

Rapport de laboratoire 1 - Control of a water level in a tank

Baptiste Sambon - Eliott Van Dieren

1 Calibration - Etalonnage

- A quoi sert l'étalonnage/la calibration ? Que se passe-t-il si nous n'en faisons pas ?
L'étalonnage permet de calibrer le système de mesure du niveau d'eau (basé sur un système de mesure d'une différence de pression) et le débit d'eau de la pompe. Avec l'étalonnage on calcule ainsi un coefficient de proportionnalité qui ajuste le débit de la pompe, un coefficient de proportionnalité qui mesure la hauteur h_3 et un offset pour corriger la mesure de h_3 . Si on ne fait pas d'étalonnage, il y aura un décalage entre la mesure réelle du système et la mesure effectuée par le système.
- Est-ce qu'un mauvais étalonnage influence la performance ou la stabilité du système ?
Oui car la mesure du niveau d'eau divergera de la mesure réelle et ainsi, le niveau d'eau à atteindre ne sera pas respecté. Pour la stabilité, le système va se stabiliser mais à une hauteur qui ne correspond pas à la hauteur réelle du système voulue.
- Est-ce que toutes les corrections de calibration sont proportionnelles ?
Non, il y a aussi un offset pour calibrer la mesure de la hauteur h_3 .

2 Système en boucle ouverte

Tout d'abord, rappelons le modèle non-linéaire (équations de Bernoulli de conservation d'énergie) utilisé qui représente le système :

$$\begin{aligned} \text{Equation continue : } \frac{dh_3}{dt} &= \frac{1}{S_R} q_{P3} - \frac{1}{S_R} (q_{F30} + q_{S30}) \quad (1) \\ \text{Loi de Toricelli : } q_{F30} &= S_{F30} \sqrt{2gh_3} \text{ et } q_{S30} = S_{S30} \sqrt{2gh_3} \quad (2) \end{aligned}$$

Ce modèle est non-linéaire car $\frac{dh_3}{dt}$ dépend de $\sqrt{h_3}$.

2.1 Calcul de S_{S30}

Après avoir fixé le débit de la pompe à $q_{P3} = u_0 = 40 \text{ ml.s}^{-1}$ (40 au lieu de 30 car la pompe que l'on a utilisée est moins bonne) et après avoir mesuré le niveau \bar{h}_3 , il est possible de calculer S_{S30} grâce à :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{h}_3}{dt} &= \frac{1}{S_R} q_{\bar{P}3} - \frac{1}{S_R} (S_{F30} \sqrt{2g\bar{h}_3} + S_{S30} \sqrt{2g\bar{h}_3}) = 0 \text{ car à l'équilibre} \\ \Leftrightarrow S_{S30} &= \frac{q_{\bar{F}30}}{\sqrt{2g\bar{h}_3}} = \frac{q_{\bar{P}3}}{\sqrt{2g\bar{h}_3}} \end{aligned}$$

puisque dans cette configuration, nous avons $q_{F30} = q_{S23} = 0 \text{ ml.s}^{-1}$ (puisque la valve V_{F30} est tout d'abord fermée, $S_{F30} = 0 \text{ cm}^2$) et donc : $q_{\bar{F}30} = q_{\bar{P}3}$. Ici : $\bar{h}_3 = 22 \text{ cm}$ donc : $S_{S30} = 0.1925 \text{ cm}^2$.

2.2 Calculs de $G(s)$ et de $H(s)$

Nous pouvons alors approximer ce modèle non-linéaire par un modèle linéaire en utilisant le développement en série de Taylor. En posant :

$$\begin{cases} y = h_3 \text{ et } \tilde{y} = h_3 - \bar{h}_3 \\ u = q_{P3} \text{ et } \tilde{u} = q_{P3} - q_{\bar{P}3} \\ v = S_{F30} \text{ et } \tilde{v} = S_{F30} - S_{\bar{F}30} \end{cases}$$

L'équation non-linéaire devient alors :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{S_R}u - \frac{1}{S_R}(v\sqrt{2gy} + S_{S30}\sqrt{2gy}) = f(y, u, v)$$

