יחסות הפרטית - סיכום מאת נטע בן סיני

Tuesday, June 1, 2021 11:08 AM

הבסיס של יחסות פרטית:

1) מהירות האור:

ההנחה הראשונה של איינשטיין אומרת ש:

מהירות האור היא אותה מהירות בכל מערכת אינרציאלית

הנחה זו, שמהירות האור תימדד בצורה שווה לכל צופה בכל מערכת אינרציאלית כלשהי, בלי קשר למהירות של מקור האור, היא ההנחה הבסיסית שממנה צמחה תורת היחסות הפרטית.

מהירות האור בריק שווה ל- $c = 299{,}792{,}458\frac{m}{s}$

(בתווכים שונים מהירות האור עשויה להשתנות)

2) איבוד הסימולטניות:

2 מאורעות שקורים סימולטנית במערכת אינרציאלית כלשהי, לא בהכרח יהיו סימולטניים עבור צופה במערכת אינרציאלית אחרת.

אז מי צודק? **שני הצופים צודקים.**

כלומר:

ההנחה שמהירות האור אינווריאנטית, גוררת אחריה את אי שימור הסימולטניות.

הזמן בתורת היחסות:

כיצד הזמן משתנה עבור מערכות אינרציאליות שונות?

1. היחסיות של הזמן:

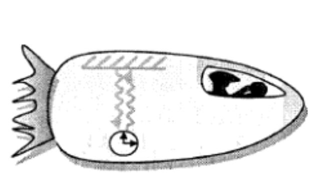
"אירוע" או "מאורע" - אירוע הוא נקודת ציון במרחב-זמן, שלא רק נמצאת במקום מסוים במרחב, אלא גם בנקודה בזמן.

"שעון" - מכשיר המודד את זמן התרחשות אירוע.

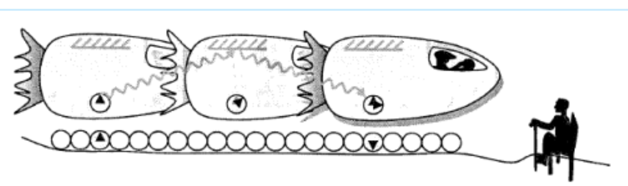
אמרנו שהסימולטניות לא נשמרת במעבר בין מערכות אינרציאליות שונות, איך נשווה את הזמן הנמדד ביניהן?

אם נסתכל על מערכת שנמצאת בחללית הנעה במהירות v ביחס לכדוה"א, ועל צופה במנוחה על פני כדוה"א, לוודא את אופן מדידת הזמן.

נניח כי בחללית יש שעון שמחוגו האחד נע פעם אחת עבור כל הבזק אור שיוצא ממנו וחוזר בעזרת מראה, וכי על מסלול הטיול ישנם חיישנים המודדים את יציאת וקבלתו חזרה, ושני המערכות מודדות את הזמן שלוקח לקרן לעשות את הטיול.



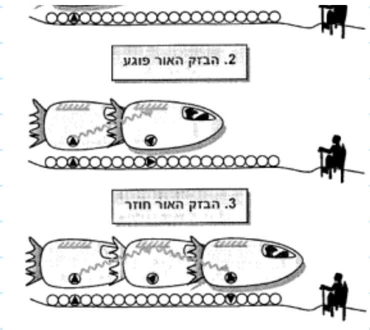
איור א-9: ניסוי השעונים במערכת הטייס



איור א-10: ניסוי השעונים במערכת כדור הארץ

במערכת הטייס הקרן עושה את המרחק 2L, לכן הפרש הזמנים יהיה $\frac{2L}{c}$ במערכת הצופה הקרן עושה מרחק גדול יותר.

הזמן שמדד הצופה יהיה שווה ל- $t' = \frac{L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$



הזמן שמדד הצופה יהיה שווה ל- $t' = \frac{\;}{c} \cdot \frac{\;}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

כלומר, הפרש הזמנים שנמדדו שווה ל- $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

<u>זמן עצמי:</u>
ראינו כי הזמן שחלף במערכת הטייס עבור המאורע (שהתרחש עבורו באותו "מקום"), ועבור הצופה (שעבורו המאורעות התרחשו במקומות שונים) שונה בפאקטור, שאותו נגדיר כ γ :

$$\boldsymbol{\gamma_{(v)} = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}}$$

במערכת שבה המאורעות קורים באותו מקום, כלומר מערכת המנוחה ביחס למאורע, הפרש הזמנים ייקרא **זמן עצמי** ("proper time") ויסומן כ- τ .

הזמן העצמי הוא הזמן הקטן ביותר שנוכל למדוד בכל מערכת.

עבור מהירויות קטנות בהרבה ממהירות האור, הפקטור γ הוא חסר כמעט כל משמעות, ויהיה שווה בקירוב ל1.

<u>התכווצות האורך:</u>
עבור מערכות הנעות במהירויות גבוהות, כל עצם במערכת אינרציאלית איטית יותר יראה <u>קצר</u> יותר, ואילו עבור המערכת האיטית, המערכת המהירה תראה <u>ארוכה</u> יותר.
נקשר נראה כך:

$$x' = \frac{x_{proper}}{\gamma}$$

לעומת זאת, <u>התארכות הזמן</u> תיראה כמו שראינו:

$$t' = t_{proper} \cdot \gamma$$

<u>טרנספורמציית לורנץ:</u>

הביטוי המתמטי של תורת היחסות הפרטית הוא טרנס' לורנץ.

<u>שימור האינטרוול:</u>
2 מאורעות A ו-B הקורים באותו מקום במערכת O, עם הפרש זמן τ ביניהם, ומערכת O' שנעה במהירות v ביחס למערכת O, כך ש:

$$\boldsymbol{t' = \tau \cdot \gamma = \tau \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

אחרי אלגברה נקבל:

$$c^2(t')^2 - v^2(t')^2 = c^2(\tau)^2 \Rightarrow c^2{t'}^2 - {x'}^2 = c^2\tau^2$$

זהו ריבוע האינטרוול $\boldsymbol{c \cdot \tau}$ בין 2 מאורעות, והאינטרוול זה הוא **אינווריאנטי**

$$(c\tau)^2 = c^2(t)^2 - x^2$$

<u>טרנספורמציית לורנץ:</u>
(את הדרך למציאת הנוסחה אוסיף בנספח מתוך הספר של מאז"ה)
תחילה נגדיר את יחידת הזמן בגרף המרחב-זמן להיות "מטר-אור", כלומר, הזמן שלוקח לאור לעבור מטר 1:

$$1\,[light\ meter] = c \cdot 1[s]$$

היתרון העיקרי במטר-אור הוא שהוא גורם לכך שמהירות תהיה חסרת יחידות.

זמן הניתן במטר-אור צריך להיות מחולק בc על מנת לקבל את הזמן ביחידות רגילות.

נגדיר את מהירות חסרת היחידות הזו להיות מסומנת בβ :

$$\boldsymbol{\beta = \frac{v}{c}}$$

נגדיר את האינטרוול של הזמן בעזרת המערכת החדשה, כך ש:

$$\tau = \sqrt{t^2 - x^2}$$

היא נוסחת האינטרוול החדשה.

<u>מטריצת הטרנספורמציה:</u>

(גם פה, החישובים מסופחים בתור נספחים)

עבור מאורע $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$ במערכת O' הנעה במהירות β ביחס למערכת O, הקואורדינאטות של המאורע במערכת O נתונה על ידי מטריצת הטרנספורמצייה הבאה:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

(עבור המקרה החד מימדי)

מטריצת טרנס' לורנץ חייבת להכיל את התנאים הבאים:

1) סימטרית
2) שני איברי אלכסון שווים
3) הפרש ריבועי האיברים בכל שורה שווה ל1

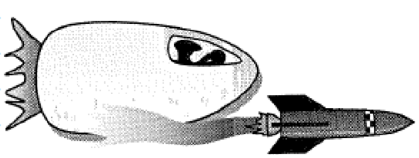
<u>הטרנס ההופכית:</u>

תעביר מO ל-O'.

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

<u>חיבור מהירויות:</u>

חיבור מהירויות ביחסות פרטית שונה מחיבור מהירויות קלאסי במכניקה ניוטונית.
נסתכל על חללית שנעה במהירות β_1 ביחס לכדוה"א, ומשגרת טיל במהירות v_2 ביחס אליה. מה מהירות הטיל ביחס לכדוה"א?



איור ב-3: חללית הנעה במהירות β_1 ביחס לכדור הארץ יורה טיל הטס במהירות β_2 ביחס אליה.

משוואת תנועת הטיל תיראה כך:

$$x' = \beta_2 t'$$

נמיר בעזרת הטרנס' את x', t' למערכת O של כדוה"א:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \beta_1\gamma_1 \\ \beta_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \beta_1\gamma_1 \\ \beta_1\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ \beta_2 t' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \gamma_1 t' + \beta_1\gamma_1 x' = \gamma_1 t' + \beta_1\gamma_1\beta_2 t' \\ x = \beta_1\gamma_1 t' + \gamma_1 x' = \beta_1\gamma_1 t' + \gamma_1\beta_2 t' \end{cases} \Rightarrow \beta_0 = \frac{x}{t} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

כלומר, חיבור\חיסור של מהירות ביחסות יראה ככה:

$$\boldsymbol{v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \qquad v_1 \ominus v_2 = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}}$$

<u>זווית המהירויות:</u>

זווית המהירות לכל מהירות β תהיה:

$$\boldsymbol{\beta = \tanh\theta}$$

במקום להשתמש בחוק לעיל, ניתן לחבר את המהירויות בעזרת חיבור לינארי בין זוויות.
עבור 2 מהירויות ו2 זוויות מתאימות, נחבר בין הזוויות ועבור חזרה למהירות בעזרת הקשר למעלה.
דוגמא: חיבור פעמיים של המהירות היחסית $\beta = 0.9$:

$$\theta_1 = \theta_2 = \tanh^{-1}(0.9) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0.9}{1-0.9}\right) \cong 1.472 \;\Rightarrow\; \theta = \theta_1 + \theta_2 = 1.472 \cdot 2 = 2.944$$

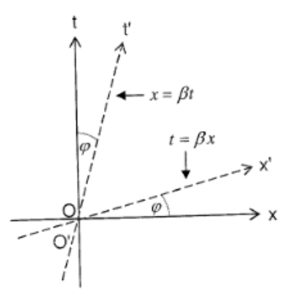
$$\beta = \tanh(\theta) \cong \tanh(2.944) = \frac{e^{2.944} - e^{-2.944}}{e^{2.944} + e^{-2.944}} \cong 0.9945$$

טרנס' לורנץ בייצוג זוויתי:

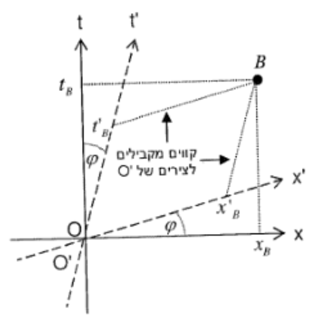
$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \beta\cdot\cosh(\theta) \\ \beta\cdot\cosh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

דיאגרמת זמן-חלל:
נשרטט גרף זמן בפונקציה של מרחק, נראה
שהוא מתנהג בצורה הבאה תחת טרנס' לורנץ:

ניתן למצוא את המיקום של מאורע מוגדר
במערכת O במערכת 'O בעזרת טרנס' לורנץ.

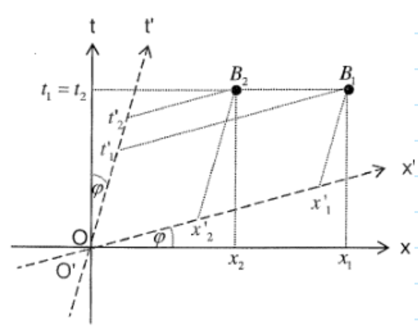


איור ג-2: הצירים של המערכת 'O, כפי ש"רואה" אותם המערכת O

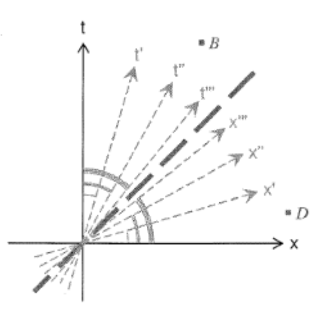


איור ג-3: קואורדינאטות המאורע B בשתי המערכות

קו המקביל לציר x מתאר מדידה בזמן מסוים, ואילו
קו המקביל לציר t מתאר מנוחה.עבור מקרה של 2 מאורעות
ניתן לראות ביתר קלות:



מרחב מינקובסקי:
מרחב מינקובסקי הינו מרחב לא-אוקלידי 4-מימדי המורכב מ3 קורדינאטות מרחב וקורדינאטת זמן אחת.
אם נבחן את הגדרותינו עד עכשיו ואת הדיאגרמה לעיל, נבחין כי יש לטרנס' לורנץ הגבלה אחת רצינית- מה קורה כאשר הטרנספורמציה "מוחצת" את הצירים לכדי ציר אחד? נבחן רגע מה המשמעות של מגבלה זו.



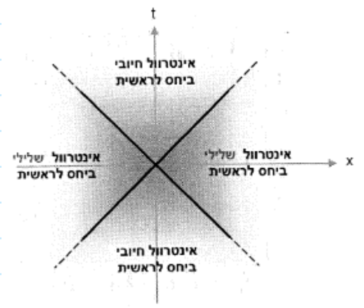
בבדי שהנקודה B תוכל להיות על ציר 't כלשהו, עליה להיות מעל ה"קו המקווקו"
שבו $t = x$. כלומר, חייב להתקיים $t > x$. למה?

הסיבה פשוטה - **שימור האינטרוול.**

כלומר - ביקום קיימת **מגבלה עליונה על מהירות, והיא מהירות האור**.

ניתן להכליל כמובן את התנאי הזה על מרחב מינקובסקי ולראות שזה מתקיים
במקרה ה-4 מימדי.

