מד"רים

נתון קשר פונקציונלי בין נגזרות של פונקציה X, עלינו למצוא את הפונקציות שמקיימות אותו. כדי לקבל פתרון פרטי נצטרך אינפורמציה נוספת:

1) תנאי התחלה: הפונ' והנגזרת הראשונה בזמן כלשהו
2) תנאי שפה: ערכי הפונ' בשתי נקודות שונות

הגדרות

סדר-הנגזרת הגבוהה ביותר שמופיעה

מעלה-החזקה הגבוהה ביותר של הנגזרת הגבוהה ביותר (אחרי שכותבים את המש' כפולינום בפונ' ובנגזרותיה).

לינארית-בכל מחובר מופיעה לכל היותר הפונ' הנעלמה או אחת מנגזרותיה בחזקה ראשונה (לא כפולינומים, סינוסים וכו')

הומוגנית-מד"ר הומוגנית ממעלה K אם נכפול את הפתרון y בλ אז המשוואה כולה תוכפל ב-λ^k ולכן גם λy הוא פתרון.

מד"ר לינארית הומוגנית נראית כך: $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, $b(x) = 0$.

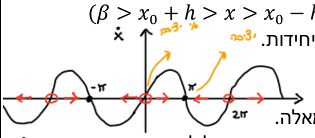
פתרון של משוואה לא הומוגנית ניתן לכתוב כסכום: $y = y_p + y_h$

אוטונומית-לא תלויה מפורשות במשתנה הב"ת

מד"ר מסדר ראשון $y' = f(x,y)$: נגזרת אחת->אינטגרציה אחת->תנאי התחלה אחד.

משפט הקיום והיחידות: אם f ו$\frac{df}{dy}$ רציפות במלבן נתון $(\beta > x > \alpha)$ הכולל את תנאי ההתחלה (x_0, y_0) אז ישנו $h > 0$ כך שבמרווח $(\beta > x_0 + h > x > x_0 - h > \alpha)$ קיים פתרון יחיד. רציפות f בלבד מבטיחה קיום, אבל לא יחידות.

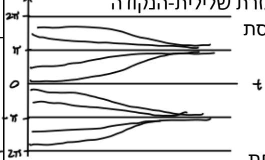
הפתרון הגרפי



נצייר את $\dot{x}$ כפונקציה של x. למשל: $\dot{x} = \sin(x)$

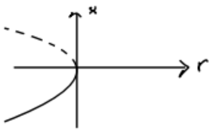
אם הנגזרת חיובית נצייר חץ ימינה, אם היא שלילית-שמאלה.

אם הנגזרת מתאפסת זו נקודת שבת. אם הזרימה כלפיה והנגזרת שלילית-הנקודה יציבה אם ממנה והנגזרת חיובית-לא יציבה. אם הנגזרת מתאפסת יש לבדוק נגזרות גבוהות יותר. הזמן לא מופיע בגרף הזה! אבל נוכל לדעת מה החלקיק יעשה כתלות בתנאי ההתחלה:



ביפורקציות: נקודות שבת יכולות להיווצר, להעלם או לשנות יציבות כתלות בפרמטרים. ביפורקציות אוכף:

לדוג' $\dot{x} = r + x^2$ $r < 0$ שתי נק' שבת, $r = 0$ נק' שבת אחת, $r > 0$ אין. נהוג לצייר את נק' השבת כפונקציה של r: הקו המקווקו מסמן מצב לא יציב. ביפורקציה טרנסקריטית: נק' השבת קיימת תמיד, אך משנה את יציבותה. למשל: $\dot{x} = rx - x^2$



פתרון אנליטי

בת הפרדה	אם ניתן לכתוב את המד"ר כ: $M(x)dx + N(y)dy = 0$ אז הפתרון הוא: $\int N(y)dy = -\int M(x)dx + c$
לינארית	אם ניתן לכתוב את המד"ר כ: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ אז הפתרון הוא: $\mu(x) = e^{\int p(x')dx'}$, $y(x) = \frac{1}{\mu(x)}[\int \mu(x')q(x')dx' + c]$
מקדמים הומוגניים מאותה המעלה (פונק' הומוגנית ממעלה n כש: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n(x,y)$	אם ניתן לכתוב את המד"ר כ: $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ אז הפתרון מתקבל ע"י הצבה והפרדת משתנים: $v = \frac{y}{x}, \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \to \ln\|x\| + c = \int \frac{dv}{f(v)-v}$
מדויקת (דיפרנציאל שלם של פונקציה קדומה)	אם מתקיים: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ כש$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ נסמן $M = \frac{\partial g}{\partial x}, \ N = \frac{\partial g}{\partial y}$ והפתרון יינתן ע"י: $g(x,y) = C$
הפיכה למדויקת ע"י גורם אינטגרציה	אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$ אז $\mu = e^{\int p(x)dx}$ ואם $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = q(y)$ אז $\mu = e^{\int q(y)dy}$. נכפול את המד"ר בגורם האינטגרציה ונמשיך לפתור מדר מדויקת
	מד"רים מהצורה $yM(x,y)dx + xN(x,y)dy = 0$ נפתרות ע"י הצבה $y = \frac{v}{x}$, $dy = \frac{xdv - vdx}{x^2}$
מקדמים לינאריים לא הומוגניים	$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ כל אחד מהמקדמים מגדיר ישר, הישרים נחתכים בנקודה (x_0, y_0)נחליף משתנים ל-$\bar{x} = x - x_0, \ \bar{y} = y - y_0$
הרחבה למקדמים פרבוליים	משוואות מהצורה: $(a_1x^2 + b_1y^2 + c_1)dx + (a_2x^2 + b_2y^2 + c_2)dy = 0$ נפתרות בהצבה $u = x^2, \ v = y^2$
משוואת ברנולי: $n \geq 2$	$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$ ניתנות לפתרון באמצעות ההצבה $u = y^{1-n}$