Et en linéarisant :

$$\dot{\tilde{y}} = f(\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{y=\bar{y}, u=\bar{u}, v=\bar{v}}(y - \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{y=\bar{y}, u=\bar{u}, v=\bar{v}}(u - \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial v}|_{y=\bar{y}, u=\bar{u}, v=\bar{v}}(v - \bar{v}) = A\tilde{y} + B\tilde{u} + D\tilde{v}$$

car $f(\bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) = 0$ puisque nous sommes à l'équilibre. Rappelons que : $\bar{y} = \bar{h}_3$ (mesuré), $\bar{u} = q_{\bar{P}3} = u_0$, $\bar{v} = S_{F30} = 0 \text{ cm}^2$ et donc que :

$$\begin{cases} A = \frac{\partial f}{\partial y}|_{y=\bar{y}, u=\bar{u}, v=\bar{v}} = -\frac{1}{S_R}(S_{S30}\sqrt{2g}\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}} + v\sqrt{2g}\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}) = -\frac{S_{S30}}{S_R}\sqrt{2g}\frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_3}} = -0.0211 \text{ s}^{-1} \\ B = \frac{\partial f}{\partial u}|_{y=\bar{y}, u=\bar{u}, v=\bar{v}} = \frac{1}{S_R} = 0.0233 \text{ cm}^{-2} \\ D = \frac{\partial f}{\partial v}|_{y=\bar{y}, u=\bar{u}, v=\bar{v}} = -\frac{1}{S_R}\sqrt{2g\bar{h}_3} = -4.8316 \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

Nous pouvons donc calculer les fonctions de transfert suivantes :

$$\begin{cases} G(s) = (sI - A)^{-1}B = \frac{B}{s-A} \\ H(s) = (sI - A)^{-1}D = \frac{D}{s-A} \end{cases}$$

De sorte que : $y(s) = G(s)u(s) + H(s)v(s)$ (+ voir slides de théorie 7 à 11 pour plus de détails ; notons qu'ici $C = 1$ puisque $x = y$).

Remarquons qu'il s'agit de fonctions de transfert d'ordre 1. Il s'agit de fonctions de transfert du Premier Ordre. Il n'y a donc pas d' "overshoot" et il s'agit d'un système stable (voir "Notice générale pour les labos et les TPs", section 4).

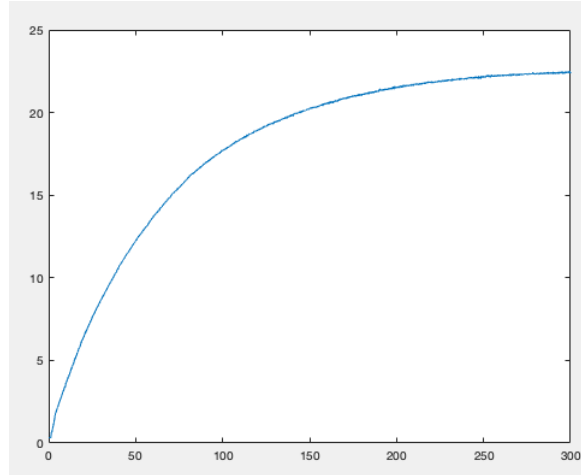


FIGURE 1 – Open-Loop - $u_0 = 40ml/s$

3 Système en boucle fermée

En boucle fermée, la situation peut se représenter comme suit :

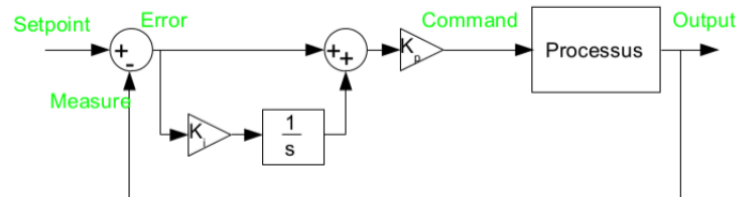


FIGURE 2 – Schéma blocs du système en boucle fermée avec un controller PI

En comparaison avec cette figure ci-dessous (voir slides de théorie 17 à 21), nous avons donc que $C(s) = (1 + \frac{K_i}{s})K_p$:

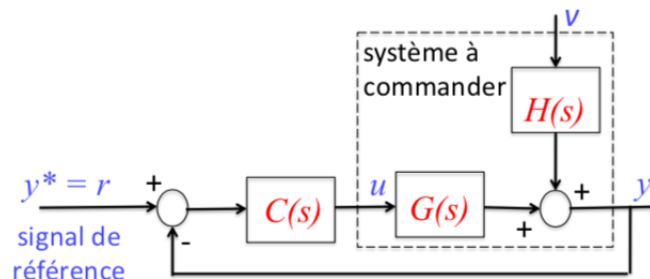


FIGURE 3 – Schéma blocs d'un système en boucle fermée

Autrement dit :

$$\begin{cases} (r \rightarrow y) \ G_1(s) = T_r(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{BK_p(s+K_i)}{s(s-A)+(s+K_i)K_pB} \\ (v \rightarrow y) \ G_2(s) = T_v(s) = \frac{H(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{Ds}{s(s-A)+(s+K_i)K_pB} \end{cases}$$

4 Réponse du système à une perturbation

Dans cette section, la valve V_{F30} est ouverte, créant ainsi une perturbation v correspondant à un step de perturbation. Nous avons donc que $v(s) = \frac{V}{s}$ dans le domaine de Laplace. On peut donc modéliser la réponse du système à une perturbation v par $Y(s) = T_v(s)v(s)$. En développant les expressions, on obtient :

$$Y(s) = \frac{DV}{s(s-A)+(s+K_i)K_pB}$$

Nous pouvons décliner cette fonction en deux formules, pour les différents cas de K_i étudiés (= ou $\neq 0$).

Si $K_i = 0$,

On a $Y(s) = \frac{DV}{s(s-A)+sK_pB} = \frac{\alpha}{s-A+K_pB} + \frac{\beta}{s}$ où $\alpha = \frac{DV}{A-K_pB}$ et $\beta = \frac{DV}{K_pB-A}$. En repassant dans le domaine temporel, nous obtenons :

$$y(t) = \left(\frac{DV}{A-K_pB} e^{(A-K_pB)t} + \frac{DV}{K_pB-A} u(t) \right) \text{ où } u(t) \text{ est la fonction échelon.}$$

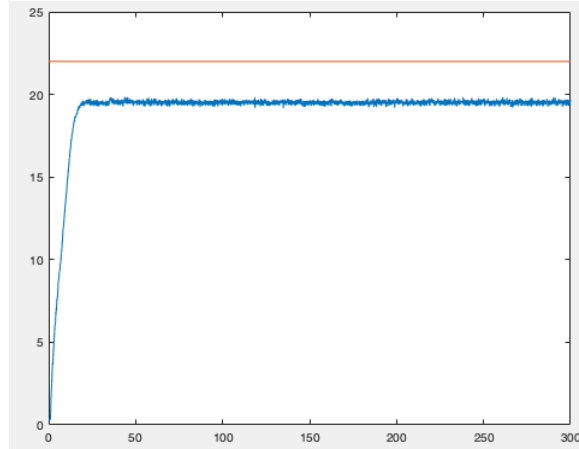


FIGURE 4 – Closed-Loop - Perturbation - $k_i = 0$

Nous pouvons remarquer qu'avec une perturbation, il subsiste une erreur statique. En effet, le système ne va pas atteindre la consigne voulue car l'action proportionnelle seule n'est pas capable d'éliminer l'erreur de commande en régime permanent et que c'est bien l'action intégrale qui permet d'absorber la variation de la perturbation.

Si $K_i \neq 0$,

On a $Y(s) = \frac{DV}{s^2+(K_pB-A)s+K_iK_pB}$. Nous savons que $L(ke^{-at}\sin(\omega t)) = k \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$. Par identification : $\frac{DV}{s^2+(K_pB-A)s+K_iK_pB} = \frac{k\omega}{s^2+2as+(a^2+\omega^2)}$

Pour trouver a , et k , il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} k\omega = DV \\ 2a = K_p B - A \\ a^2 + \omega^2 = K_i K_p B \end{cases}$$

On obtient $a = \frac{1}{2}(K_p B - A)$, $\omega = \sqrt{K_i K_p B - \frac{1}{4}(K_p B - A)^2}$ et $k = \frac{DV}{\sqrt{K_i K_p B - \frac{1}{4}(K_p B - A)^2}}$.

