TP6: Commande LQ

09 & 12 mars 2021

Objectifs

Commande par retour d'état. Commande LQ.

Prérequis

Représentation d'état: Åström and Murray: § 2.2 et la Fiche 1.

Stabilité: Åström and Murray: § 4.3, théorème 4.1 et les Fiches 3 et 13.

Commandabilité et observabilité: Åström and Murray: § 6.1 et 7.1 et la Fiche 2.

Fonctions de transfert: Åström and Murray: § 8 et la Fiche 3.

Boucle fermée: Fiche 8.

Commande LQ: Fiche 25.

Exercices

Exercice 1. Application de la commande LQ au pendule inversé

Question 1: Voir TP3 et TP5.

Question 2: Choisir $Q_x = C^\top C$ et $Q_u = \alpha$.

Question 3: On obtient:

α	k_1	k_2
$1e^{-4}$	101	16.7
$1e^{-3}$	32.6	8.23
$1e^{-2}$	11	3.82
$1e^{-1}$	4.3	1.8
1	2.38	1.08

(1)

Au plus α est grand, au plus on pénalise la norme de l'entrée $u(t)$. Il est donc logique de voir la norme du vecteur K, tel que $u(t) = u_0 - Kx(t)$, décroître lorsque α augmente.

Question 4: Les pôles du système en boucle fermée, pour les différentes valeurs de α, sont:

α	p_1	p_2
$1e^{-4}$	$-5+4.8i$	$-5-4.8i$
$1e^{-3}$	$-3+2.6i$	$-3-2.6i$
$1e^{-2}$	$-1.9+1.1i$	$-1.9-1.1i$
$1e^{-1}$	-0.7944	-2.033
1	-0.3164	-2.1597

(2)

On vérifie donc bien que le système avec retour d'état est stable (garanti par la théorie).

Question 5: Voir figure 1.

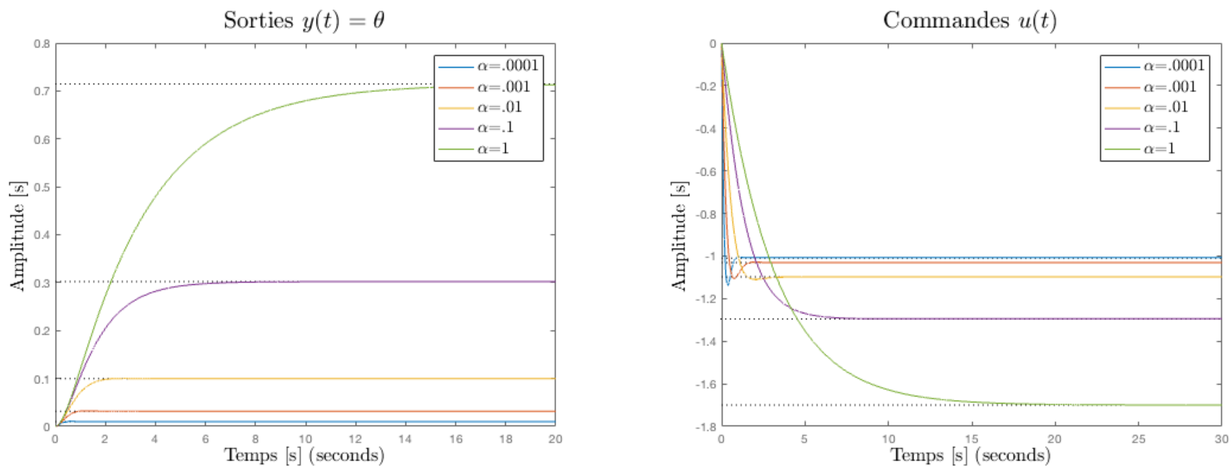

Figure 1 – Réponse indicielle (gauche) du système avec retour d'état et les commandes associées (droite), pour les différentes valeurs de K obtenues à la question 3.

Exercice 2. Application de la commande LQ au bioréacteur

Question 1: Choisir $Q_x = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q_u = 1$.

Question 2: On obtient $K = \begin{pmatrix} 28.0265 & -4.2361 \end{pmatrix}$.

Question 3: Les pôles sont $p_1 = -1.194$, $p_2 = -0.094$. Le système est donc bien stable, comme le garantit la théorie.

Exercice 3. (Résolution analytique de l'équation de Ricatti pour un système simple)

Question 1: Le système est stable, commandable et observable.

Question 2: Choisir $Q_x = C^\top C$ et $Q_u = \alpha$.

