TP6: Commande LQ

09 & 12 mars 2021

Objectifs

Commande par retour d'état. Commande LQ.

Prérequis

Représentation d'état: Åström and Murray: § 2.2 et la Fiche 1.

Stabilité: Åström and Murray: § 4.3, théorème 4.1 et les Fiches 3 et 13.

Commandabilité et observabilité: Åström and Murray: § 6.1 et 7.1 et la Fiche 2.

Fonctions de transfert: Åström and Murray: § 8 et la Fiche 3.

Boucle fermée: Fiche 8.

Commande LQ: Fiche 25.

Exercices

Exercice 1. Application de la commande LQ au pendule inversé

On considère le pendule inversé. Pour rappel, la représentation d'état du pendule autour de son point d'équilibre instable $(\theta^*, \dot{\theta}^*) = (0,0)$ associé à l'entrée constante $u^* = 0$ est:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

où

$$x = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \qquad u = F,$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J_t} & -\frac{\gamma}{J_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.48 & -1.95 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{l}{J_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.49 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans cet exercice, nous allons commander le système avec une commande par retour d'état (Figure 1), où les gains de corrections K sont les solution optimale d'un critère quadratique (commande LQ):

$$\min \int_0^\infty (y(t)^2 + \alpha u(t)^2) dt,$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$.

Question 1: Montrer que le système est instable, stabilisable et détectable (cf TP3 et TP5)

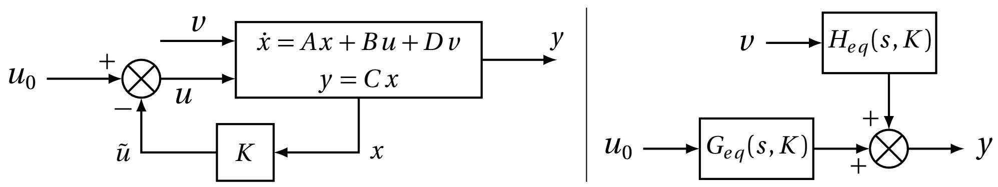

Figure 1 – Commande par retour d'état (gauche) – Fonctions de transfert équivalentes (droite)

Question 2: Donnez les expressions de Q_x et de Q_u telles que le critère à minimiser prenne la forme suivante :

$$\min \int_0^\infty (x^\top Q_x x + u^\top Q_u u) dt.$$

Question 3: *(Matlab)* Calculez le gain optimal K en utilisant la commande *lqr*(), en fonction du paramètre α. Considérez les valeurs $\alpha = 10^{-k}$, pour $k = 4, 3, ..., 0$. Comparez la norme des vecteurs obtenus.

Question 4: *(Matlab)* Pour chacune des valeurs de K obtenues à la question précédente, vérifier que le système avec retour d'état est stable, comme garanti par la théorie.

Question 5: *(Matlab)* Représentez la réponse indicielle du système avec retour d'état, pour les différentes valeurs de K obtenues à l'exercice précédent. Comparez les temps de réponse des sorties. En quoi sont-ils affectés par la valeur du paramètre α? Pourquoi?

Exercice 2. Application de la commande LQ au bioréacteur

Dans cet exercice, nous appliquerons la commande LQ au bioréacteur. Nous repartons du modèle linéarisé utilisé au TP précédent:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dv \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{2}$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} S - S^* \\ X - X^* \end{pmatrix}, \qquad u = S_{in} - S_{in}^*, \qquad v = \frac{q}{V} - \left(\frac{q}{V}\right)^*,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.0944 & -0.1700 \\ -0.5897 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0.0850 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 481.9104 \\ -240.9552 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous appliquerons dans cette question une commande LQ visant à minimiser le critère:

$$\min \int_0^\infty (5x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt.$$

Il a été vérifié aux TPs précédents que le système linéarisé est instable, commandable et observable autour de ce point d'équilibre (cf TP3 et TP5).