La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = \frac{DV}{\sqrt{K_i K_p B - \frac{1}{4}(K_p B - A)^2}} e^{\frac{1}{2}(K_p B - A)t} \sin(\sqrt{(K_i K_p B - \frac{1}{4}(K_p B - A)^2)t}) u(t)$$

4.1 Étude de la réponse

Nous sommes face à un système du second ordre (T_v est une fonction de transfert du second ordre). Pour étudier la réponse impulsionnelle d'un tel système, nous devons distinguer plusieurs cas et étudier les différents pôles de la fonction de transfert. Pour étudier ces pôles, nous pouvons déterminer les différents paramètres comme suit par identification sur base du dénominateur de T_v dont on veut étudier la réponse impulsionnelle :

$$s^2 + (K_p B - A)s + K_i K_p B = s^2 + 2\zeta\omega_n + (\omega_n)^2$$

On trouve alors :

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{K_p K_i B} \\ \zeta = \frac{K_p B - A}{2\sqrt{K_i K_p B}} \end{cases}$$

Nous pouvons distinguer trois cas :

- $\zeta > 1$: 2 pôles réels :
 - Système stable
 - Pas d'overshoot
 - Temps de réponse d'autant plus grand que ζ est grand
 - Temps de réponse : $t_R = \frac{4}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$
- $\zeta = 1$: 1 pôle double réel :
 - Même chose qu'avec $\zeta > 1$ mais avec un temps de réponse plus petit
- $\zeta < 1$: 2 pôles complexes conjugués
 - La réponse est OSCILLATOIRE avec une fréquence égale à : $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
 - La réponse est amortie si $\zeta > 0$ et purement oscillatoire si $\zeta = 0$ (sans amortissement)
 - Avec de l'overshoot
 - Premier overshoot en : $t_D = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$ et sa valeur vaut : $D = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$ (la valeur de l'overshoot ne dépend que de ζ et est d'autant plus petit que ζ est grand (se rapproche d'un système à deux pôles))

- Le temps de réponse est d'autant plus petit que ζ est grand et vaut : $t_R = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

Remarquons que plus K_p est grand (pour un même K_i), plus ζ sera grand et donc plus le temps de réponse sera petit. Par contre, pour un même K_p , plus K_i est grand, plus ζ sera petit (donc temps de réponse plus grand et davantage d'oscillations). Par contre, si $K_i = 0$, nous avons une erreur de commande (on ne converge pas vers la consigne). Un K_i non nul (une action intégrale) permet d'absorber la variation de la perturbation.

4.1.1 $(K_P, K_I) = (3, 1)$

Dans ce cas-ci, nous avons que : $\zeta = 0.1549$. Nous sommes donc face à un système avec deux pôles conjugués complexes qui peuvent être représentés dans le plan complexe suivant (sous forme de croix) :

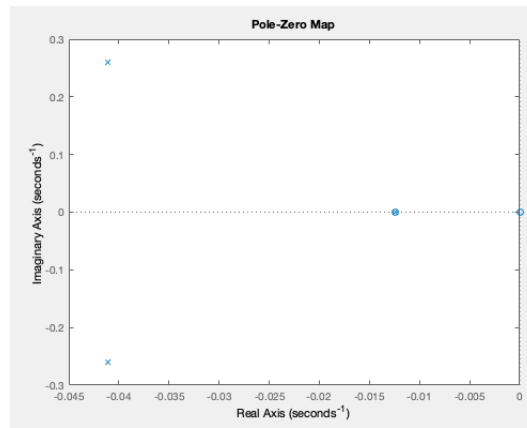


FIGURE 5 – Pôles de la fonction de transfert T_v pour $(K_P, K_I) = (3, 1)$

Nous pouvons voir que le système est stable (pôles à partie réelle négative). Nous savons également que le système aura tendance à osciller et que nous aurons la présence d'overshoot.

