$ forment le disque de centre M_0 , de rayon r

Propriétés 4.10

Pour tous nombres complexes z et z' , on a les propriétés suivantes :

- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|zz'| = |z| |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ Dans le cas où z' est non nul
- $\frac{z}{z'} = \frac{z |z'|}{|z'|^2}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ avec égalité si, et seulement si il existe un réel positif α tel que $z' = \alpha z$

4.4 Nombre complexe de module 1 et trigonométrie

Définition 4.11 (Cercle trigonométrique)

On identifie le cercle trigonométrique et l'ensemble des nombres complexes de module 1 que l'on note :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Définition/Propriétés 4.12

Pour tout nombre réel t , on appelle exponentielle imaginaire de t et on note e^{it} le nombre complexe défini par :

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

Pour tous nombres réels t et t' , on a l'égalité :

$$e^{i(t+t')} = e^{it} e^{it'}$$

Définition/Propriétés 4.13 (Formule D'Euler)

Pour tout nombre réel t , on a les égalités suivantes dites formules d'Euler

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ et } \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$$

Propriétés 4.14 (Technique de l'angle moitié)

La technique de l'angle moitié permet l'obtention de factorisations classiques à savoir retrouver :

- pour tout t réel, $1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}} \right) = 2 \cos\left(-\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}} = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}$
- pour tout t réel, $1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}} \right) = 2 \sin\left(-\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}} = -2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}$
- pour tout réel p et q , $e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$
- pour tout réel p et q , $e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$

Remarque :

En écrivant la partie réelle et la partie imaginaire de $e^{ip} \pm e^{iq}$ à partir des deux dernières factorisations, on trouve des formules de factorisation pour $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$

Linéarisation

A l'aide des formules d'Euler et du binôme de Newton, on peut transformer une expression du type $\cos(t)^n$ ou $\sin(t)^n$ avec t réel et n entier naturel en une combinaison linéaire de $\cos(pt)$ ou de $\sin(pt)$ avec p un entier naturel. Cela est notamment utile pour du calcul de primitives.

Exercice/Exemple 4.15

Soit $f(x) = (\sin(x))^3$ avec $x \in \mathbb{R}$. Calculer la primitive de f

Correction 4.16

$$\begin{aligned} (\sin(x))^3 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{1}{-8i} \left(e^{3ix} + 3(e^{-ix}) - 3(e^{ix}) - e^{-3ix} \right) \\ &= \frac{1}{-4} \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) \end{aligned}$$

Donc $F_\lambda(x) = \frac{1}{12} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(x) + \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

Définition/Propriétés 4.17 (Formule de Moivre)

Pour tout nombre réel t et tout entier relatif n , on a $e^{int} = (e^{it})^n$, c'est-à-dire :

$$\cos(nt) + i \sin(nt) = (\cos(t) + i \sin(t))^n$$

Démonstration 4.18 (Moivre par récurrence)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ Montrons que $\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $e^{int} = (e^{it})^n$

On note $P(n)$ la Propriété « $e^{int} = (e^{it})^n$ »

- Initialisation : $P(0)$ est vrai car $\begin{cases} (e^{it})^0 &= 1 \\ e^{i \cdot 0} &= 1 \end{cases}$
- Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vrai, Montrons que $P(n+1)$ est vrai :

$$\begin{aligned} e^{i(n+1)t} &= e^{i(n+1)t} \\ &= e^{int} \times e^{it} \\ &= (e^{it})^n \times e^{it} \\ &= (e^{it})^{n+1} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ Vrai. ■

Application 4.19 (Applications usuelles importantes)

Soit $C = \sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $S = \sum_{k=0}^n \sin(kt)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$

On Obtient des expressions simplifiées des sommes C et S par le calcul annexe suivant

$$C + iS = \sum_{k=0}^n e^{ikt} = \sum_{k=0}^n (e^{it})^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } t \equiv 0 [2\pi] \\ \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} & \text{sinon} \end{cases}$$

qui donne

$$C + iS = \begin{cases} n+1 & \text{si } t \equiv 0 [2\pi] \\ \frac{(1 - e^{i(n+1)t})(1 - e^{it})}{2(1 - \cos(t))} & \text{sinon} \end{cases}$$

On conclut alors sur les valeurs de C et S en exhibant les parties réelle et imaginaire de $C + iS$.

4.5 Forme trigonométrique pour les nombres complexes non nuls

Définition/Propriétés 4.20

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme

$$z = r e^{i\theta}$$

avec r un réel strictement positif et θ un réel. Cette écriture est dite forme trigonométrique de z .

Attention

Dans cette écriture de z .