Question 1: Donnez les expressions de Q_x et de Q_u telles que le critère à minimiser se réécrive:

$$\min \int_0^\infty (x^\top Q_x x + u^\top Q_u u) dt.$$

Question 2: *(Matlab)* Calculez le gain optimal K en utilisant la commande *lqr*().

Question 3: Vérifiez que le système avec retour d'état est stable, comme garanti par la théorie.

Exercice 3. (Résolution analytique de l'équation de Ricatti pour un système simple)

Considérez le système suivant:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

On applique un retour d'état, comme représenté sur la Figure 1. Dans cet exercice, vous allez calculer le gain K de sorte à minimiser le critère suivant:

$$\min \int_0^\infty (y^2 + \alpha u^2) dt,$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$.

Question 1: Le système est-il stable? Commandable? Observable? Stabilisable? Détectable?

Question 2: Donner l'expression de Q_x et de Q_u telle que le critère à minimiser se réécrive:

$$\min \int_0^\infty (x^\top Q_x x + u^\top Q_u u) dt.$$

Question 3: Ecrivez l'équation de Riccati qu'il faudra résoudre pour obtenir la solution du problème de minimisation associé à la fonction de coût J. Résolvez de manière analytique l'équation algébrique de Riccati en fonction du paramètre α. Observez que dans cet exercice, la solution à l'équation algébrique de Riccati est une matrice 2×2 définie positive:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} = P^\top > 0.$$

Conservez uniquement les solutions positives de p_1, p_2 et p_3.

Question 4 : Trouvez le gain de retour d'état optimal K associé à la commande $u = -Kx$ et calculez les pôles en boucle fermée, c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice $(A - BK)$.

Question 5 : (*Matlab*) Pour $\alpha = 4$, calculez le gain de retour d'état K et vérifiez votre résultat avec la commande *Matlab* `lqr()`.

Problèmes

Problème 1. Commande LQ avec action intégrale

On souhaite dans ce problème combiner le retour d'état avec un retour de sortie unitaire associé à une action intégrale, comme illustré sur la Figure 2.

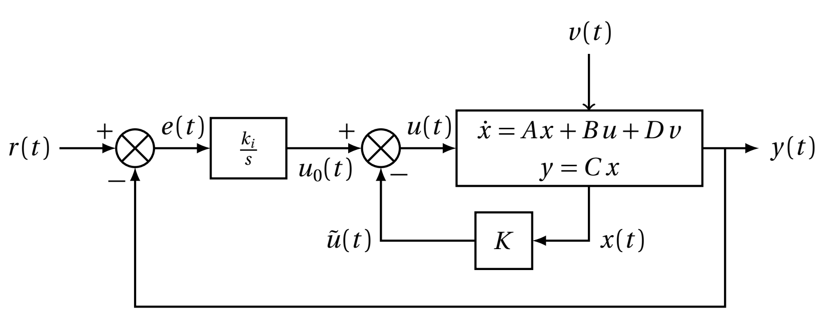

Figure 2 – Structure de rétroaction combinant retour unitaire de sortie, avec compensateur, et retour d'état.

Supposez que la représentation d'état de votre système est celle décrite à l'exercice 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Il n'y a donc pas de perturbation.) On notera aussi $K = (k_1 \quad k_2)$.

Question 1: Calculez la fonction de transfert équivalente, $G_{eq}(s)$, entre le signal $u_0(t)$ et la sortie $y(t)$ dans la Figure 2. Calculez ensuite la fonction de transfert en boucle fermée $T_r(s)$.

Notez que si vous concevez le retour d'état indépendemment de l'action intégrale (c'est à dire, choisir k_i de façon indépendante du gain de retour d'état K), les critères et propriétés d'optimalité de la commande LQ seront perdus. Vous allez utiliser ici autre approche, dans laquelle nous allons construire un système augmenté, composé de l'état x et d'un état supplémentaire, associé à l'intégrateur. Nous pourrons donc écrire la structure de rétroaction représentée en Figure 2 comme un retour d'état sur le système augmenté. Nous déterminerons les valeurs des paramètres k_i et K optimaux en appliquant la commande LQ au système augmenté.
En effet, observez que le système représenté à la Figure 2 peut être représenté comme sur la Figure 3, en définissant un nouvel état $q = y/s$.