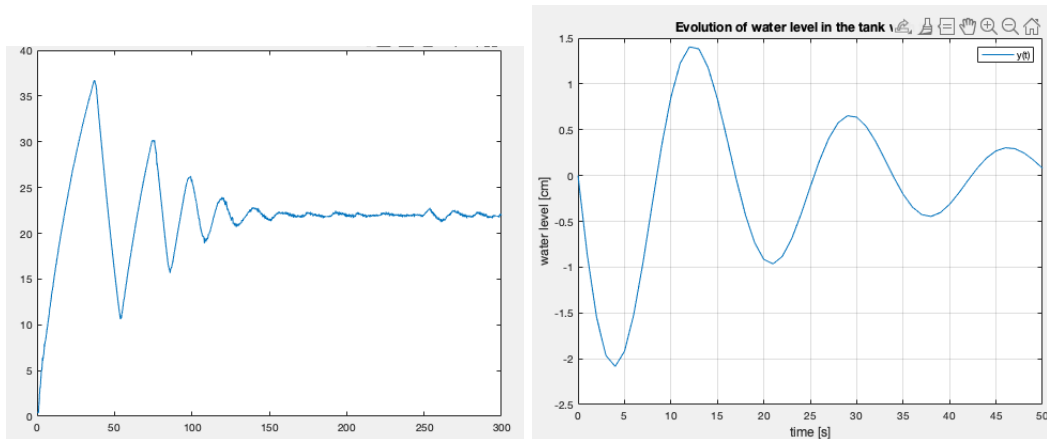


FIGURE 6 – Closed-Loop - Perturbation

4.1.2 $(K_P; K_I) = (10; 0.1)$

Dans ce cas, nous avons que : $\zeta = 0.8$. Nous sommes donc face à un système avec deux pôles conjugués complexes qui peuvent être représentés dans le plan complexe suivant (sous forme de croix) :

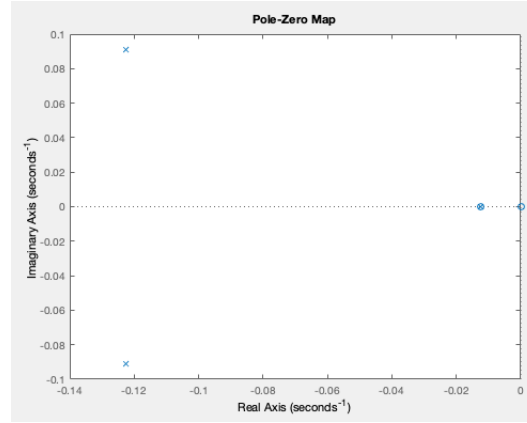


FIGURE 7 – Pôles de la fonction de transfert T_v pour $(K_P, K_I) = (10, 0.1)$

Remarquons que le système est également stable et que la partie imaginaire des pôles est moins grande que précédemment. Nous pouvons remarquer que le ζ calculé ici est plus grand que le ζ calculé au point précédent. Par la propriété de la fonction de transfert avec un $\zeta < 1$, nous pouvons d'ores et déjà dire que l'overshoot sera plus petit dans ce cas-ci et que le temps de réponse sera plus court par rapport au cas précédent.