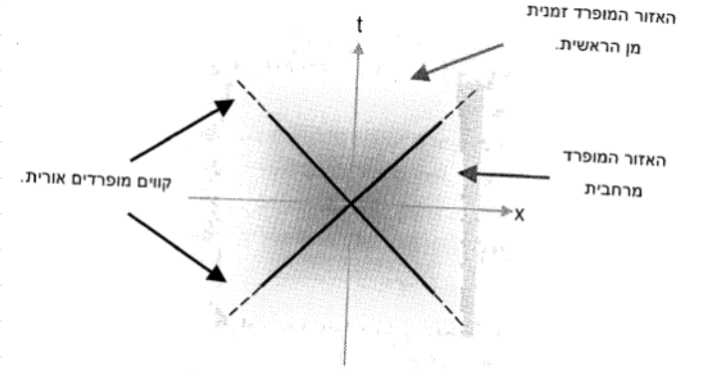
ניתן להכליל כמובן את התנאי הזה על מרחב מינקובסקי ולראות שזה מתקיים במקרה ה-4 מימדי.



אם נסתכל על דיאגרמה מלאה של xt, נראה כי היא מחולקת ל8 חלקים.
כל מאורע שנמצא ב4 החלקים של המרחב, ניתן לראות בקלות כי האינטרוול יהיה שלילי ביחס לראשית, ועבור מאורע ב4 החלקים של הזמן, האינטרוול יהיה חיובי.

(הוכחה ממאז"ה בנפסחים)

כלומר, המרחב מחולק ל3 חלקים:

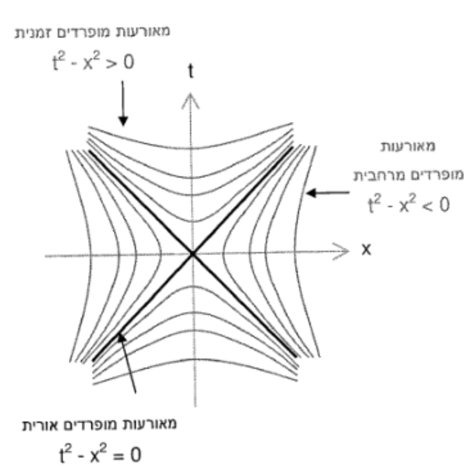


- 2 מאורעות שניתנים, בטרנס' לורנץ כלשהי, להיות <u>באותו מקום</u> נקראים "מאורעות מופרדים זמנית", כלומר, **עשוי להיות קשר סיבתי בין 2 המאורעות**. עבור מאורע כזה, האינטרוול הוא חיובי, ושווה ל: $t^2 - x^2 > 0$

- 2 מאורעות כאלו, שיכולים להתקיים עבור צופה כלשהו <u>באותו זמן</u> נקראים "מאורעות מופרדים מרחבית", כלומר, **לא אפשרי קשר סיבתי בין 2 המאורעות**. עבור מאורע כזה, האינטרוול שלילי ושווה ל: $t^2 - x^2 < 0$

- 2 מאורעות שמופרדים על ידי מהירות האור **לא יכולים להתרחש באותו זמן או מקום**, **ורק מעבר אור יכול לגרום לקשר סיבתי**. הם ייקראו "מאורעות מופרדים אורית". עבור מאורע כזה, האינטרוול מתאפס ושווה ל: $t^2 - x^2 = 0$

<u>הגיאומטריה ההיפרבולית של הטרנס':</u>
נרצה לבצע מעקב אחרי מיקומו במרחב מינקובסקי <u>בכל</u> המערכות האפשריות. כך יתאפשר לנו למצוא את כל הזמנים והמקומות האפשריים של אותו אירוע ביחס לראשית.



למשל, עם <u>כל</u> הצופים האינרציאליים זמנו של אירוע הוא חיובי, הוא התרחש אחרי זמנו של האירוע בראשית.

(חשוב להדגיש כי הקווים האלו הם לא קווי עולם)

כל קו מייצג אירוע, ואיך הוא יוצג תחת כל הטרנס' הקיימות.

בכל המערכות נשמר האינטרוול של הנקודה ביחס לראשית.

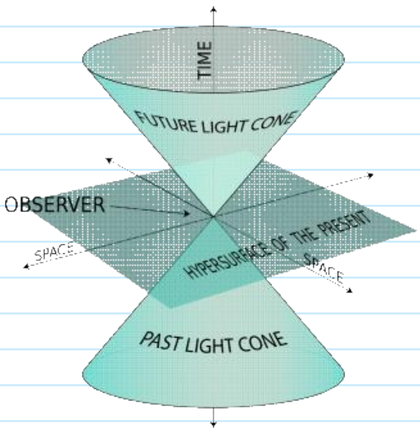
<u>אינטרוול חיובי</u> מיוצג ע"י פרבולה החותכת את ציר הt.

<u>אינטרוול שלילי</u> מיוצג ע"י פרבולה החותכת את ציר הx .

<u>אינטרוול מאופס</u> נמצא על הקו האלכסוני שהוא $x = t$

קונוס האור:
כל מאורע שהאינטרוול שלו שלילי, לא ייתכן השפעה סיבתית בין הראשית אליו, משום שיהיה צורך לנוע מהר ממהירות האור על מנת שזה יקרה, לכן כל מאורע שנמצא מתחת ל"קו האור" בדיאגרמה הוא בלתי-נגיש. נוכל להגדיר את החלק השלילי של ציר הt כ"עבר" ואת הצד החיובי כ"עתיד".

אם נטיל את מרחב מינקובסקי ה4 מימדי על 2 מימדי מרחב ומימד זמן,
נוכל לקבל דיאגרמה 3 מימדית שלה נקרא "קונוס האור":



כל מאורע שיכול להשפיע על אירוע בעתיד או השפיע בעבר יימצא בתוך הקונוס.

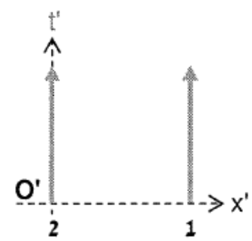
אף מאורע שמתרחש מחוץ לקונוס לא יכול להשפיע על העתיד של המאורע בראשית.

התקצרות אורך - חישובים:
נסתכל על סרגל באורך 'L שנמצא במנוחה במערכת האינרציאלית 'O, וקצהו בראשית שלה. מערכת 'O נעה במהירות v ביחס לצופה במערכת O. בזמן t=t'=0.

ישנם 2 דרכים למצוא את התכווצות האורך של הסרגל- קווי חיים, ומרחק בזמן t מהמערכות:
דרך ראשונה:

קווי החיים של שתי נקודות הקצה

נסתכל על שתי נקודות מרחביות **1** ו-**2** – ראשיתו וסופו של הסרגל. לפי האמור לעיל, בזמן $t = t' = 0$ הנקודה **2** נמצאת בראשית של שתי המערכות.
נשרטט את קווי החיים של שתי הנקודות, בכל אחת מהמערכות.



איור ד-2: קווי החיים של קצוות הסרגל במערכת 'O

במערכת 'O:

במערכת זו הסרגל נייח, ועל כן קו החיים של הנקודה **2** הוא $\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix}$, וקו החיים של הנקודה **1** הוא: $\begin{pmatrix} t' \\ L' \end{pmatrix}$, כאשר t' משתנה באופן רציף.

במערכת O:

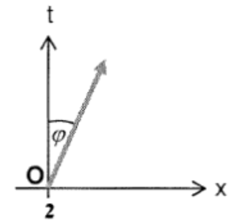
כדי לקבל את קווי החיים של שתי הנקודות במערכת O נבצע טרנספורמציית לורנץ מן המערכת O'.

<u>נקודה 2</u>:

$$\begin{pmatrix} t_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma t'_2 \\ \beta\gamma t'_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(ד-1)}$$

ולכן:

$$x_2 = \beta\gamma t'_2 = \beta t_2 \qquad \text{(ד-2)}$$



איור ד-3: קו החיים של נקודה 2 במערכת O

כלומר, β הוא השיפוע של קו החיים של נקודה 2 במערכת O. זווית הנטייה היא φ, כאשר $tg(\varphi) = \beta$. טרנספורמציה זו הינה, למעשה, הטרנספורמציה של ציר הזמן שביצענו בסעיפים קודמים.

<u>נקודה 1</u>:

באותו אופן בדיוק, נקבל את קו החיים של נקודה 1:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_1 \\ L' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} t'_1 + \beta L' \\ \beta t'_1 + L' \end{pmatrix} \qquad \text{(ד-3)}$$

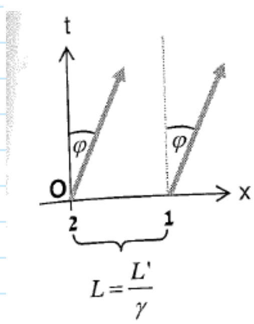
נציג גם כאן את x_1 כפונקציה של t_1. נצא מן המשוואה של t_1:

$$t_1 = \gamma t'_1 + \gamma\beta L' \quad \Rightarrow \quad \gamma t'_1 = t_1 - \gamma\beta L' \qquad \text{(ד-4)}$$

ונציב זאת במשוואה של x_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma\beta t'_1 + \gamma L' = \beta\left(t_1 - \gamma\beta L'\right) + \gamma L' = \\ &= \beta t_1 + L'\gamma\left(1-\beta^2\right) = \\ &= \beta t_1 + L'\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \qquad \text{(ד-5)}$$

קבלנו את קו החיים של הנקודה 1 במערכת O. נוכל לשרטט עתה את קווי החיים של שתי הנקודות במערכת O.



איור ד-4: קווי החיים של קצוות הסרגל במערכת O

כדי לקבל את אורך הסרגל נפחית את x_2 מ-x_1. מאחר שהסרגל נע הרי x_1 ו-x_2 אינם קבועים ולכן חשוב להקפיד לבצע את ההשוואה בין שתי הקואורדינטות המרחביות כאשר $t_1 = t_2$:

$$L = x_1 - x_2 = \beta t_1 + L'\sqrt{1-\beta^2} - \beta t_2 = L'\sqrt{1-\beta^2} \qquad \text{(ד-6)}$$

כמצופה, אורך הסרגל במערכת O אינו תלוי ב-t. הסרגל התקצר בפקטור $\sqrt{1-\beta^2}$ ואפשר לרשום: $L = L'\frac{1}{\gamma}$.

דרך שניה:

<u>המיקום של שתי נקודות הקצה במערכת O</u>

במקום לדון בקווי החיים של נקודות הקצה של הסרגל במערכת O, נניח כי אורך הסרגל קבוע בזמן גם במערכת O, ונחשב את אורכו בזמן ספציפי אחד, למשל בזמן $t = 0$.

כלומר, נחפש את מיקומן של שתי נקודות הקצה, הנתונות במערכת O', כאשר הזמן הוא $t = 0$ במערכת O. בזמן זה נקודה 2 נמצאת בראשית הצירים גם במערכת O $(x_2 = 0)$. נחפש כעת את מיקום הנקודה 1 בזמן $t = 0$.

לשם כך נסתכל שוב על הטרנספורמציה בין המערכות:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_1 \\ L' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} t'_1 + \beta L' \\ \beta t'_1 + L' \end{pmatrix} \qquad \text{(ד-7)}$$

המיקום של שתי נקודות הקצה במערכת O

במקום לדון בקווי החיים של נקודות הקצה של הסרגל במערכת O, נניח כי אורך הסרגל קבוע בזמן גם במערכת O, ונחשב את אורכו בזמן ספציפי אחד, למשל בזמן $t=0$.

כלומר, נחפש את מיקומן של שתי נקודות הקצה, הנתונות במערכת 'O, כאשר הזמן הוא $t=0$ במערכת O. בזמן זה נקודה 2 נמצאת בראשית הצירים גם במערכת O $(x_2=0)$. נחפש כעת את מיקום הנקודה 1 בזמן $t=0$.

לשם כך נסתכל שוב על הטרנספורמציה בין המערכות:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_1 \\ L' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} t'_1+\beta L' \\ \beta t'_1 + L' \end{pmatrix} \quad \text{(ד-7)}$$

נציב $t_1=0$ ונקבל:

$$\gamma(t'_1+\beta L')=0 \quad \text{(ד-8)}$$

מהעובדה ש- $\gamma\neq 0$ נוכל להסיק כי:

$$t'_1=-\beta L' \quad \text{(ד-9)}$$

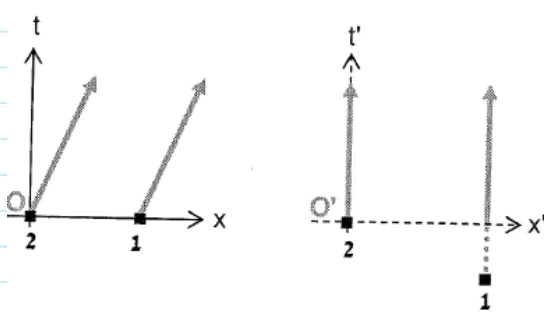
נציב בנוסחה של x_1 ונקבל:

$$x_1=\gamma\beta(-\beta L')+\gamma L'=\gamma(1-\beta^2)L'=L'\sqrt{1-\beta^2} \quad \text{(ד-10)}$$

המרחק בין שתי הנקודות הוא, אפוא, $L'\sqrt{1-\beta^2}$. שוב, קבלנו כי הסרגל התקצר בפקטור $\sqrt{1-\beta^2}$ ביחס לאורכו במערכת 'O.

שימו לב כי הזמן במערכת 'O של האירוע אליו אנו מתייחסים, t'_1, **<u>קטן</u>** מאפס. כלומר, לאירוע אשר בו המערכת O רואה את הנקודה 1 בזמן $t_1=0$, יש זמן שלילי במערכת 'O.

כלומר, צופה במערכת O מסתכל על שני מאורעות המייצגים את מיקומן של שני קצות הסרגל x_1 ו-x_2 בזמן $t=0$. אך, לרוע המזל, עבור הצופה במערכת 'O שני המאורעות אינם באותו הזמן.