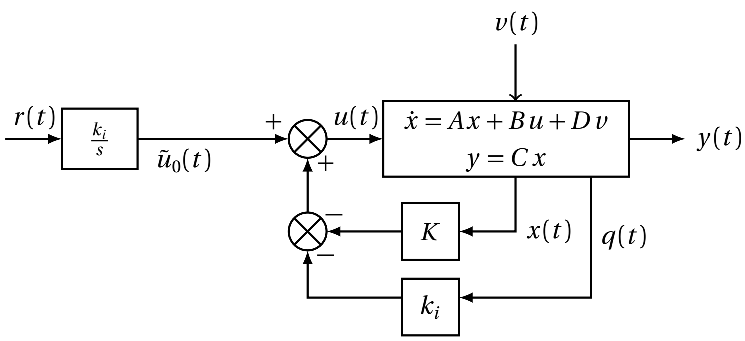

Figure 3 – Réécriture de la structure de rétroaction combinant retour unitaire de sortie, avec compensateur, et retour d'état.

Question 2 : On définit donc le vecteur d'état $\tilde{x} = (x,\ q)$, avec $q = y/s$. Trouvez le vecteur $R \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\dot{q} = R\tilde{x}$.

Question 3 : Fournissez une représentation d'état pour le système augmenté, ayant comme état $\tilde{x}$, comme entrée $\tilde{u}_0$ et comme sortie y, comme illustré sur la Figure 4, avec $K_{\text{aug}} = (k_1, k_2, k_i)$ le gain augmenté.

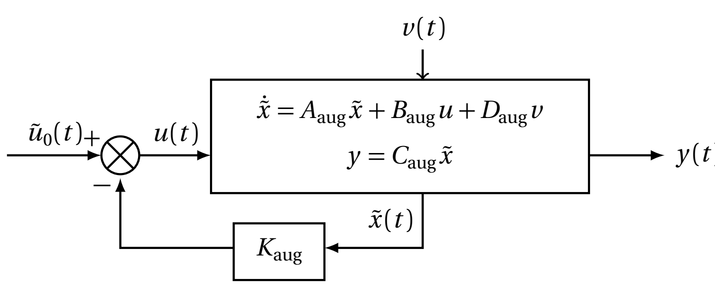

Figure 4 – Structure du système augmenté avec retour d'état.

Question 4: Calculez la fonction de transfert équivalente du système augmenté, et avec retour d'état, entre $\tilde{u}_0$ et y. Comparez votre solution avec la solution de la question 1. Les deux systèmes sont-ils bien équivalents?

Dans la suite de cet exercice, nous allons appliquer le raisonnement ci-dessus au pendule inversé et au bioréacteur. Une fois les systèmes sous forme augmentée, nous pourrons déduire les valeurs des paramètres K et k_i en appliquant la commande LQ au système augmenté.

Question 5: *(Matlab)* Mettez le système du pendule inverse considéré à l'exercice 1 sous forme augmentée. Déterminez les gains du retour d'état en appliquant une commande LQ visant à minimiser le critère:

$$\min \int_0^\infty (y^2(t) + u^2(t) + q^2(t))dt.$$

Question 6: *(Matlab)* Tracez la réponse indicielle du système en boucle fermée et comparez-la au cas où les gains du retour d'état et le paramètre de l'action intégrale ont été déterminés de manière indépendante.

Question 7: *(Matlab)* Mettez le système du bioréacteur de l'exercice 2 sous forme augmentée, et déterminez les gains du retour d'état en appliquant une commande LQ visant à minimiser le critère:

$$\min \int_0^\infty (5x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t) + q^2(t))dt.$$

Question 8: *(Matlab)* Tracez la réponse indicielle du système en boucle fermée et comparez-la au cas où les gains du retour d'état et le paramètre de l'action intégrale ont été déterminés de manière indépendante.