Question 3: L'équation algébrique de Riccati est donnée par

$$A^\top P + PA - PBQ_u^{-1}B^\top P + Q_x = 0,$$

où $Q_u = \alpha > 0$, $Q_x = C^\top C$, et la solution est

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix} > 0.$$

Après calculs, on obtient

$$P = \begin{pmatrix} \alpha - p_2^2 & \alpha(p_1 - p_2) - p_2 p_3 \\ \alpha(p_1 - p_2) - p_2 p_3 & 2\alpha(p_2 - p_3) - p_3^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Donc, les éléments de P satisfont les relations suivantes:

$$\alpha - p_2^2 = 0$$
$$\alpha(p_1 - p_2) - p_2 p_3 = 0$$
$$2\alpha(p_2 - p_3) - p_3^2 = 0$$

Si l'on considère uniquement les solutions positives, il resulte que

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha}} & \sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & \alpha\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{\alpha}}} - \alpha \end{pmatrix}.$$

Question 4: Le gain de retour d'état K est défini par la relation

$$K = Q_u^{-1} B^\top P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} & \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{\alpha}}} - 1 \end{pmatrix},$$

et les pôles en boucle fermée sont

$$\begin{aligned} &\text{si } 0 < \alpha < 4 : && s_{1,2} = \frac{-\sqrt{1+2\alpha^{-1/2}} \pm \sqrt{-1+2\alpha^{-1/2}}\, i}{2} \\ &\text{si } \alpha = 4 : && s_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\text{si } \alpha > 4 : && s_{1,2} = \frac{-\sqrt{1+2\alpha^{-1/2}} \pm \sqrt{1-2\alpha^{-1/2}}}{2} \end{aligned}$$

Question 5: Pour $\alpha = 4$, on a

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4142136 \end{pmatrix},$$

et les pôles sont tous deux situés en

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq -0.7071.$$

Problèmes

Problème 1. Commande LQ avec action intégrale

Question 1: On obtient:

$$G_{eq}(s) = \frac{1}{s^2 + s(1+k_2) + k_1},$$

et

$$T_r(s) = \frac{k_i}{s^3 + s^2(1+k_2) + k_1 s + k_i}.$$

Question 2: Il suffit de prendre $R = (C, 0)^\top$.

Question 3: La représentation d'état du système augmenté est

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_{\text{aug}}\tilde{x} + B_{\text{aug}} u + D_{\text{aug}} v \\ y &= C_{\text{aug}} \tilde{x}, \end{aligned}$$

avec

$$A_{\text{aug}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{\text{aug}} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D_{\text{aug}} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_{\text{aug}} = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 4: On obtient:

$$G_{eq}(s) = \frac{s}{s^3 + s^2(1+k_2) + s k_1 + k_i}.$$

Si l'on multiplie cette fonction de transfert équivalente par la fonction de transfert entre r et $\tilde{u}_0$, on retombe sur la fonction de transfert $T_r(s)$ obtenue à la question 1.

Question 5: On obtient $K = \begin{pmatrix} 4.69 & 1.93 \end{pmatrix}$ et $k_i = 1$.

Question 7: On obtient $K = \begin{pmatrix} 30.49 & -10.05 \end{pmatrix}$ et $k_i = -1$.

Question 8: Voir Figure 2

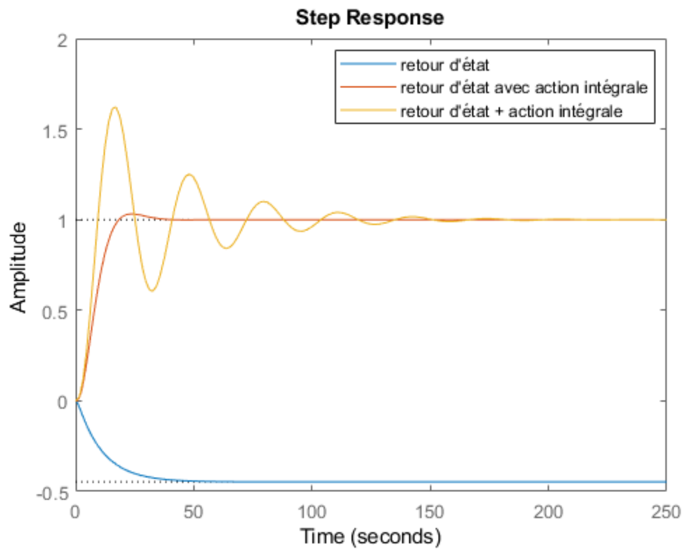

Figure 2 – Réponse indicielle du système commandé avec retour d'état, retour d'état avec action intégrale optimale et retour d'état et action intégrale indépendante