איור ד-5: קווי החיים של קצוות הסרגל בשתי המערכות

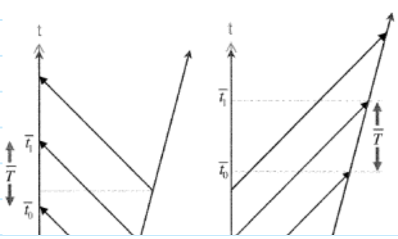
שוב חזרנו אל איבוד האינווריאנטיות של הסימולטאניות, שבה פתחנו את הדיון בטרנספורמציית לורנץ. עובדה זאת קשורה קשר עמוק עם ההתקצרות של הסרגל.

(דוגמות נוספת - נספחים)

<u>אפקט דופלר היחסותי:</u>

נסתכל על מקור השולח אותות במרווחי זמן שווים אל צופה. כאשר המרחק ביניהם משתנה בכלל תנועת אחד מן השניים.

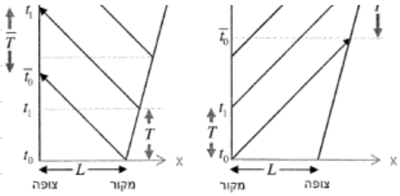
מקרה 1- מקור מתרחק מהצופה. זמן T בין שיגור כל אות, זמן $\bar{T}$ הזמן בין קבלת 2 אותו:



$$\bar{T}_{obse}=T_{obse}(1+\beta),\qquad T_{obse}=\gamma T_{source}\Rightarrow \bar{T}_{obse}=T_{source}\cdot\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

מקרה 2- צופה מתרחק מן המקור:

$$\bar{T}_{source}=\frac{T_{source}}{1-\beta},\qquad \bar{T}_{source}=\gamma\bar{T}_{obse}\Rightarrow \bar{T}_{obse}=T_{source}\cdot\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

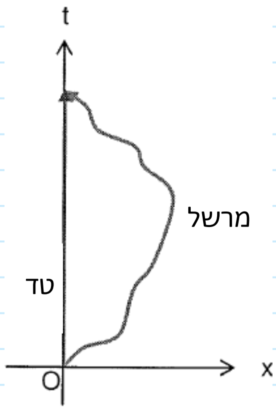


$$\bar{T}_{source} = \frac{T_{source}}{1-\beta}, \qquad \bar{T}_{source} = \gamma \bar{T}_{obse} \Rightarrow \bar{T}_{obse} = T_{source} \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

מימין - מקור נייח, צופה בתנועה. משמאל - צופה נייח, מקור בתנועה.

אורך הגל שנצפה על ידי אפקט דופלר היחסותי - $\lambda_{\text{obse}} = \lambda_{\text{source}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

לקירוב למהירויות נמוכות - $\lambda_{\text{obse}} = \lambda_{\text{source}} \left(1+\beta\right)$



<u>פרדוקס התאומים:</u>

מרשל וטד גדלו ביחד בניו יורק. מרשל שופט - אסטרונאוט חתיך, טד אדריכל.
מרשל ממריא לחלל וטס לאלפא סנטאורי, בעוד טד מתכנן בניינים ומחפש את אהבת חייו.
המסלול של מרשל בחלל מתואר בדיאגרמה הבאה, הוא לא טס במהירות קבועה.

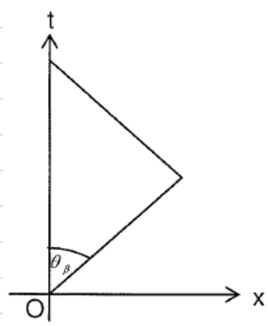
נחפש את הזמן שעבר על מרשל במסעותיו בחלל, ואת הזמן שעבר על טד לבד בניו יורק.

<u>הזמן העצמי במסלול העקום של מרשל:</u>

נבצע אינטגרל על מנת למצוא את אלמנט הזמן של מרשל:

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2} = dt\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{1 - v^2(t)} = \frac{dt}{\gamma(t)} \Rightarrow \tau = \int d\tau = \int \sqrt{1 - v^2(t)}\, dt$$

נראה כי הזמן העצמי קצר יותר במסלול העקום!

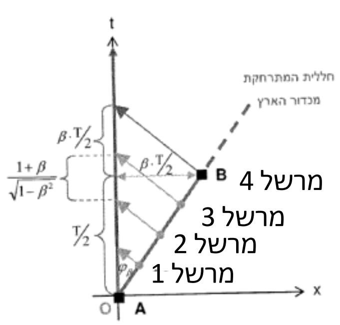


נסתכל אבל על מקרה פשוט קצת יותר- מהירות קבועה.
נגדיר את הזמן שעבר עד לחזרתו של אביב במערכת כדור הארץ להיות T.
אנחנו כבר יודעים שהזמן העצמי של מרשל קצר משל טד, ומכיוון שבכל תנועתו הייתה
למרשל מהירות תנועה שגודלה שווה לv , וערך קבוע לγ , לכן זמנו של מרשל שווה ל$\frac{T}{\gamma}$

נחלק את הנסיעה לדרך הלוך וחזור, לכן מבחינת החללית בהלוך, משך הנסיעה היה $\frac{T}{2\gamma}$

נראה כי בחזור הערך יהיה זהה.

אם נבדוק על דוגמה מספרית עבור מרחק השווה ל3 שנות אור, ומהירות השווה ל- $v = \frac{3}{5}$, נראה כי כלל הנסיעה לקחה למרשל 8 שנים ואילו עבור טד עברו 10. מרשל יהיה צעיר בשנתיים מטד בהגיעו לכדו"א.



נניח שמרשל וטד שולחיו אחד לשני מסר כל שנה. בתאריך השנה ליציאת מרשל.
מבחינת מרשל הנסיעה לאלפא סנטאורי נמשכה 4 שנים לכן הוא שלח 4 מסרים,
ואילו טד שלח 5.

המסר האחרון של מרשל, מרשל 4, יגיע לטד 3 שנים (המרחק בין הכוכב
לכדור"א הוא 3 שנות אור) אחרי שמרשל שיגר אותו. במהלך 8 השנים
הללו קיבל טד רק 4 מסרים.
הזמן הכולל שעבר מההמראה של מרשל עד קבלת המסר הרביעי הוא:

$$\frac{T}{2}\left(1+\beta\right) = 8$$

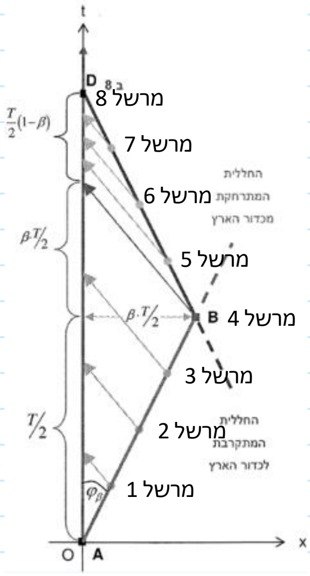
במהלך 8 השנים טד קיבל רק 4 מסרים, וההודעות הוסטו לפי אפקט דופלר כך ש:

$$\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2$$

לכן מספר המסרים הכולל שהגיעו לטד יחושב עם הזמן הכולל חלקי מספר המסרים:

$$\frac{\mathrm{T}}{2}(1+\beta)/\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{T}{2}\sqrt{1-\beta^2}=4$$

<u>בזמן הנסיעה חזרה:</u>



נסתכל על המסרים הנשלחים ממרשל בדרכו חזרה מן הכוכב.
הגעתו לכוכב מסומנת כ(4), הגעתו לכדור הארץ כ(8)
כבר ראינו שמשך הזמן שעבר במערכת של טד עבור כל דרך היא 5 שנים, ולכן הרגע בו יצא מרשל מהכוכב חזרה, במערכת של טד, הוא ב8=t, ברגע הגעת המסר הרביעי.
מסרים 5,6,7 מגיעים במהלך שנתיים:

$$\frac{T}{2}(1-\beta)=2$$

זה נובע מההיסט דופלר של מרשל **המתקרב** בעת לכדוה"א.
הזמן מוסט בשיעור של:

$$\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{2}$$

ונוכל למצוא את מספר המסרים הכולל שהתקבלו בזמן הזה:

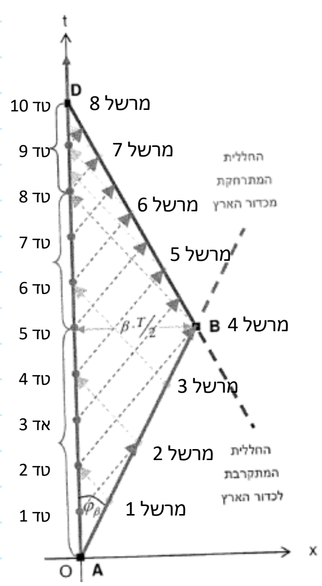
$$\frac{\frac{T}{2}(1-\beta)}{\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}}=\frac{T}{2}\sqrt{1-\beta^2}=4$$

(כולל מסר מספר 4, כמובן)

<u>המסלול כולו:</u>
נוכל לסכום את 2 התוצאות ולהגיע למספר השנים שעברו על מרשל:

$$\frac{T}{2}\sqrt{1-\beta^2}+\frac{T}{2}\sqrt{1-\beta^2}=8$$

<u>מה עבר על טד?</u>



נסתכל על המסרים שטד שלח למרשל.
נשתמש באותו שרטוט אבל נוסיף את המסרים של טד:
<u>במהלך ההתרחקות של הטיל:</u>
המסרים של טד עוברים גם הם הסחת דופלר, נחשב את מספר המסרים של טד שמגיעים למרשל:

$$\frac{\frac{T}{2}\sqrt{1-\beta^2}}{\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}}=\frac{T}{2}\cdot\frac{1-\beta^2}{1+\beta}=\frac{T}{2}(1-\beta)$$

נציב $T=10$ ו- $\beta=\frac{3}{5}$, נקבל כי במהלך הטיסה של מרשל לכוכב, הוא יקבל רק 2 מסרים.
<u>במהלך הטיסה חזרה:</u>
ההסטה בעת היא לכיוון השני, כלומר:

$$\frac{\frac{T}{2}\sqrt{1-\beta^2}}{\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}}=\frac{T}{2}\cdot\frac{1-\beta^2}{1-\beta}=\frac{T}{2}(1+\beta)$$

נציב את אותם מספרים ונקבל כי מרשל קיבל 8 מסרים מטד.

<u>המסלול כולו:</u>
בדומה למסלול של מרשל, נסכום:

$$\frac{T}{2}(1-\beta)+\frac{T}{2}(1+\beta)=T$$

לסיכום: גם מרשל וגם טד מסכימים על הזמן העצמי של טד, T, ועל הזמן העצמי של מרשל, $T\sqrt{1-\beta^2}$.

לכן גם הפרדוקס אינו באמת פרדוקס, משום שמרשל נע במערכת אינרציאלית ביחס למערכת של טד שבמנוחה.

כמובן שקיימות הוכחות ניסיוניות לחזיונות הללו...

<u>טרנספורמציית לורנץ ב3 מימדים מרחביים:</u>

ראינו את כלל החישובים והמשוואות עבור תנועה בממד x בודד, נרחיב את החישובים ל3 ממדים:

- תנועה על ציר x לא תגרום לכיווץ או התרחבות בציר y. (הוכחה בנספחים)

כלומר: עבור תנועה על ציר x כלשהו נקבל בטרנספורמציה- $y = y', z = z'$

<u>מטריצת הטרנס' עבור 3 מימדי מרחב תהיה:</u>

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$ ★

כלומר עבור המקרה ה4 ממדי, האינטרוול יהיה:

$$\boldsymbol{\tau^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$ ★

<u>הכללה של טרנס' לורנץ עבור תנועה בכיוון כללי בתצוגה וקטורית:</u>

$$\boldsymbol{x_0' = \gamma(x_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x})}$$ ★

$$\boldsymbol{\vec{x}' = \vec{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}\left(\vec{\beta} \cdot \vec{x}\right)\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}x_0}$$ ★

(הוכחה בנספחים)

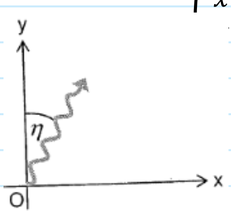
<u>אברציה של האור</u>

נטפל כעת בבעיית הסטייה של כיוון התנועה של האור עבור צופים הנעים זה ביחס לזה.

במערכות O ו-O' שנעה ביחס לO לאורך ציר x במהירות β. הבזק אור נשלח מהראשית של מערכת O' לאורך ציר y'.

מסלולה של הקרן במערכת O תהיה:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ 0 \\ t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma t' \\ \beta\gamma t' \\ t' \\ 0 \end{pmatrix}$$



האור מתקדם במערכת O במסלול בזווית מסוימת θ כך ש:

$$\tan(\theta) = \frac{x}{y} = \frac{\beta\gamma t'}{t'} = \beta\gamma$$

ומה אם האור נע במערכת O' בזווית ϕ ביחס לציר ה'y?

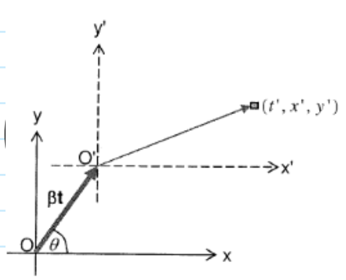
$$y' = \cos(\phi) \cdot t', \qquad x' = \sin(\phi) \cdot t'$$

המסלול של האור במערת O יהיה:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ \sin(\phi) \cdot t' \\ \cos(\phi) \cdot t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma t'(1 + \beta\sin(\phi)) \\ \gamma t'(\beta + \sin(\phi)) \\ \cos(\phi)\, t' \\ 0 \end{pmatrix}$$

ומהירות תהיה:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} =$$



ונוכל כך גם לחשב את זווית התנועה במערכת O.

<u>המקרה הכללי עבור תנועה במישור xy:</u>

עבור האירוע (t', x', y') הקורה במערכת O' הנעה במהירות β ביחס

למערכת O ובזווית θ . כיצד האירוע נצפה בO' וכיצד הוא נצפה בO?

תחילה נסתכל על התנועה היחסית של בין המערכות, נשתמש ב2 מערכות
ביניים- $\bar{O}$,$\bar{O}'$ והן יהיו מסובבותת בזווית θ ביחס למערכות O ו-O' בהתאמה.