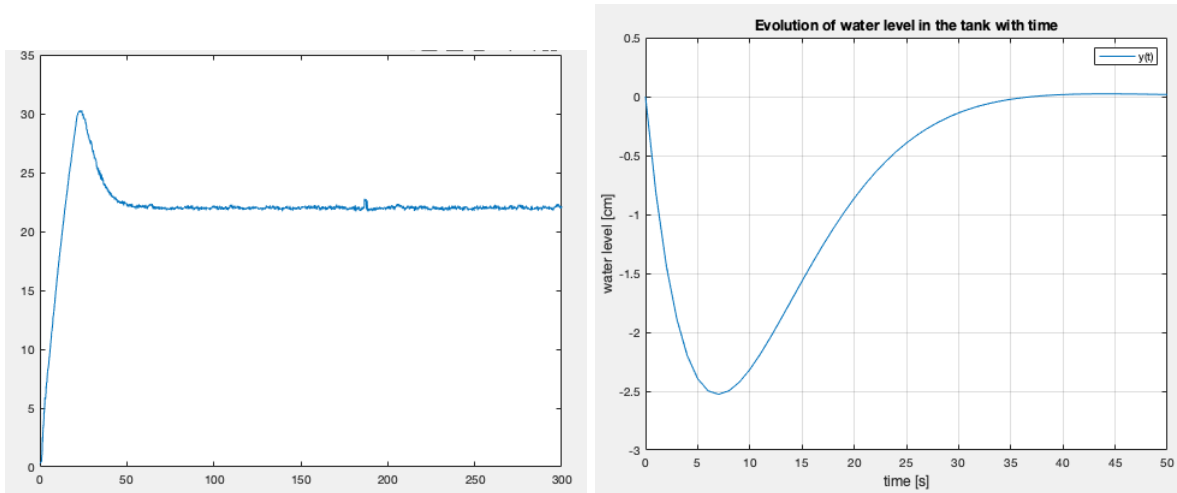


FIGURE 8 – Closed-Loop - Perturbation

5 Réponse du système à un step

Tout comme le point précédent, nous pouvons passer dans le domaine de Laplace et trouver que $Y(s) = T_r(s)R(s)$ où $R(s)$ est

En développant l'égalité précédente, on obtient :

$$Y(s) = \frac{BK_p(s+K_i)}{s(s-A)+(s+K_i)K_pB}R(s)$$

Nous ne souhaitons aucun overshoot, cela nous oblige donc à avoir une fonction de transfert $T_r(s)$ d'ordre 1. Nous devons donc poser $\boxed{K_i = -A}$ afin qu'une annulation pôle-zéro ait lieu. Nous obtenons donc une version simplifiée de $T_r(s)$:

$$T_r(s) = \frac{BK_p}{s+K_pB} = \frac{1}{1+\frac{s}{BK_p}}$$

La deuxième contrainte qui nous est posée s'applique sur le temps de contrôle en boucle fermée τ_f soit trois fois plus rapide que celui en boucle ouverte τ_o . Nous savons que $\tau_o = \frac{-1}{A}$ et que $\tau_f = \frac{1}{BK_p}$. Puisque nous voulons une réponse trois fois plus rapide en boucle fermée, qu'en boucle ouverte, nous pouvons déterminer que :

$$\tau_o = 3\tau_f \Leftrightarrow \boxed{K_p = \frac{-3A}{B}}$$

Nous pouvons donc décomposer $Y(s) = \frac{BK_pR}{(s+K_pB)s}$ en fractions simples telles que : $Y(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+K_pB}$ avec $\alpha = R$ et $\beta = -R$. Finalement, on trouve dans le domaine temporel :