כל פתרון חשוב לבדוק! במקרה שהפתרון נתון בצורה סתומה, נגזור לפי המתשנה הבת"ל (ונזכור שy היא פונקציה של x)y דוגמא לגזירה:

$$\frac{d}{dx}(\ln|y| + y^2) = \frac{d}{dx}(sinx + C) \to \left(\frac{1}{y} + 2y\right) \cdot \frac{dy}{dx} = cosx$$

הערות:

במד"רים מסדר 1 אין אוסילציות

ניתן להגדיר פוטנציאל U: $\dot{x} = F(x) = -\frac{dU}{dx}$ החלקיק ינוע כלפי פוטנציאל נמוך יותר ולכן נקודת מינימום של U פירושה נקודת שבת.

מד"רים מסדר שני ומעלה

נגזרת שניה-> 2 קבועי אינטגרציה, 2 תנאי התחלה/שפה.

משפט: אם y_1 וy_2 הם פתרונות של $\ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0$ ויש נק' t_0 עבורה $w \neq 0$ אז משפ' הפתרונות $y = c_1y_1 + c_2y_2$ מהווה את אוסף הפתרונות הבסיסי של המשוואה- זאת אומרת שני הפתרונות שקבלנו בלתי תלויים

כש $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{vmatrix}$ וניתן למצוא אותו גם ע"י: $w = ce^{-\int p(t)dt}$ כאשר P הוא מקדם של הנגזרת ה$(n-1)$: עבור מד"ר מסדר שני הכוונה לנגזרת ראשונה. ו$C=W(0)$ הוורונצקיאן בנקודה $x=0$

y' וy חסרות	נעשה שתי אינטגרציות
Y חסרה	נעבור למשתנה חדש $v = y'$
X חסרה (מש' אוטונומית)	נעבור למשתנה $v = y' = \frac{dy}{dx}$ נכפול את שני האגפים ב-$\frac{1}{v} = \frac{dx}{dy}$
(*)מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$	נציב $y = e^{rt}$ נקבל את המשוואה האופיינית: $ar^2 + br + c = 0$ צורת הפתרון תלויה בr אותו קבלנו.
הומוגנית עבור y ונגזרותיה: $f(x, \lambda y, \lambda y') = \lambda^k f(x,y,y')$	נציב $y = e^u$, כאשר u פונקציה של x. נקבל מד"ר עבור $u(x)$ בה u חסרה. לא לשכוח לחזור למונחי y
מד"ר מדויקת מסדר שני $P\ddot{y} + Q\dot{y} + Ry = 0$	המד"ר מדויקת אם $R = Q' - p''$ ואז $f = Q - P'$ ונוכל לכתוב את המד"ר כ- $\frac{d}{dx}[Py' + fy] = 0$ נקבל מדר לינארי מסדר ראשון $Py' + fy = C$, אותה נוכל לפתור
(**) משוואת אוילר-קושי	$a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = 0$ ננחש פתרון מהצורה $y = x^m$
כשיש פתרון אחד y_1 ואנחנו רוצות למצוא את השני y_2 (הורדת סדר)	נציב במד"ר: $y = vy_1$, $y' = v'y_1 + vy_1'$, $y'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$ נקבל מד"ר מסדר ראשון על v': $y_1v'' + v'(2y_1' + py_1) = 0$ על מנת לקבל את y_2 נכפיל את v בy_1, ונזהה את שני הפתרונות

(*) כאשר r ממשי: נציב את כל אחד מהערכים קבלנו, לכל אחד מקדם משנו והפתרון הכולל הוא צרוף לינארי של כולם. עבור $r=0$ נקבל 1 (פשוט קבוע)

כאשר r מדומה: נקבל תמיד זוגות צמודים, הפתרון הוא שילוב של סינוסים וקוסינוסים:

דוגמא- $r = \pm 3i$, הפתרון: $y = Acos(3x) + Bsin(3x)$

כאשר r מרוכב: נקבל תמיד זוגות צמודים, הפתרון הוא שילוב של sin, cos, e

דוגמא- $r = 3 \pm 2i$, הפתרון: $y = e^{3x}(Acos(2x) + Bsin(2x))$

ריבוי גדול מ1: כאשר אחד הערכים של r מופיע בחזקה כלהי הפתרון יכלול ערך זה מוכפל באx, x^2 ... עד החזקה של הריבוי פחות 1

(**) במד"ר מצורה זו כאשר הריבוי גדול מ1, הפתרון הנוסף הוא $x^m lnx$

מד"ר לינארית לא הומוגנית: $\ddot{y} + p\dot{y} + qy = g$

שיטת המקדמים הלא ידועים:

1. נפתור את המד"ר ההומוגנית.
2. ננחש פתרון מהצורה של $g(t)$: סינוס-> שילוב של סינוסים וקוסינוסים, פולינום->פולינום, כפל של פונ'->כנ"ל.
3. אם g מהצורה של הפתרון ההומוגני ננחש פתרון בריבוי (כפל ב-t) גבוה יותר.
4. נציב את הפתרון שנחשנו ונשווה מקדמים למציאת הפתרון הפרטי.

שיטת וריאציית הפרמטרים:

במקרה של מד"ר מסדר שני:

1. נמצא את הפתרון ההומוגני $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$
2. נחפש פתרון למשוואה הכללית מהצורה $y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$
3. קיבלנו שני מד"רים מצומדים לu_1, u_2 שפתרונם:

$$u_1 = \int -\frac{y_2g(t)}{w(y_1,y_2)(t)}dt + c_1 \ , \quad u_2 = \int \frac{y_1g(t)}{w(y_1,y_2)(t)}dt + c_2$$

במקרה הכללי:

$$y_p = \sum_{i=1}^n y_i(x)u_i(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x)\int_{x_0}^x \frac{w_i(s)g(s)}{w[y_1,\ldots,y_n](s)}ds$$ כש- $$u_i' = \frac{g(x)w_i(x)}{w(x)}$$

כאשר w_i הוא הוורונצקיאן שהעמודה הi שלו מוחלפת בוקטור $(0,0\ldots0,1)$: ה1 נמצא בשורה התחתונה ביותר.

מערכות מצומדות של מד"רים לינאריים

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + cy \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \xRightarrow[\text{בכתיב מקוצר}]{} \dot{\vec{x}} = \bar{\bar{A}}\vec{x}$$

מציאת הפתרון נעשית בכלים של אלגברה לינארית:

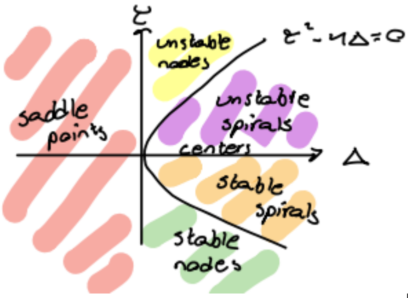
ננחש אקספוננט $\bar{v}e^{\lambda t}$ ונקבל את המשוואות: $\lambda\bar{v} = \bar{\bar{A}}r$ $\left(\bar{\bar{A}} - \lambda\bar{\bar{I}}\right)\bar{v} = 0$

כלומר עלינו למצוא את הע"ע ואת הו"ע של $\bar{x}$ $\frac{d}{dt}\bar{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

לשם כך נומר שהדטרמיננטה של המטריצה $\left(\bar{\bar{A}} - \lambda\bar{\bar{I}}\right)$ שווה לאפס, ונמצא אילו ערכים של גמא הם השורשים של הפולינום שהתקבל- לצורך מציאת דטרמיננטה, ניתן לדרגת לפי שורות ועמודות! את הוקטורים העצמיים נמצא עבור כל ערך של λ בנפרד. נציב את הערך העצמי שהתקבל בביטוי $\left(\bar{\bar{A}} - \lambda\bar{\bar{I}}\right)$. נדרג את המטריצה ונמצא מהם הערכים של (x,y,z) עבורם מתקיים $\left(\bar{\bar{A}} - \lambda\bar{\bar{I}}\right)\bar{v} = 0$

דרך נוספת: עבור מע' מד"ר כללית הע"ע נתונים ע"י: $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ כשה τ הוא *trace(A)* וΔ הוא *det(A)*.