ישנם 3 שלבים לטרנס': 1. נציג את האירוע שמתרחש במערכת O' על ידי קור' במערכת $\bar{O}'$:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}' \\ \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ \cos(\theta)x' + \sin(\theta)y' \\ \cos(\theta)\, y' - \sin(\theta)\, x' \\ z' \end{pmatrix}$$

מערכת $\bar{O}$ רואה את $\bar{O}'$ מתרחקת במהירות β לאורך ציר x, האירוע במערכת $\bar{O}'$ יראה ל$\bar{O}$:

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t}' \\ \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ \cos(\theta)x' + \sin(\theta)y' \\ \cos(\theta)\, y' - \sin(\theta)\, x' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\left(t' + \beta\left(\cos(\theta)x' + \sin(\theta)y'\right)\right. \\ \gamma\left(\beta t' + \left(\cos(\theta)\, x' + \sin(\theta)y'\right)\right) \\ \cos(\theta)x' + \sin(\theta)y' \\ z' \end{pmatrix}$$

כעת נעבור שוב למערכת O, נבצע טרנס' סיבוב הפוכה:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\left(t' + \beta\left(\cos(\theta)x' + \sin(\theta)y'\right)\right. \\ \cos(\theta)\,\gamma\left(\beta t' + \cos(\theta)x' + \sin(\theta)y'\right) - \sin(\theta)\left(\cos(\theta)x' + \sin(\theta)y'\right) \\ \sin(\theta)\,\gamma\left(\beta t' + \cos(\theta)x' + \sin(\theta)y'\right) + cos(\theta)\left(\cos(\theta)x' + \sin(\theta)y'\right) \\ z' \end{pmatrix}$$

סה"כ המעבר כולו:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma\cos(\theta) & \beta\gamma\cos(\theta) & 0 \\ \gamma\beta\cos(\theta) & \gamma\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & (\gamma - 1)\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 \\ \gamma\beta\sin(\theta) & (\gamma - 1)\sin(\theta)\cos(\theta) & \gamma\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בדיקות של מקרים מיוחדים

א. תנועתה של הראשית

נסתכל על הראשית המרחבית במערכת **O'** בזמן t', כלומר $\begin{pmatrix} t' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. לפי מטריצת הטרנספורמציה

היא עוברת לנקודה $\begin{pmatrix} \gamma t' \\ \beta\gamma\cos\theta t' \\ \beta\gamma\sin\theta t' \end{pmatrix}$. כך נראית הראשית של **O'** במערכת **O**.

רכיב המהירות של אותה נקודה בציר x הוא:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\beta\gamma\cos\theta t'}{\gamma t'} = \beta\cos\theta \qquad \textbf{(14-ו)}$$

רכיב המהירות של אותה נקודה בציר y הוא:

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\beta\gamma\sin\theta t'}{\gamma t'} = \beta\sin\theta \qquad \textbf{(15-ו)}$$

כפי שאנו כבר יודעים.

ב. תנועה יחסית בין שתי המערכות רק בציר x

במקרה כזה $\theta = 0$ ולכן $\cos\theta = 1$ $\sin\theta = 0$, ואז מטריצת הטרנספורמציה המתקבלת היא:

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(16-ו)}$$

כפי שאנחנו מכירים.

ג. תנועה יחסית בין שתי המערכות רק בציר y

במקרה כזה $\theta = 90°$ ולכן $\cos\theta = 0$ $\sin\theta = 1$, כלומר:

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad \textbf{(17-ו)}$$

כפי שאנחנו כבר מכירים.

כתיבה מפורשת של הטרנספורמציה

אפשר להראות כי אם המערכת **O'** נעה ביחס למערכת **O** במהירות (V_x, V_y), אזי הטרנספורמציה היא:

$$x = \gamma V_x t' + \left(\left(\gamma - 1\right)\frac{V_x^2}{V^2} + 1 \right) x' + \left(\left(\gamma - 1\right)\frac{V_x V_y}{V^2} \right) y'$$

$$y = \gamma V_y t' + \left(\left(\gamma - 1\right)\frac{V_x V_y}{V^2} \right) x' + \left(\left(\gamma - 1\right)\frac{V_y^2}{V^2} + 1 \right) y' \qquad \text{(18-ו)}$$

$$t = \gamma t' + \gamma\left(V_x x + V_y y\right)$$

או בצורה אחרת:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \frac{\vec{v}}{v\sqrt{1 - v^2}}\left(\left(1 - \sqrt{1 - v^2}\right)\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}'}{v} + vt' \right) \qquad \text{(19-ו)}$$

סיכום של מאז"ה שלדעתי מסכם היטב את טרנס' לורנץ:

ז. סיכום

חלק זה של הספר עסק בטרנספורמציית לורנץ, המאפשרת לנו להסתכל על תהליכים פיזיקאליים כפי שהם נראים על ידי צופים שונים. ההפרדה בין המשותף ובין השונה עבור צופים שונים מאפשרת לנו הבנה טובה יותר של המציאות הפיזיקאלית ביקום שמסביבנו ושל התהליכים המתרחשים בו. טרנספורמציית לורנץ מציגה את התפיסות של הצופים השונים דרך הקואורדינאטות של אירוע כלשהוא, כפי שהן נמדדות במערכות האינרציאליות השונות, הנעות זו ביחס לזו במהירות קבועה. הקואורדינאטות מוגדרות במרחב מינקובסקי, וכוללות את שלושת קואורדינאטות המקום, יחד עם קואורדינאטת הזמן, שאותה ביטאנו ביחידות של מרחק. באופן מפתיע ראינו כי התכונה המרכזית של טרנספורמציית לורנץ היא שימור האינטרוול שבין כל נקודה המייצגת אירוע ובין הראשית, אינטרוול המוגדר כ- $t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$.

שימור האינטרוול נבע מן ההנחה היסודית כי חוקי הטבע הם אותם חוקים בכל המערכות האינרציאליות, חוקים הכוללים את משוואות מקסוול שמתוכם גוזרים את מהירות האור. מהירות האור הזהה עבור כל צופה אינרציאלי היא המניע לפיתוח תורת היחסות, והיא ההישג הגדול של טרנספורמציית לורנץ, למרות שפותחה על ידי לורנץ מסיבות אחרות. הראנו כי בעזרת טרנספורמציית לורנץ מקבלים חוק חיבור מהירויות חדש, שממנו נובע כי גוף הנע במהירות האור במערכת אחת ינוע כך בכל מערכת אינרציאלית. מצד שני, חוק המהירות החדש מחייב כי התוצאה של חיבור מהירויות הקטנות ממהירות האור תהיה גם היא קטנה ממהירות האור. יתרה מזאת, טרנספורמציית לורנץ מוגדרת רק עבור צופים הנעים זה ביחס לזה במהירות הקטנה ממהירות האור. ועל כן, כל הצופים במערכות האינרציאליות בהכרח נעים זה ביחס לזה במהירות הקטנה ממש ממהירות האור. מהירות האור היא גודל שצופה ממשי יכול לשאוף אליו ולעולם לא להגיע עדיו.

ראינו גם כי טרנספורמציית לורנץ מאלצת אותנו לזנוח את המושגים היסודיים ביותר שלנו על המתרחש סביבנו. אנו בונים את תפישת המציאות שלנו על אירועים המתרחשים בזמן ובמרחב, ומניחים בלי משים כי הזמן והמרחב הם מושגים אבסולוטיים, הנמדדים באותו אופן על ידי כל הצופים שבעולם. תורת היחסות מראה כי אין הדבר כך. מתברר כי הזמן החולף בין שני אירועים אינו אינווריאנטי, והוא תלוי צופה. למרות הקושי העצום לקבל את החידוש הזה, אפשר היה, אולי, לתלות את היחסיות של הזמן במופשטות של מושג הזמן, שקשה למצוא לו המחשה על ידי גוף ממשי. אולם מתברר כי טרנספורמציית לורנץ איננה חסה אפילו על האורך של גופים ממשיים, שגם הוא מאבד את מוחלטותו בתורת היחסות. היחסיות של הזמן ושל האורך הם אחת המסקנות המרכזיות של טרנספורמציית לורנץ המנוגדות באופן בולט לאינטואיציה הבסיסית שלנו.

יתרה מזאת, לא רק הזמן שבין שני אירועים אינו קבוע, אלא אפילו **סדר הזמנים** שבין שני אירועים יכול להיות שונה מצופה לצופה. ראינו כי שני אירועים שהתרחשו באותו זמן עבור צופה אחד אינם בהכרח כאלה עבור צופה אחר. כלומר, הסימולטאניות אינה אינווריאנטה של טרנספורמציית לורנץ. כמו כן ראינו כי האינטרוול שבין שני אירועים הוא הקובע את היחס שביניהם. עבור אינטרוול חיובי בין שני האירועים, אירוע אחד נמצא בהכרח בעבר של האירוע השני, קביעה הנכונה עבור כל הצופים בכל המערכות האינרציאליות. לעומת זאת אם האינטרוול בין האירועים שלילי, אין משמעות לסדר הזמנים שביניהם. עבור שני אירועים, **A** ו-**B** למשל, צופה אחד יראה כי זמנו של **A** הוא מוקדם יותר מזמנו של **B**, צופה אחר יטען כי זמנו של **A** מאוחר יותר, ועבור צופה שלישי שני המאורעות התרחשו באותו זמן. היפוך <u>סדר</u> המאורעות עבור מאורעות מסוימים הוא, אולי, צעד מחשבתי נועז ומפתיע יותר מן היחסיות של הזמן. ראינו גם כי היפוך סדר המאורעות אינו מפר את עקרון הסיבתיות. כלומר, אם עבור צופה אחד **A** היווה את הסיבה ל-**B**, אזי **A** יחול לפני **B** עבור כל צופה. מהירות האינפורמציה הנעה מ-**A** ל-**B** אינה יכולה לעבור את מהירות האור, ועל כן רק שני אירועים שמרחקם המרחבי קטן מספיק יכולים להיות מקושרים בקשר סיבתי.

עד עתה עסקנו בקינמאטיקה של גופים – כלומר, בתיאור התנועה של גופים ביחס לצופים שונים הנעים במהירות קבועה זה ביחס לזה. בחלק השלישי של הספר נדון בדינאמיקה של גופים המחליפים ביניהם תנע ואנרגיה, ומשנים על ידי כך את מהירותם. המטרה תהיה לנסח חוקי שימור הנכונים עבור כל המערכות. לשם כך נצטרך להגדיר מחדש את מושגי המהירות, התנע והאנרגיה. באופן מפתיע נגיע גם לגופים הנעים במהירות האור, ולהכללה של מושג המסה והאנרגיה.

דינמיקה יחסותית:

נדבר על מערכת חלקיקים שיש ביניהם אינטראקציה ומעבר אנרגיה.

נגדיר מחדש תנע ואנרגיה של חלקיק בודד ושל מערכת חלקיקים. ביחסות התנע והאנרגיה אינם בלתי תלויים אלא מופיעים כרכיבים של ה4-וקטור במרחב מינקובסקי. חוקי השימור צריכים להיות תקפים לכל צופה אינרציאלי.

<u>וקטורים מרחביים ביחסות פרטיץ:</u>

ביחסות וקטור מורכב מ4 רכיבים - 3 רכיבי מרחב ורכיב זמן-אור: $r^{(4)}=\left(ct,\vec{r}\right)=\left(ct,x,y,z\right)$

בחישובים המשתמשים ב4-ווקטור נהוג להשתמש בווקטור העמודה בצורה הבאה: $r^{(4)}=\begin{pmatrix}ct\\x\\y\\z\end{pmatrix}$

כמו כך נהוג לסמן את מטריצת טרנספורמציית לורנץ בעזרת הסימון - $\Lambda\left(\beta\right)$

- המטריקה של מרחב מינקובסקי מוגדרת כך:

$$G=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

- כלומר ניתן כבה להגדיר את הנורמה ההיפרבולית של המרחק בין 2 אירועים להיות:

$$\left\|r^{(4)}\right\|^2=(ct)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)=r^{(4)T}\cdot G\cdot r^{(4)}=\left\|r'^{(4)}\right\|^2$$

ולחילופין ניתן לראות כי המטריצת טרנס' של טרנס' לורנץ, היא לבסינה וסימטרית, ולכן מקיימת:

$$\Lambda^T\cdot G\cdot\Lambda=G$$

- טרנספורמציית לורנץ שומרת על המכפלה הסקלארית בין 2 ווקטורים בצורה הבאה:

$$a^{(4)}\cdot b^{(4)}=a^{(4)T}\cdot G\cdot b^{(4)}$$

- הגדרת סקלר במרחב מינקובסקי היא כל גודל שהוא אנווריאנטי (זמן עצמי של חלקיק שנע במהירות קבועה, למשל)

<u>ארבע-וקטור המהירות:</u>

חישוב מהירות של עצם יחסותי שונה מהחישוב הפשוט (יחסית) במכניקה קלאסית. וקטור המהירות יוגדר כך:

$$v^{(4)}=\frac{r^{(4)}}{\tau}=\left(\frac{ct}{\tau},\frac{\vec{r}}{\tau}\right)\Rightarrow\tau=\frac{t}{\gamma}\Rightarrow \boldsymbol{v^{(4)}}=\left(\boldsymbol{c\gamma},\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{\gamma}\right)=(\boldsymbol{c\gamma},\vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\gamma})$$

וגם:

$$\|v^{(4)}\|=c$$

בכדי לקבל מווקטור המהירות $v^{(4)}$ את ווקטור המהירות המרחבית $\vec{v}$, נחלק את המרכיב המרחבי של $v^{(4)}$ ברכיב $v_0^{(4)}$ חלקי c :

$$\vec{v}=\frac{\left(v_x^{(4)},v_y^{(4)},v_z^{(4)}\right)}{v_0^{(4)}/c}$$

אם מהירות החלקיק לא קבועה, אז ה4-וקטור של המהירות הרגעית יהיה:

$$v^{(4)}=\left(c\gamma(t),\frac{d\vec{r}}{dt}\gamma(t)\right)=\left(c\cdot\gamma(t),\vec{v}(t)\cdot\gamma(t)\right)$$

- במנוחה, וקטור המהירות של חלקיק יהיה - $v^{(4)}=(c,0)$

דוגמה לטרנס' לורנץ של המהירות:

נגדיר את מערכת כדור הארץ למערכת המנוחה (נתעלם מהסיבוב). על ציר האיקס שלה נעה חללית במהירות v_2 ובעקבות החללית נע טיל על אותו ציר, במהירות v_1 .