$$\boxed{y(t) = R(1 - e^{-K_pBt})u(t)}$$

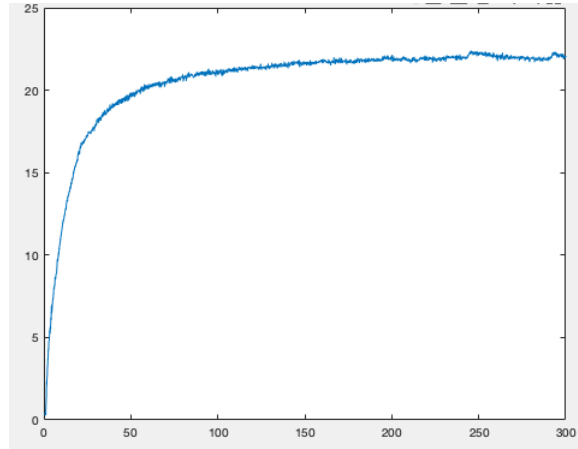


FIGURE 9 – Closed-Loop - Consigne

6 Réponse aux questions

- Est-ce qu'une mauvaise calibration influence sur la stabilité du système ?
Le système va se stabiliser mais pas forcément à la hauteur voulue.
- Est-ce qu'une mauvaise calibration influence sur la performance du système en boucle fermée ?
Oui, contre-exemple : pour passer à une fonction de transfert du premier ordre pour ne pas avoir d'overshoot, on calcule K_p et K_i en lien avec la hauteur \bar{h}_3 . Ainsi, si celle-ci n'est pas bien mesurée, les K_p et K_i calculés seront erronés et convergeront vers la "fausse" valeur lue. Cela va se stabiliser vers la hauteur mal calibrée.
- Est-ce que toutes les corrections de calibration sont proportionnelles ?
Non, il y a aussi un offset pour calibrer la mesure de la hauteur h_3 .
- Quelle réponse pour un échelon de consigne en boucle ouverte ?
Voir graphe.
- Si on nous donne le graphe de la réponse en boucle ouverte sans rien connaître du système quelle conclusion ?
Il s'agit d'une fonction de transfert du premier ordre (car pas d'overshoot et courbe caractéristique). Pas fonction de transfert du deuxième ordre avec $\zeta > 1$ car pas de point d'inflexion.
- A system modelled by a first order transfer function (with $\text{Re}(\text{pole}) < 0$) is always stable ?
Vrai.
- The physics of the pump is entirely described by the nonlinear differential equation set ?
Non car ne prend pas en compte certaines perturbations comme la dilatation des tuyaux par exemple.
- Soit un premier système régulé avec certains paramètres K_p et K_i . Si on linéarise autour d'un autre point d'équilibre, on obtient un autre système. Si on régule ce système avec les mêmes paramètres que le premier système, est-ce qu'il y aura une erreur statique ?
Non sauf si $K_i = 0$. Car on arrivera à la même consigne mais les performances du système seront potentiellement impactés car les k_i et K_p seront déterminés pour un équilibre différent.
- Consider you have a conical tank (instead of cylindrical), with for the same feed rate in openloop (u_0), has the same water level (h_3). If at h_3 , the surface of the tank S_3 is equal of 43cm^2 , is the (linearized) transfer function the same as the one used for the lab ?
Cela ne change rien dans les équations. C'est juste le volume qui change.
- Does the value of the lateral valve surface you found by calculation change with the values of the equilibrium point ?
Oui, voir la formule qui dépend du débit à l'équilibre et de la hauteur h_3 à l'équilibre (\bar{h}_3).
- Soit un système régulé avec K_p et K_i . Si on augmente K_i , qu'est-ce que ça change ?
Augmenter K_i augmente l'effet de l'intégrateur et il implique sur le système l'apparition d'oscillations. En fait l'intégrateur va intégrer davantage l'erreur et il y aura un effet de retard qui fait que ça va osciller. Si k_i augmente, ζ diminue, donc temps de réponse augmente et overshoot plus grand.

- Que se passe-t-il si $k_i=0$?
Erreur statique lorsqu'il y a une perturbation car l'erreur n'est pas absorbée par l'action intégrale.
- un échelon de 3 cm et un de 10 cm : réponses n'ont pas la même allure pq ? temps de réponse différent dû aux non linéarités.
- Is a zero-pole cancellation control design appropriate if the real system does not correspond accurately with the transfer function model ?
Pas approprié car si le k_i trouvé ne correspond pas au pôle réel, il n'y a pas d'annulation pôle-zéro et on reste avec une fonction du second ordre. Si pôle pas bien déterminé -> annulation pôle-zéro pas efficace.
- Quels sont les non-linéarités du système ?
Le système est non linéaire à la base car il y a la racine de h (Torricelli). La saturation de la pompe. En effet, elle ne peut fonctionner que dans la gamme $[0 ; 100\text{ml}]$ de débit. Le tuyau est une partie non linéaire du système. En effet, on a un retard entre la commande et la mesure dû au fait que l'eau n'est pas incompressible. Cette non linéarité reste cependant négligeable. La vanne car la section efficace de la vanne se réduit quand le débit augmente. Les capteurs sont des éléments non linéaires. Il faut imposer des échelons qui restent proches du point de fonctionnement à l'équilibre obtenu avec la linéarisation, sinon les équations utilisées ne sont plus valables.