נוכל לאפיין כך את היציבות
של נקודות השבת ואת סוגן,
כפי שרואים בגרף הבא:



על הציר האופקי-אליפסות
נקודת אוכף
פתרונות ממשיים:
נקודת שבת יציבה
נקודת שבת לא יציבה
פתרונות מרוכבים:
ספירלות לא יציבות
ספירלות יציבות

הפתרון של משוואה הומוגנית יראה כך: $\vec{x} = A\overrightarrow{v_1}e^{\lambda_1 t} + A\overrightarrow{v_2}e^{\lambda_2 t}$ כאשר v_1, v_2 הם הוקטורים העצמיים המתאימים לערכים העצמיים שמצאנו.

נתחיל את סרטוט **מרחב הפאזה** מהעברת ישרים המתאימים לוקטורים העצמיים, נשים לב שמקורם של ערכים אלה מגיע מהאקספוננטים, ובהתאם לכך נוכל לקבוע האם החלקיק מתקרב\מתרחק מהראשית כאשר עובר הזמן (אקספוננט רגיל או דועך) ומשם להרכיב את דיאגרמת הפאזה

<u>**פתרון פרטי** עבור מד"ר מצומד</u>

מד"ר מצומד יכול להיות לא הומוגני, למשל בהינתן המד"ר הבאה:

$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = -3e^{-2t}$ תחילה **ניתן להפריד מד"ר זו למע' של 2 מד"ר מצומדת**

מסדר ראשון: נסמן: $x = x_1, \dot{x} = x_2$ ונקבל:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -3x_1 - 2x_2 - 3e^{-2t} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

לאחר מציאת הפתרון ההומוגני, ננחש פתרון פרטי מהצורה $\overrightarrow{V_p} = \overrightarrow{C_0}e^{-2t}$ כאשר חשוב לזכור שC_0 הוא וקטור. כעת נגזור ונמשיך בתהליך הרגיל של שיטת המקדמים הלא ידועים.

(*) ייתכן שישנם קבועים שונים לכל משוואה מצומדת, למשל $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}$ במקרה זה ננחש פתרון פרטי: $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \cdot 1$, כאשר את הרכיבים של *A* ושל *B* יש למצוא מהשוואת מקדמים.

<u>מד"רים מצומדים לא ליניאריים</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \xRightarrow[\text{בכתיב מקוצר}]{} \dot{\vec{x}} = \vec{\vec{f}}\vec{x}$$

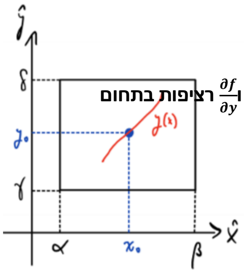
לרוב אין פתרון אנליטי, נעשה לינאריזציה של המשוואות סביב נק' ש"מ לגם כן נמצא תחילה את נקודות השבת המקיימות:

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$$

נסמן: $u = x - x^*,\ v = y - y^*$ כשu ו-v הן הפרעות קטנות סביב ש"מ, לאחר ביצוע קרוב ראשון של טיילור נגיע ל:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{יעקוביאן}}\Bigg|_{(x^*,y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

נשים לב שאנחנו מציבים ערכים של נקודה מסויימת במטריצה, ולכן בפועל מדובר במטריצת מספרים, ואת זה כבר ראינו איך לפתור למעלה.



משפט הקיום והיחידות

בהינתן מד"ר $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ותנאי התחלה $y(x_0) = y_0$ **אם f ו$\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות בתחום** $D = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ וכן $(x_0, y_0) \epsilon D$

אזי קיים קטע I סביב x_0 בו קיים למד"ר פתרון יחיד $y(x)$

משפט: אם $f(x), g(x)$ גזירות בקטע I ומתקיים $W(f,g)(x_0) \neq 0$ עבור x_0 בלשהו, אזי הורונסקיאן לא יתאפס עבור כל X בקטע I

<u>הערה על סוגי אינטגרלים</u>

א) אינטגרלים קווים

פונ' סקלרית על פני מסלול

① $\int_c \varphi \, d\vec{s}$ מחזיר וקטור (חם חם מתחמם)

② $\underbrace{\int_c \vec{F} \cdot d\vec{s}}_{\text{העבודה}}$ מחזיר סקלר

③ $\int_c \vec{F} \times d\vec{s}$ מחזיר וקטור (לאן זה מסתובב)

ב) אינטגרלים משטחיים. באופן דומה יש שלושה סוגים

① $\int_s \varphi \, d\vec{a}$

② $\underbrace{\int_s \vec{F} \cdot d\vec{a}}_{\text{השטף}}$ כמו באינטגרלים קוויים

③ $\int_s \vec{F} \times d\vec{a}$

ג) אינטגרלים נפחיים

אלמנט הנפח הוא סקלר, אין לו כיוון

① $\int_V \varphi \, dV$ מחזיר סקלר (למשל-מסה)

② $\int_V \vec{F} \, dV = \hat{x}\int F_x \, dV + \hat{y}\int F_y \, dV + \hat{z}\int F_z \, dV$

מחזיר וקטור