ה4-וקטור המהירות של הטיל במערכת החללית, הוא - $v_{\text{spaceship}}^{(4)}=(c\gamma_1,v_1\gamma,0,0)$

נעבור ממערכת החללית למערכת כדור הארץ בעזרת טרנס' לורנץ (עבור ממד תנועה יחיד):

$$v_{earth}^{(4)}=\begin{pmatrix}ct\\v_x\end{pmatrix}_e=\begin{pmatrix}\gamma_2 & \beta_2\gamma_2\\ \beta_2\gamma_2 & \gamma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\gamma_1\\v_1\gamma_1\end{pmatrix}=\gamma_1\gamma_2(c+\beta_2v_1,\beta_2c+v_1)\xRightarrow{\beta_i=\frac{v_i}{c}}\gamma_1\gamma_2\left(c+\frac{v_1v_2}{c},\frac{v_2c}{c}+v_1\right)$$
$$=\gamma_1\gamma_2\big(c(1+\beta_1\beta_2),v_1+v_2\big)$$

כלומר, מהירות הטיל במערכת כדור הארץ תהיה:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{e}}=\frac{\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\beta_1\beta_2}}$$

<u>הארבע-ווקטור של התנע-אנרגיה:</u>

חישבנו מהירות, כעת נחשב בעזרתם את התנע והאנרגיה. בשביל לעשות זאת נצטרך למצוא ערך סקלרי למסתו של חלקיק במרחב מינקובסקי, כפי שהגדרנו, זה אומר שהוא יצטרך להיות אינווריאנטי. ערך זה ייקרא "מסה המנוחה", המסה היחסותית תוגדר להיות:

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{\gamma m_0}$$

שכמו זמן עצמי, מוגדר לפי המסה של החלקיק במערכת המנוחה שלו. 4-הווקטור התנע יהיה:

$$\boldsymbol{P^{(4)}}=\left(\boldsymbol{m_0c\gamma},\boldsymbol{m_0}\vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\gamma}\right)=(\boldsymbol{mc},\boldsymbol{m\gamma})$$

עבור חלקיק במנוחה, ערך פקטור לורנץ יהיה $\gamma=1$, והתנע יהיה - $P^{(4)}\triangleq(m_0c,0)$

נסתכל על רכיב האפס של התנע, נכפיל את שני הצדדים ב c :

$$P_0^{(4)}\cdot c=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

אם נפתח את הביטוי עבור מהירויות קטנות בטור טיילור, נקבל:

$$P_0^{(4)}c=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\cdots\right)=m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2+\cdots$$

כלומר, ניתן לכתוב את הביטוי כך:

$$P_0^{(4)}c\cong m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$$

האיבר השני הוא לגמרי אנרגיה קינטית! לכן נוכל לכנות את הרכיב $P_0^{(4)}c$, כאנרגיה יחסותית, כך שמתקיים:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{m_0c^2\gamma}=\frac{\boldsymbol{m_0c^2}}{\sqrt{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\beta^2}}}=\boldsymbol{mc^2}$$

נרצה להגדיר חוקי שימור אנרגיה כך שיקיימו את חוקי השימור המוכרים וגם את כללי היחסות הפרטית. התנע הכולל של מערכת יהיה:

$$P_{sys}^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} P_i^{(4)}$$

לפי מה שהגדרנו מקודם, אפשר לתת דוגמא: 2 חלקיקים בעלי מסת מנוחה m, נעים במהירויות זהות ובכיוונים הפוכים. מתקיים כי:

$$P_{sys}^{(4)} = \left(m_0 c\gamma, \vec{P}\right) + \left(m_0 c\gamma, -\vec{P}\right) = \left(2m_0 c\gamma, 0\right) = (2mc, 0)$$

מסת המערכת תהיה:

$$M_{sys} = \frac{\left\| P_{sys}^{(4)} \right\|}{c} = 2m_0\gamma = 2m$$

מסקנה: מסת המערכת של חלקיקים יכולה להיות שונה מסכום מסות המנוחה של רכיביה.
מסקנה 2: בהעדר כוחות חיצוניים, ארבע-ווקטור התנע-אנרגיה של <u>מערכת</u> חלקיקים נשמר.

חוק שימור התנע-אנרגיה, במערכת יחסותית 4-ממדית, כולל בתוכו גם שימור של שלושת הרכיבים המרחביים של התנע, וגם שימור האנרגיה, ותקף לכל אינטראקציה, כל עוד המערכת סגורה.

חוק השימור הזה מתקיים עבור כל צופה, אף על פי שצופים שונים יראו ווקטורים אחרים.

<u>הערה:</u> במהירויות נמוכות, ה4-ווקטור של התנע היחסותי מתלכד עם התנע הקלאסי, וחוקי השימור הופכים לחוקי השימור הקלאסיים.

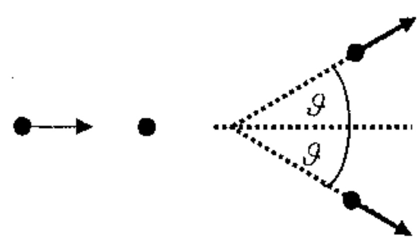
<u>דוגמא מצויינת ממאז"ה:</u>

התנגשות בין שני חלקיקים זהים בזוית פיזור שווה – חישוב זווית הסטייה

בעקבות הספר Smith: Introduction to Special Relativity

יחידות: $c = 1$

נתונים שני חלקיקים זהים בעלי אותה מסה m. חלקיק אחד נח ואחד נע, כמתואר **באיור ב-1**. החלקיק הנע פוגע בחלקיק הנח בצורה כזאת שאחרי ההתנגשות שני החלקיקים נעים באותה מהירות, בכיוונים היוצרים זווית שווה עם הכיוון המקורי של התנועה – ϑ. מהי הזווית ϑ?



איור ב-1: התנגשות בין שני חלקיקים זהים

נסמן את החלקיק הנע ב- a, ואת התנע שלו על ידי: $P_a^{(4)} = \begin{pmatrix} E_a & P_a & 0 & 0 \end{pmatrix}$. התנע של החלקיק השני לפני ההתנגשות הוא $P_b^{(4)} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

כיון שמסתו של a היא m, מתקיים $\left\| P_a^{(4)} \right\|^2 = E_a^2 - P_a^2 = m^2$.

אחרי ההתנגשות, התנע-אנרגיה של חלקיק אחד יסומן ב-$P^{(4)} = (E \quad P\cos\vartheta \quad P\sin\vartheta \quad 0)$,

ושל השני ב-$P^{(4)} = (E \quad P\cos\vartheta \quad -P\sin\vartheta \quad 0)$.

מחוק שימור האנרגיה נובע כי:

(ב-3)
$$E_a + m = 2E$$

ומחוק שימור התנע עבור ציר x ונקבל:

(ב-4)
$$P_a = 2P\cos\vartheta$$

נציב במשוואה **(ב-4)** $P_a^2 = E_a^2 - m^2$, וכן $P^2 = E^2 - m^2$, ונקבל:

(ב-5)
$$\sqrt{E_a^2 - m^2} = 2\sqrt{E^2 - m^2}\cos\vartheta$$

(ב-6)
$$\sqrt{(E_a + m)(E_a - m)} = 2\sqrt{(E+m)(E-m)}\cos\vartheta$$

נציב באגף ימין את משוואת האנרגיה, ונקבל:

(ב-7)
$$\sqrt{(E_a + m)(E_a - m)} = 2\sqrt{\left(\frac{E_a + m}{2} + m\right)\left(\frac{E_a + m}{2} - m\right)}\cos\vartheta$$

ולכן:

(ב-8)
$$\sqrt{(E_a + m)(E_a - m)} = \sqrt{(E_a + 3m)(E_a - m)}\cos\vartheta$$

התוצאה הסופית היא לכן:

(ב-9)
$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{E_a + m}{E_a + 3m}}$$

כלומר, אם נתון כי שני החלקיקים נעים אחרי ההתנגשות בזוויות סטייה שוות, הרי שהזווית ניתנת מתוך האנרגיה הקינטית של החלקיק הנע ומסתם של שני החלקיקים.

כאשר אנחנו כותבים את התוצאה ביחידות הרגילות נקבל:

(ב-10)
$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{E_a + mc^2}{E_a + 3mc^2}}$$

בקירוב הקלאסי, שבו $E_a \to mc^2$, מתקיים $\cos\vartheta = \sqrt{\frac{1}{2}}$, תוצאה שאפשר לקבל מן הפיזיקה הקלאסית.

נסכם את נושא האנרגיה-מסה: על פי תורת היחסות, המסה של מערכת חלקיקים אינה נשמרת. אפשר להגדיל את המסה של המערכת ע"י הוספת אנרגיה, ואפשר להקטין את המסה ע"י לקיחת אנרגיה. הקשר בין שינוי המסה ובין שינוי האנרגיה הוא:

$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$

ואפשר גם לכתוב:

$$\boldsymbol{E = mc^2}$$

הפוטונים

ראינו כי התנע של חלקיק בודד הוא:

$$P^{(4)} = (m_0 c\gamma, m_0 \vec{v}\gamma) = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$$

והערך המוחלט של מהירותו תהיה:

$$v = \frac{\|\vec{P}\|}{E/c^2}$$

אם נניח שלחלקיק מסוים יש מהירות c , נקבל:

$$\frac{E}{c} = \|\vec{P}\|$$

והמסה שלו תהיה:

$$\|P^{(4)}\|^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \|\vec{P}\|^2 = 0$$

לכן מסת כל חלקיק הנע במהירות האור היא אפס, וכל חלקיק עם מסה אפסית יהיה חייב לנוע במהירות האור.

פוטון הוא "חלקיק" כזה. אין לו מסה, לכן מהירותו לכל צופה תהיה מהירות האור. יש לו תנע וגם אנרגיה, שהקשר ביניהם הוא:

$$E = Pc$$

שזהו מקרה פרטי של הצורה הכללית $E^2 = (mc^2)^2 + (Pc)^2$ עבור חלקיק חסר מסה.

למערכת של פוטונים עשויה להיות מסה יחסותית. למשל 2 פוטונים הנעים במהירויות שוות והפוכות כיוון:

$$P_1^{(4)} = (E, -\vec{P}), \qquad P_2^{(4)} = (E, \vec{P}) \Rightarrow P_{sys}^{(4)} = (2E, 0) \Rightarrow M_{sys} = 2E$$

<u>מהו הפוטון?</u>

בעצם פוטון זה "חלקיק" הנע במהירות האור, והוא החלקיק שנושא את הקרינה האלקטרומגנטית. כל ספקטרום הגלים האלקטרומגנטיים מורכב מפוטונים. היחסות טוענת כי כל גל אלקטרומגנטי הוא גם חלקיק. בשפת גלים, מבחינים בין הגלים השונים בעזרת התדירות או אורכי הגל שלהם. ההתייחסות לאור כחלקיק דורשת בחירת תכונות מדידות שונות להפרדה בין הפוטונים השונים - לא רק אורך גל, אלא גם אנרגיה ותנע.

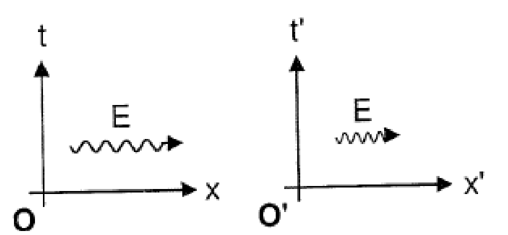
ראינו הוכחות לזה שהאור הוא גל, והוכחות לכך שהאור הוא חלקיק. מה הלו"ז? המציאות מורכבת, והתשובה היא שלגלים אלקטרומגנטיים יש מורכבות. ההסתברות למדוד את מיקום הפוטון במיקום מסוים במרחב מתוארת לפי פונקציית הגל שלו, וזה לא חשוב למבחן אז אני לא אפרט.

". מה

ג.2. הקוונטיזציה של הפוטונים

יחידות: $c = 1$

כיצד משתנה האנרגיה של הפוטון במעבר ממערכת למערכת? כדי לענות על השאלה נסתכל על צופה במערכת O הרואה פוטון הנע לאורך הכיוון החיובי של ציר x באנרגיה E. ארבע-וקטור התנע-אנרגיה של הפוטון במערכת O,



איור ג-2: הפוטון כפי שהוא נראה בשתי המערכות

בהשמטת שני הצירים המרחביים האחרים, הוא $P^{(4)} = (E, E)$. עבור צופה O' הנע ביחס למערכת O במהירות β (חיובית) לאורך ציר x יתקיים:

$$P'^{(4)} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ E \end{pmatrix} = E\gamma \begin{pmatrix} 1-\beta \\ 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\ E\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \end{pmatrix} \quad \text{(ג-6)}$$

$$p' = \begin{pmatrix} \dots \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots \\ E \end{pmatrix} = E/(1-\beta) \dots \begin{pmatrix} \dots \\ E\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$E' = E\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \textbf{(ג-7)}$$

הפקטור המקשר בין שתי האנרגיות זהה בדיוק להיסט התדירות של אפקט דופלר שקבלנו בחלק השני של הספר עבור שתי מערכות המתרחקות זו מזו:

$$f' = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \ . \qquad \textbf{(ג-8)}$$

שימו לב כי הסטת התדירות היא הסטה לאדום, כלומר לתדירות קטנה יותר. הדבר נובע מן העובדה כי ביחס לצופה היושב ב-**'O**, הפוטון והמערכת **O** נעים בכיוונים הפוכים. אם הפוטון "יצא" מן הראשית של **O** אחרי שהיא התרחקה מספיק מן הראשית של **'O**, על הפוטון לנוע <u>אל</u> הראשית של **'O**, בעוד שהראשית של **O** <u>מתרחקת</u> מן הראשית של **'O**. תיאור זה מתאים עם הסטת דופלר לאדום שקבלנו בסעיף **ה.1** בחלק השני של הספר.