- le réel strictement positif r est unique car il est nécessairement égal à $|z|$
- le réel θ n'est pas unique car si le réel θ convient alors les réels $\theta' \equiv \theta [2\pi]$ conviennent.

Démonstration 4.21

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors $|z| \neq 0$ donc $\frac{z}{|z|}$ existe avec $\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{||z||} = \frac{|z|}{|z|} = 1$

Donc $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \iff z = |z| e^{i\theta}$

Ceci prouve l'existence de l'écriture.

r est unique car : $\begin{cases} z = r e^{i\theta} \\ z = r' e^{i\theta} \end{cases} \implies \begin{cases} |z| = r \\ |z| = r' \end{cases} \implies r = r'$ ■

Définition/Propriétés 4.22 (Arguments)

Soit z un nombre complexe non nul. Tous les nombres réels θ tels que z peut s'écrire

$$z = r e^{i\theta}$$

avec r réel strictement positif sont dits arguments de z

Remarque

Si θ est un argument de z complexe non nul, on peut écrire $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

Propriétés 4.23

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' , on a :

$$(1) \arg(z z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$(2) \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

Définition/Propriétés 4.24 (Transformation de $a \cos(t) + b \sin(t)$ en $A \cos(t - \varphi)$)

Soit a, b et t des nombres réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On peut écrire

$$a \cos(t) + b \sin(t) = \operatorname{Re}((a - ib)(\cos(t) + i \sin(t))) = \operatorname{Re}((a - ib)e^{it})$$

puis $a - ib = Ae^{-i\varphi}$ avec A réel strictement positif et φ un réel ce qui donne :

$$a \cos(t) + b \sin(t) = \operatorname{Re}((a - ib)e^{it}) = \operatorname{Re}(Ae^{i(t-\varphi)})$$

Donc $a \cos(t) + b \sin(t) = A \cos(t - \varphi)$

4.6 Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes

Définition 4.25

Une fonction de variable réelle à valeurs complexes notée f est un objet mathématique qui, tout élément x d'une partie non vide de \mathbb{R} , associe un et un seul nombre complexes noté $f(x)$.

Définition/Propriétés 4.26 (Ce qui s'étend aux fonctions de variable réelle à valeurs complexes)

- Notation fonctionnelle
- Domaine de définition
- Image d'un réel, antécédent d'un complexe
- Parité, imparité, périodicité
- Somme, produit, quotient de fonctions et multiplication d'une fonction par un complexe
- Dérivation

Définition/Propriétés 4.27 (Ce qui ne s'étend pas aux fonctions de variable réelle à valeurs complexes)

- Composition de fonctions
- Monotonie
- Fonction majorée, minorée ou bornée
- Fonction réciproque

Définition/Propriétés 4.28 (Dérivation)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point. Soit f une fonction définie sur I à valeurs complexes.

On note $\operatorname{Re}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles définies par :

$$\forall x \in I, (\operatorname{Re}(f))(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \text{ et } (\operatorname{Im}(f))(x) = \operatorname{Im}(f(x))$$

On dit que :

- f est dérivable en x_0 si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables en x_0
- f est dérivable sur I si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables sur I

Selon le cas de figure, on appelle :

- nombre dérivée de f en x_0 et on note $f'(x_0)$ le nombre complexe suivant :

$$f'(x_0) = (\operatorname{Re}(f))'(x_0) + i(\operatorname{Im}(f))'(x_0)$$

- fonction dérivée de f sur I et on note f' la fonction de variable réelle à valeurs complexes suivante :

$$f' = (\operatorname{Re}(f))' + i(\operatorname{Im}(f))'$$

Propriétés 4.29

(1) Combinaison linéaire

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs complexes et (α, β) un couple de complexes.

Si f et g sont dérivables sur I alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

(2) Produit

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs complexes. Si f et g sont dérivables sur I alors fg est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(3) Quotient

Soit f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs complexes tel que g ne s'annule pas sur I .

Si f et g sont dérivables sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Application 4.30 (exemple important)

Soit φ une fonction définie sur I à valeurs complexes. On note $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie sur I par :

$$\forall t \in I, f(t) = e^{\operatorname{Re}(\varphi(t))} e^{i \operatorname{Im}(\varphi(t))}$$

Si φ est dérivable sur I alors f est dérivable sur I et sa dérivée vérifie :

$$\forall t \in I, f'(t) = \varphi'(t)f(t)$$

Remarque

La fonction f sera aussi notée $f = \exp(\varphi)$ après étude de l'exponentielle complexe dans le chapitre « Nombres complexes (2) » ce qui permettra d'écrire $(\exp(\varphi))' = \varphi' \exp(\varphi)$ et donc d'étendre une propriété déjà connue dans le cas où φ est à valeurs réelles.