במקרה ההפוך, שבו הצופה היושב ב-**'O** רואה את המערכת **O** ואת הפוטון נעים באותו כיוון נקבל כי:

$$E' = E\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \textbf{(ג-9)}$$

ביטוי זה מתאים להסטת דופלר לכחול שקבלנו בסעיף **ה.1** עבור מערכת המתרחקת מן הצופה, שם:

$$f' = f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \textbf{(ג-10)}$$

קבלנו אפוא כי הטרנספורמציות של האנרגיה והתדירות הן זהות לחלוטין. כלומר, אם במערכת כלשהיא התדירות והאנרגיה של הפוטון הם E_0 ו-f_0, הרי שבכל מערכת שהיא, היחס בין האנרגיה והתדירות, E/f, יישאר בערך קבוע – E_0/f_0. שימו לב כי האנרגיה והתדירות יכולים לקבל כל ערך שהוא, בעוד שהיחס נשאר קבוע. טבעי על כן להניח כי התדירות של הפוטון קשורה תמיד לאנרגיה שלו בקשר ליניארי:

$$E = hf \qquad \textbf{(ג-11)}$$

כאשר h הוא קבוע של הטבע.

חשוב לציין כי את הקשר בין התדירות של הפוטון והאנרגיה שלו הציע פלנק (**PLANCK,** MAX 1858-1947) בגלל בעיות תיאורטיות הקשורות לקרינת גוף שחור, שאינן מענייננו של ספר זה. הקבוע של משוואה **(ג-11)** נקרא על כן קבוע פלנק וערכו:

$$h = 6.63\times10^{-27}\ erg - s = 4.13\times10^{-21}\ MeV - s \qquad \textbf{(ג-12)}$$

באופן דומה, אפשר להחליף את התדירות באורך הגל ולקבל:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \qquad \textbf{(ג-13)}$$

הרלוו. אם כו. כי:

$E = \frac{hc}{\lambda}$ **(ג-13)**

קבלנו, אם כן, כי:

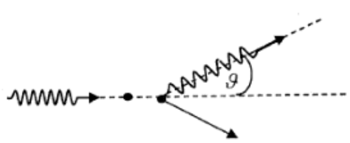
הפוטונים הם חלקיקים חסרי מסה הנעים במהירות האור, שלהם אנרגיה

$$E = pc = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

הגענו אפוא לקוונטיזציה של האור. גל אלקטרומגנטי בתדירות מסוימת, f, חייב בהכרח להיות מורכב מפוטונים, שלכל אחד מהם יש אנרגיה מסוימת, hf. גל אור בתדירות f בעל אנרגיה E_{gal} חייב בהכרח להיות מורכב ממספר שלם של פוטונים – E_{gal}/hf. האנרגיה של אותו גל מופיעה אך ורק ביחידות של hf. אין להשיג בשוק האנרגיה כמויות של $1.5hf$, ואפילו לא פוטון באותה תדירות שלו אנרגיה של $1.0000000005hf$.

הקוונטיזציה של מסת החלקיקים בעלי המסה הותלפה, אפוא, בקוונטיזציה של אנרגיה עבור החלקיקים חסרי המסה, ברוח תורת היחסות המתייחסת למסה כצורה של אנרגיה. אולם, בניגוד לקוונטיזציית המסה, הקוונטיזציה של הפוטונים היא מורכבת יותר, מפני שיחידת האנרגיה היא תלויית צופה ותלויית תדירות. כפי שראינו המעבר מצופה לצופה משנה את יחידת האנרגיה של הגל באותו יחס כמו שינוי התדירות. לעומת זאת המסה של חלקיק היא גודל אינווריאנטי שאינו משתנה מצופה לצופה.

מסת החלקיקים היסודיים היא מסה קטנה מאוד. גרם אחד של פרוטונים מכיל $\sim 6 \cdot 10^{23}$ פרוטונים, ועל כן קשה להפריד בין פרוטון אחד לשני ולהבחין בקוונטיזצית המסה של החומר. גם האנרגיה של הפוטון היא קטנה מאוד. לפוטון באורך גל של חצי מיקרון יש אנרגיה של $\sim 4 \cdot 10^{-12}\ erg$. מנורת להט הפולטת אור בהספק של $100W$ פולטת $\sim 2.5 \cdot 10^{20}$ פוטונים בכל שנייה. כתוצאה מן הכמות האדירה של הפוטונים, קשה להפריד בין פוטון אחד לשני ולהבחין בקוונטיזציה של האור.



<u>אפקט קומפטון:</u>

בניסוי שנערך ב1922, יצר קומפטון קרינת X חזקה שפגעה בשכבה דקה מאוד של מתכת. הקרינה פוזרה ע"י המתכת לכל הכיוונים, אך מדידה מדויקת של אורכי הגל של הקרינה שפוזרה הראתה כי חל שינוי קטן באורך הגל של הקרינה.

נחשב במערכת יחידות טבעית (c=1), בה האנרגיה של הפוטון שווה ל- $E = P$. ה-4-ווקטור תנע-אנרגיה של האלקטרון יסומן ב- $P_e^{(4)}$ ושל הפוטון המוסט יהיה $\tilde{P}^{(4)}$.

משימור אנרגיה נקבל:

$$E + E_e = \tilde{E} + \sqrt{m_e^2 + P_e^2} \Rightarrow \left(E + m_e - \tilde{E}\right)^2 = m_e^2 + P_e^2$$

משימור תנע נקבל:

$$P = \tilde{P} + P_e \Rightarrow P - \tilde{P} = P_e \Rightarrow P^2 + \tilde{P}^2 - 2P\tilde{P}\cos\theta = P_e^2$$

נציב ונקבל:

$$\left(E + m_e - \tilde{E}\right)^2 = m_e^2 + P^2 + \tilde{P}^2 - 2P\tilde{P}\cos\theta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2m_e\left(E - \tilde{E}\right) = -E^2 - \tilde{E}^2 + 2E\tilde{E} + P^2 + \tilde{P}^2 - 2P\tilde{P}\cos\theta$$

נציב $E = P$ עבור פוטונים:

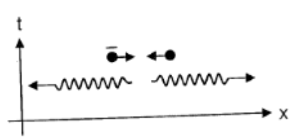
$$2m_e\left(E - \tilde{E}\right) = E\tilde{E}(1 - \cos\theta)$$

נציב $E = h\nu = \frac{h}{\lambda}$

$$2m_e\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\tilde{\lambda}}\right) = \frac{h}{\lambda}\frac{h}{\tilde{\lambda}}(1 - \cos\theta) \Rightarrow \Delta\lambda = \tilde{\lambda} - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) = \lambda_{c,e}(1 - \cos\theta)$$

אורך גל קומפטון של האלקטרון מוגדר להיות:

$$\lambda_{c,e} = \frac{h}{m_e c} = 2.4 \cdot 10^{-10} cm$$



לפוטון באורך גל $\lambda_{c,e}$ יש אנרגיה $\frac{hc}{\lambda_{c,e}} = m_e c^2$, מתקבל כי השינוי באורך הגל של הפוטון הוא ותלוי בזווית הפיזור.

<u>פוטונים וחלקיקים:</u>

נסתכל על איון של חלקיק ואנטי חלקיק (בפרט, אלקטרון ופוזיטרון), מסת זהה ושווה לm.
באותה מערכת יש להם אותה אנרגיה ומהירות שווה והפוכת סימן. מסת המערכת היא 2m
המטען הכולל של המערכת יהיה שווה לאפס. בעת התנגשות החלקיקים, שניהם מתאיינים
והופכים לזוג פרוטונים, שנושאים תנע שונה בכיוונים הפוכים. מפאת שימור אנרגיה, אורך
הגל של הפוטונים שנוצרו יהיה קטן יותר מאורך גל קומפטון של החלקיקים במערכת מרכז המסה שלהם.
עבור אלקטרון ופוזיטרון, אנרגיית הפוטונים חייבת להיות גדולה מ $0.511Mev$, כלומר, הפוטונים יהיו מאוד אנרגטיים.

<u>התכונות המתמטיות של מרחב מינקובסקי: (תסלחו לי, אין לי כוח לתרגם את זה)</u>

Mathematical properties of the space-time of special relativity

We have seen that the Lorentz transformation follows from the invariance of the interval

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad .$$

- We may wish to consider the group of all transformations that leave s^2 invariant, known as the homogeneous Lorentz group.
- From the first postulate it follows that the mathematical equations expressing the laws of nature must be **covariant**, namely invariant in form, under the transformations of the Lorentz group.
- These equations must therefore be mathematical relations among Lorentz-invariant scalars, 4-vectors, 4-tensors, etc.

We will now review the basic elements of tensor analysis in a non-Euclidean vector space (e.g. with the above norm).

From now on we denote the coordinates of our four-dimensional continuum of space-time x^0, x^1, x^2, x^3. We suppose that there's a well-defined transformation that yields new coordinates x'^0, x'^1, x'^2, x'^3:

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \alpha = 0,1,2,3$$

(For the moment the transformation is not specified).

Tensors of rank k associated with the space-time point x are defined by their transformation properties under the transformation $x \to x'$:

- A scalar (k=0) is a single quantity whose value is not changed by the transformation, e.g. s^2.
- For vectors (k=1) two kinds must be distinguished:
  - Contravariant vectors $A^\alpha \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3)$ that transform according to the rule:

$$\boxed{A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta}$$

Where the derivatives are computed from the transformation, and the repeated index β implies summation ("Einstein notation"); explicitly:

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^0} A^0 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^3} A^3$$

- Covariant vectors $B_\alpha \equiv (B_0, B_1, B_2, B_3)$ that transform according to the rule:

$$\boxed{B'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta}$$

Or, explicitly:

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^0}{\partial x'^\alpha} B_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^\alpha} B_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^\alpha} B_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^\alpha} B_3$$

Where the derivatives are computed from the inverse transformation rule $x^\beta = x^\beta(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$.

- ✓ It is straightforward to show that if the transformation law is linear, the space-time coordinates x^0, x^1, x^2, x^3 are the components of a contravariant vector, while the derivatives with respect to these coordinates $\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}$ form a covariant vector.
- ✓ In other words, $\boldsymbol{x}^{(4)}$ is a contravariant vector, while $\boldsymbol{\nabla}^{(4)}$ is a covariant vector.
- ✓ The terms "covariant" and "contravariant" refer to the way a vector varies with a change of basis (or scale): the components of a covariant (contravariant) vector co-vary (contra-vary) with a change of basis, i.e. the components are transformed by the same (the inverse) of the matrix (or scale factor) that transforms the basis vectors.
- ✓ It is also possible to show that in the special case that the (general) transformation $x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ is the Lorentz transformation, $(x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$ is a covariant vector; hence $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ and $x_\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$.

- A contravariant tensor of rank two $F^{\alpha\beta}$ consists of 16 quantities that transform according to:

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta}$$

While a covariant tensor of rank two $G_{\alpha\beta}$ transforms as:

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial \partial x'^\beta} G_{\gamma\delta}$$

And a mixed second rank tensor H^α_β transform as:

$$H'^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial \partial x'^\beta} H^\gamma_\delta$$

- And so on…

The inner or scalar product is defined in terms of the components of one covariant vector and one contravariant vector:

$$\boxed{B \cdot A \triangleq B_\alpha A^\alpha.}$$

Which is invariant (scalar) under the transformation:

$$B' \cdot A' = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} B_\beta A^\gamma = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\gamma} B_\beta A^\gamma = \delta_{\beta,\gamma} B_\beta A^\gamma = B \cdot A$$

- This may be generalized for tensors of any rank.

The above definitions are general. For the specific geometry of space-time in special relativity, as defined by the Lorentz transformation, we obtain:

$$x_\alpha x^\alpha = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Which we recognize as the invariant interval (or norm) s^2.

In differential form, the infinitesimal interval is:

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

This norm, aka metric, is a special case of the general differential length element:

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Where $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ is called the (covariant) **metric tensor**.

In the special case of the flat (Minkowski) space-time of special relativity (and in contrast to the curved space-time of general relativity) the metric tensor is diagonal, with elements

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

The contravariant metric tensor $g^{\alpha\beta}$ is obtained in the same way from the components of the covariant vector x_α:

$$(ds)^2 = g^{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

Which, for Minkowski space-time:

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2$$

Results in:

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$$

Mathematically the contravariant metric tensor is defined as the normalized co-factor of the covariant metric tensor, and this implies:

$$g^{\alpha\beta} = \left(g_{\alpha\beta}\right)^{-1}$$

Namely

$$g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Which can be easily confirmed for the special case of Minkowski space-time.

The above definitions also imply that the covariant coordinate 4-vector x_{α} can be obtained from the contravariant x^{β} by contraction with $g_{\alpha\beta}$:

$$x_{\alpha} = g_{\alpha\beta}x^{\beta}$$

And similarly

$$x^{\alpha} = g^{\alpha\beta}x_{\beta}$$

- In fact, contraction with the metric tensors is the procedure for changing an index on any tensor from contravariant to covariant and vice versa, such as:

$$F^{..\alpha..}_{...} = g^{\alpha\beta}F^{...}_{..\beta..} \quad , \quad G^{...}_{..\alpha..} = g_{\alpha\beta}G^{..\beta..}_{...}$$

Now, since the metric tensor for Minkowski space-time is

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

It follows that any contravariant 4-vector (A^0, A^1, A^2, A^3) has a covariant partner $(A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$. This we may write concisely:

$$A^{\alpha} = (A^0, \boldsymbol{A}), \quad A_{\alpha} = (A^0 - \boldsymbol{A})$$

And the invariant scalar product of two four-vectors is therefore:

$$B \cdot A \equiv B_{\alpha}A^{\alpha} = B^0A^0 - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$$

Next we discuss the contravariant differentiation operator:

We have already mentioned that differentiation with respect to a contravariant component of the coordinate 4-vector transforms as a component of a covariant vector:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$$

Similarly, differentiation with respect to a covariant component gives a contravariant vector; we may first rewrite the covariant differentiation using the contraction of the contravariant coordinate:

$$x_{\alpha} = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} x^{\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = g_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} = \sum_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{\alpha} g_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \sum_{\alpha} g_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$$

Where we also used the symmetry of the metric tensor. By recognizing that the expression on the RHS is in fact a contraction operation, and that $\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$ on the LHS is a covariant vector, we may conclude that $\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$ is a contravariant vector.

We therefore employ the notation:

$$\partial^{\alpha} \triangleq \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{0}}, -\nabla\right)$$

$$\partial_{\alpha} \triangleq \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{0}}, \nabla\right)$$

The 4-divergence of a 4-vector is then the invariant scalar product:

$$\partial^{\alpha} A_{\alpha} = \partial_{\alpha} A^{\alpha} = \frac{\partial A^{0}}{\partial x^{0}} + \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$

This is a familiar equation in classical electrodynamics (the continuity of charge and current densities and the Lorentz condition on the scalar and vector potentials), and it shows how the covariance of such physical laws emerges.

Finally, the four-dimensional Laplacian operator is defined to be the invariant contraction:

$$\boxdot \triangleq \partial_{\alpha} \partial^{\alpha} = \frac{\partial^{2}}{\partial {x^{0}}^{2}} - \nabla^{2}$$

Which is just the operator of the wave equation in vacuum.

נספחים מהספר

Saturday, June 12, 2021 5:26 PM

<u>נספח 1 - מציאת טרנספורמציית לורנץ, ספר מאז"ה, עמודים - 78 - 80</u>

ב.2. מציאת נוסחת הטרנספורמציה

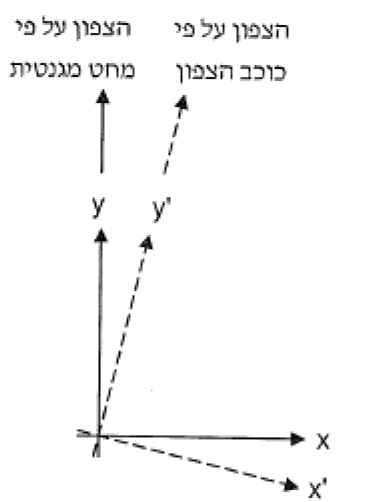
בסעיף זה נמצא את נוסחת הטרנספורמציה מתוך הנחות פשוטות ומתוך שימור האינטרוול. אך לפני שנמשיך הנה סיפור שהתרחש בממלכתו של המלך המפורסם מודדיהו, בן אחיינו של הבלש תושיהו.

I. המשל על שתי שיטות המדידה

בעקבות הספר Taylor & Wheeler: SpaceTime Physics

לפני שנים רבות, חי בממלכה רחוקה המלך מודדיהו. שמו ניתן לו עוד בשנות ילדותו המוקדמות, כשהתפרסם ברחבי הממלכה בחיבתו הגדולה למדידות מדויקות. כאשר עלה על כס מלכותו הזמין מיד שני מודדים בעלי שם עולמי, חתני פרס נובל למדידות, למדוד את מיקומם של כל הצמתים הראשיים בממלכה בדיוק המקסימאלי. משטרת הממלכה הייתה אמורה להשתמש בקואורדינטות המדויקות של הצמתים הראשיים כדי לפרוש את כוחותיה ביעילות המקסימאלית. אולם לרוע המזל הסתכסכו שני המודדים בעלי השם העולמי, כפי שקורה לעיתים קרובות בין מדענים דגולים. הסכסוך היה כה קשה עד ששני המודדים לא היו מסוגלים לעבוד יחד. באין כל ברירה אחרת, החליט המלך כי אחד המודדים יעבוד ביום והשני בלילה. למרבה המזל פעלו בממלכה שתי משטרות – משטרת היום ומשטרת הלילה. משטרת היום השתמשה בקואורדינאטות של מודד היום ומשטרת הלילה באלה של מודד הלילה.

כדי לקבוע את הקואורדינאטות של כל הצמתים השתמשו שני המודדים באותה ראשית – הכניסה לארמונו של המלך מודדיהו. שניהם גם השתמשו במערכת צירים אנכית, כשציר אחד פונה לצפון וציר אחד למזרח. מסיבות היסטוריות, שני המודדים השתמשו באותן יחידות: כיוון מזרח נמדד במטרים, ואילו הצפון נמדד ביארדים. השימוש ביארדים נשאר כשריד מן התקופה הקולוניאליסטית, בה שלטו הבריטים בממלכה והנהיגו בה את היחידות שלהם. אולם היה הבדל קטן בין שני המודדים. את הצפון המדויק אבחן מודד היום באמצעות מחט מגנטית שהיתה ברשותו, ואילו מודד הלילה זיהה את הצפון באמצעות כוכב הצפון.



איור ב-2: מערכות הצירים של שני המודדים

כידוע לכולנו, הצפון המגנטי אינו מתלכד עם הצפון האמיתי, ועל כן היה הבדל קטן בין שתי מערכות הצירים. בגלל ההבדלים בין שני הכיוונים היו הקואורדינאטות של שני המודדים הדגולים שונות במקצת. עובדה זו לא הפריעה לעבודה התקינה של שתי המשטרות, משטרת היום ומשטרת הלילה, שלא היה ביניהן קשר אופרטיבי. אולם, יום אחד החליט המלך מודדיהו למנות

מפקד אחד לשתי המשטרות, וזה גילה להפתעתו המוחלטת כי שתי המשטרות עבדו עד היום בקואורדינטות שונות! אחרי שהתאושש מן הזעזוע החליט המפקד החדש להכניס מערכת קואורדינטות אחת לשימושן של שתי המשטרות. לשם כך הוא קרא לשני המודדים וביקש מהם להסביר מדוע הקואורדינאטות של שניהם שונות זו מזו, ומה הקשר בין הקואורדינאטות של היום לאלו של הלילה. שני הגאונים לא יכלו לתת תשובה מספקת. למרבה המזל הבלש תושיהו היה אחי סבו של המלך מודדיהו, ועל כן הוזמן תושיהו לנסות לפתור את התעלומה.
תושיהו בחן בזהירות את רשימותיהן של שני המודדים, והשווה את הקואורדינאטות של שניהם עבור צמתים אחדים. אחרי שבוע של ניסיונות מייאשים החליט תושיהו לבצע פעולה נועזת, ולהמיר את המרחקים כלפי צפון למטרים בעזרת הכפלה בקבוע η. לאחר שביצע את הטרנספורמציה גילה תושיהו קשר מעניין בין הקואורדינאטות של תחנת הרכבת של שתי המערכות - הגודל $\sqrt{(x_1)^2+(\eta y_1)^2}$ שחושב לפי נתוניו של מודד היום, שווה בדיוק לגודל $\sqrt{(x'_1)^2+(\eta y'_1)^2}$ של מודד הלילה. בדיקה של צמתים נוספים הראתה כי אותה התופעה מופיעה בכל הצמתים. מיד נזכר תושיהו בשעורי המבוא לפיזיקה מודרנית ובשיעורי האלגברה הליניארית שבהם למד על שימור המרחק בטרנספורמציית סיבוב, והבין כי המעבר בין זוג קואורדינאטות אחד לשני הוא בעצם טרנספורמציית סיבוב. טרנספורמציית הסיבוב מתוארת במפורט בנספח ב.

יתרה מזו, הבלש תושיהו הצליח לגלות את חוקי הטרנספורמציה בין שתי השיטות. הוא גילה כי קיימת מטריצה כך שעבור כל נקודה בממלכה מתקיים:

$$\begin{pmatrix} x \\ \eta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -\sqrt{1-k^2} \\ \sqrt{1-k^2} & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \eta y' \end{pmatrix} \qquad \text{(ב-12)}$$

אחרי מחשבה מאומצת ועיון ברשימותיו מן הקורס בפיזיקה מודרנית גילה תושיהו כי הפקטור k קשור בעצם לזווית θ שבין הצפון האמיתי לצפון המגנטי, כאשר $k=\cos(\theta)$.

תושיהו החליט לעשות מעשה נועז: הוא החליט להמליץ בפני המלך על שינוי היחידות של הציר הצפוני והעברתן גם הן למטרים. הוא קרא ליחידות החדשות x ו- $\bar{y}$. ואחרי ימים אחדים של בלבול, אף אחד כבר לא זכר את היחידות הישנות. אחר כך עשה המלך מודדיהו בעצתו של הבלש תושיהו צעד נוסף, וקרא ליחידות החדשות x ו- y. ביחידות החדשות נראתה הטרנספורמציה:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -\sqrt{1-k^2} \\ \sqrt{1-k^2} & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{(ב-13)}$$

והתאפשר שיתוף פעולה פורה בין שתי המשטרות.

II. הנמשל

אנו רוצים ליישם את סיפורם של שני המודדים בממלכת מודדיהו לשני פיזיקאים המודדים את מיקומו של מאורע במרחב החלל-זמן ביחס לראשית. לשם כך נשים לב כי לשני הסיפורים מספר נקודות משותפות:

- התפקיד של המודד הוא לתת את מיקומם של צמתי הממלכה על ידי קואורדינטות $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- תפקידו של הפיזיקאי הוא למדוד את מיקומו של אירוע במרחב חלל-זמן $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$.

- בממלכה קיימות שתי שיטות מדידה. שתי מערכות הצירים מסובבות זו ביחס לזו.
- אצל הפיזיקאים קיימות שתי מערכות אינרציאליות של שני צופים הנעים זה ביחס לזה במהירות קבועה.

- לשתי שיטות המדידה אותה הראשית.
- הראשיות המרחביות של שני הצופים האינרציאליים מתלכדות בזמן $t = 0$.

- לכל צומת בממלכה (מלבד הראשית) מתקיים כי $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- לכל אירוע במרחב חלל-זמן (שאינו בראשית) מתקיים $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$.

- הבלש תושיהו גילה כי תמיד מתקיים $x^2 + \eta y^2 = x'^2 + \eta y'^2$.
- הנחת היסוד של תורת היחסות הביאה אותנו למסקנה כי בכל מערכת צירים מתקיים: $(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$.

- הטרנספורמציה בין שתי שיטות המדידה קיבלה צורה פשוטה יותר אחרי שהבלש תושיהו החליף את היחידות בציר y. קיימת טרנספורמציה ליניארית הממירה בין מערכות המודדים: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

נחפש יחידות דומות גם אצלנו, אשר יאפשרו טרנספורמציה ליניארית פשוטה בין שתי המערכות.

נספח 2 - חישובי מטריצת הטרנספורמצייה, מאז"ה, עמודים 82

IV. חישוב אברי מטריצת הטרנספורמציה

אנו דנים במערכת **O'** הנעה במהירות $\beta = \frac{v}{c}$ ביחס למערכת **O**. בפרק זה נניח כי הטרנספורמציה המעבירה את הקואורדינאטות של אירוע מצופה לצופה היא טרנספורמציה ליניארית. הנחת הליניאריות דרושה, למשל, כדי להבטיח כי מסלול של חלקיק הנראה כקו ישר במערכת אחת יישאר קו ישר בכל מערכת. קו ישר במרחב מינקובסקי מייצג תנועה במהירות קבועה. על פי החוק הראשון של ניוטון זהו מסלול של גוף שסכום הכוחות הפועלים עליו שווה לאפס. הליניאריות של הטרנספורמציה דרושה כדי להבטיח שהחוק הראשון של ניוטון, למשל, יהיה תקף בכל מערכת.

טרנספורמציה המיוצגת על ידי מטריצה מבטיחה כי הטרנספורמציה היא ליניארית וכי הראשית של מרחב מינקובסקי במערכת אחת עוברת לראשית של המערכת השנייה. על כן נניח כי הקואורדינאטות של אירוע במערכת **O'** – $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$, עוברות לקואורדינאטות $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ במערכת **O** על ידי מטריצה **A** המקיימת:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \qquad \text{(ב-19)}$$

נדרוש שהטרנספורמציה תשמור על האינטרוול בין כל אירוע $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ ובין הראשית $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
כלומר, צריך להתקיים לכל x ולכל t:

82

$$\tau^2 = t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$$ (ב-20)

שימו לב כי במרחק בין הראשית ובין נקודה כלשהיא אנו משתמשים בביטוי τ במקום בביטוי $\Delta\tau$.

נסתכל על שני מקרים ומהם נסיק מהם איברי מטריצת הטרנספורמציה.

<u>מקרה א' – אירוע המתרחש בראשית המרחבית של המערכת O'</u>

נסתכל קודם כל על אירוע המתרחש בראשית המרחבית של המערכת **O'** בזמן t' כלשהוא, שעבורו $x' = 0$. משוואת הטרנספורמציה תהיה:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix}$$ **(ב-21)**

כלומר:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}t' \\ A_{21}t' \end{pmatrix}$$ **(ב-22)**

מכיוון שבחרנו להסתכל על המקרה בו האירוע מתרחש בראשית של **O'**, נוכל לדעת את x, שהוא מיקום אותו אירוע במערכת **O**, מפני שזהו מיקום הראשית של **O'** ביחס למערכת **O**.

כיוון ש-**O'** נעה במהירות $\beta = \frac{v}{c}$ ביחס למערכת **O**, מיקומה של הראשית **O'** ביחס למערכת **O** נתון בנוסחה הבאה:

$$x = \beta \cdot t$$

נציב את x ו-t שקבלנו מהטרנספורמציה במשוואה **(ב-22)** ונקבל:

$$A_{21}t' = \beta \cdot (A_{11}t')$$ **(ב-23)**

כלומר:

$$A_{21} = \beta \quad A_{11}$$ **(ב-24)**

נדרוש את חוק שימור האינטרוול בין האירוע הזה ובין הראשית המשותפת לשתי המערכות.

האינטרוול במערכת **O'** הוא t'^2 ובמערכת **O** הוא $t^2 - x^2$, ולכן נדרוש: $t^2 - x^2 = t'^2$.

נציב את t ו-x כפי שהתקבלו במשוואה **(ב-22)** בביטוי לחוק שימור האינטרוול ונקבל:

$$A_{11}^2 t'^2 - A_{21}^2 t'^2 = t'^2$$ **(ב-25)**

לאחר חלוקה ב-t'^2, והצבה של A_{21} שקבלנו במשוואה **(ב-24)** נקבל:

$$A_{11}^2 - \beta^2 A_{11}^2 = 1$$ **(ב-26)**

מכך נוכל לקבל את האיבר הראשון במטריצת הטרנספורמציה:

$$A_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$ **(ב-27)**

שהוא ביטוי המוכר לנו מן הסעיפים הקודמים.

מכך נקבל גם את A_{21} :

$$A_{21} = \beta\gamma$$ **(ב-28)**

ולסיכום, כאשר $x' = 0$:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \ t' \\ \beta \ \gamma \ t' \end{pmatrix}$$ **(ב-29)**

כבר כאן אפשר לראות כי הזמן t עובר מתיחה בפקטור γ ביחס לזמן t', עבור שני מאורעות שהתרחשו באותו מקום (בראשית) של המערכת **O'**.

<u>מקרה ב' - אירוע כלשהוא</u>

נדון באירוע שבו במערכת **O'** $t' \neq 0$ $x' \neq 0$, ונסתכל על האינטרוול בינו ובין הראשית.

מתוך המקרה הראשון אנו יודעים כי משוואת הטרנספורמציה תהיה :

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & A_{12} \\ \beta\gamma & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$ **(ב-30)**

כלומר :

$$t = \gamma t' + A_{12} x'$$ **(ב-31)**

$$x = \beta\gamma t' + A_{22} x'$$ **(ב-32)**

הדרישה לאיטוריאנטיות של האינטרוול בין האירוע ובין הראשית נכתבת באופן הבא :

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2$$ **(ב-33)**

נוכל להציב את משוואות הטרנספורמציה שקבלנו בדרישה זו ולקבל :

$$t'^2 - x'^2 = (\gamma t' + A_{12} x')^2 - (\beta\gamma t' + A_{22} x')^2$$ **(ב-34)**

לאחר פתיחת הסוגריים וקיבוץ מחדש מקבלים :

$$t'^2 - x'^2 = \gamma^2 (1-\beta^2) t'^2 + (A_{12}^2 - A_{22}^2) x'^2 + (2\gamma A_{12} - 2\beta\gamma A_{22}) t' x'$$ **(ב-35)**

אך כזכור :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ **(ב-36)**

ולכן $\gamma^2 (1-\beta^2) = 1$. נציב זאת במשוואה **(ב-35)** ונקבל :

$$t'^2 - x'^2 = t'^2 + (A_{12}^2 - A_{22}^2) x'^2 + (2\gamma A_{12} - 2\beta\gamma A_{22}) t' x'$$ **(ב-37)**

שוויון זה תקף לכל x' ולכל t', ועל כן המקדמים של x'^2 ושל המכפלה $t'x'$ חייבים להיות שווים.

על ידי השוואת המקדמים נקבל שתי משוואות :

$$A_{12}^2 - A_{22}^2 = -1 \quad \text{(ב-38)}$$

$$2\gamma A_{12} - 2\beta\gamma A_{22} = 0 \Rightarrow A_{12} = \beta A_{22} \quad \text{(ב-39)}$$

נציב את משוואה (ב-39) במשוואה (ב-38) ונקבל:

$$A_{22}^2 - \beta^2 A_{22}^2 = 1 \Rightarrow A_{22} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \quad \text{(ב-40)}$$

עתה נוכל לכתוב את טרנספורמציית המעבר השלמה בין המערכות:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{(ב-41)}$$

נספח 3 - הוכחת הכללה לתנועה כללית של טרנס' לורנץ

הכללה לתנועה בכיוון כללי **שימושי בהמשך (מערכת צמודה לגוף נע)**

Proof:

We assume, again, that K and K' coincide at $t = t' = 0$; the components of $\boldsymbol{x}$ in parallel and perpendicular to $\boldsymbol{v}$ are

$$\boldsymbol{x}_{\parallel} = x_{\parallel}\hat{e_v} = x\cos\phi\,\hat{e_v} = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}}{v}\hat{e_v} = \frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}}{\beta}\hat{e_v}$$

$$\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\parallel}$$

Here ϕ is the angle between $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{v}$, and $\hat{e_v}$ is a unit vector along $\boldsymbol{v}$.

The Lorentz transformation for the above components is:

$$x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta x_0) \quad , \quad x'_{\perp} = x_{\perp}$$

Therefore:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'_{\parallel} + \boldsymbol{x}'_{\perp} = \gamma(x_{\parallel} - \beta x_0)\hat{e_v} + (\boldsymbol{x} - x_{\parallel}\hat{e_v}) =$$

$$= \gamma\left(\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}}{\beta} - \beta x_0\right)\hat{e_v} + \left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}}{\beta}\hat{e_v}\right) =$$

$$= \gamma\left(\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}}{\beta} - \beta x_0\right)\frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta} + \left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}}{\beta}\frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta}\right) =$$

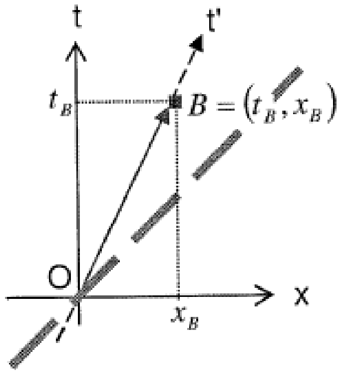
$$x + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}x_0$$

And similarly:

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_{\parallel}) = \gamma\left(x_0 - \beta\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}}{\beta}\right) = \gamma(x_0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x})$$

נספח 4 - הוכחת אינטרוול חיובי\שלילי - מאז"ה עמוד 94 -

אינטרוול חיובי



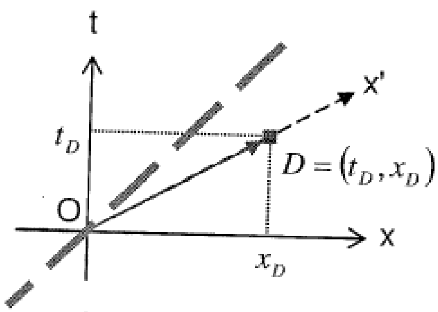
איור ג-8: אינטרוול חיובי

נסתכל על נקודה $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ שלה אינטרוול חיובי ממש, כלומר $t^2 > x^2$. כדי להוכיח כי קיימת מערכת שבה $x'=0$ צריך להראות כי קיימת β כך ש-$\beta^2 < 1$ המקיימת:

(ג-5) $x' = -\beta\gamma t + \gamma x = 0$.

אם $x = 0$ אזי המערכת **O** היא המערכת המבוקשת. אם $x \neq 0$, אזי מן העובדה כי $t^2 > x^2$ נובע כי גם $t \neq 0$. בהנחה כי $t, x \neq 0$, אזי הדרישה על הטרנספורמציה $x' = -\beta\gamma t + \gamma x = 0$ מתורגמת ל- $\beta = \frac{x}{t}$. (מותר לחלק ב-t, כי $t \neq 0$). מן החיוביות של האינטרוול נובע כי $\beta^2 < 1$.

אינטרוול שלילי



איור ג-9: אינטרוול שלילי

הדיון דומה למקרה הקודם.

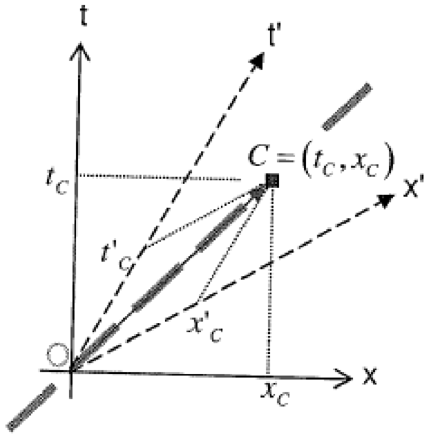
נסתכל על נקודה $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ שלה אינטרוול שלילי ממש, כלומר $t^2 < x^2$. כדי להוכיח כי קיימת מערכת שבה $t'=0$ צריך להראות כי קיימת β כך ש-$\beta^2 < 1$ המקיימת:

(ג-6) $t' = \gamma t - \beta\gamma x = 0$

אם $t = 0$ אזי המערכת **O** היא המערכת המבוקשת. אם $t \neq 0$, אזי מן העובדה כי $x^2 > t^2$ נובע כי גם $x \neq 0$. בהנחה כי $t, x \neq 0$, אזי הדרישה על הטרנספורמציה $t' = \gamma t - \beta\gamma x = 0$ מתרגמת ל $\beta = \frac{t}{x}$. (מותר לחלק ב-x, כי $x \neq 0$). מן השליליות של האינטרוול נובע כי $\beta^2 < 1$.

t

אינטרוול מתאפס



איור ג-10: אינטרוול מתאפס

נניח כי האינטרוול t^2-x^2 מתאפס.

במקרה כזה, לכל מערכת יתקיים $t'^2-x'^2=0$, ועל כן יתקיים תמיד $|t|=|x|$, ועל כן נקודה כזאת לעולם לא תהיה לא על ציר x' ולא על ציר t', כי הנחנו שהנקודה שונה מן הראשית.

איור ג-10 מראה כי הנקודה **C** הנמצאת במרחק שווה מציר x ומציר t במערכת **O**, תישאר במרחק שווה משני הצירים בכל מערכת אחרת.

קל לראות זאת גם בצורה אלגברית:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma t-\beta\gamma t \\ -\beta\gamma t+\gamma t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma(1-\beta)t \\ \gamma(1-\beta)t \end{pmatrix} \qquad \text{(ג-7)}$$

כלומר הזמן (או המקום) במערכת **'O** הוא:

$$t'=x'=\gamma(1-\beta)t=\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,t=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,t \qquad \text{(ג-8)}$$

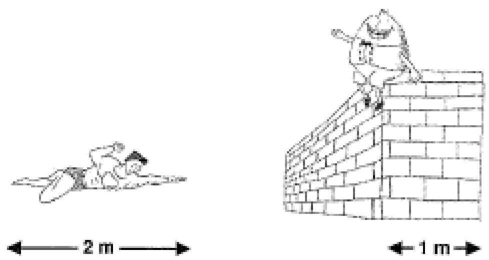
כלומר, כל נקודה על הקו $t=x$ נשארת על אותו קו. הטרנספורמציה רק משנה את מרחקה מן הראשית. קל לראות כי כן הדבר גם לגבי הקו המפריד השני $t=-x$.

נספח 5- פרדוקסים:

ד.2 הפרדוקס של סופרמן

בעקבות הספר Taylor & Wheeler: Spacetime Physics

סופרמן עף במהירות $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\gamma = 2$), ועובר דרך קיר בטון עבה כמתואר באיור ד-6. המפטי-דמפטי יושב על הקיר ומתבונן בפלא המתרחש לעיניו. אורכו של סופרמן – 2 מטרים, ועוביו של קיר הבטון הינו מטר אחד.



איור ד-6: סופרמן והמפטי-דמפטי

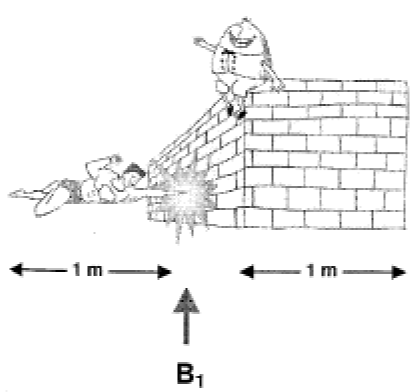
על פי התכווצות האורך, מבחינתו של המפטי-דמפטי, אורכו של סופרמן מתקצר פי שתיים – למטר אחד. על כן, מבחינתו של המפטי-דמפטי, יהיה רגע בו סופרמן יהיה מוכל כולו בתוך הקיר. לעומת זאת, עבור סופרמן הקיר מתקצר והופך לקיר בעל עובי של חצי מטר בלבד, ואילו אורכו שלו הוא 2 מטרים. מבחינתו של סופרמן לא יהיה אף רגע בו כל כולו יהיה בתוך הקיר. המפטי-דמפטי אומר שסופרמן יהיה מוכל כולו בתוך הקיר, וסופרמן אומר שלא. איך ייתכן כי שניהם צודקים?

<u>הפתרון</u>

פתרון הפרדוקס נעוץ בעובדה כי על פי תורת היחסות שני מאורעות המתרחשים באותו זמן במערכת אחת יכולים להיות בעלי זמנים שונים במערכת אחרת. על כן שני הצופים צודקים. כדי לראות זאת נסתכל על סדרת האירועים המופלאה של כניסת סופרמן לתוך הקיר משתי נקודות מבט, האחת מנקודת מבטו של המפטי-דמפטי, והאחרת מנקודת ראותו של סופרמן.

נקודת מבטו של המפטי-דמפטי (המערכת O)

המפטי-דמפטי רואה את סופרמן באורך של מטר אחד, ועל כן הוא, אכן, יהיה כולו מוכל בתוך הקיר.



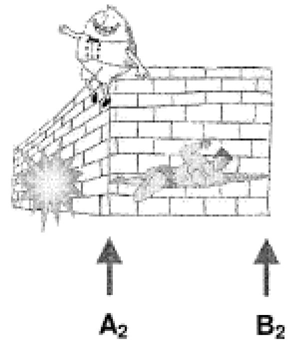
איור ד-7: סופרמן מגיע אל הקיר

נסמן ב-B_1 את המאורע בו ידיו של סופרמן פוגעו לראשונה בקיר. נחליט כי אירוע זה מסמן את הראשית בזמן ובמקום. כמו כן, נסמן ב-A_2 את המאורע בו <u>רגליו</u> של סופרמן <u>נכנסו</u> לקיר, וב-B_2

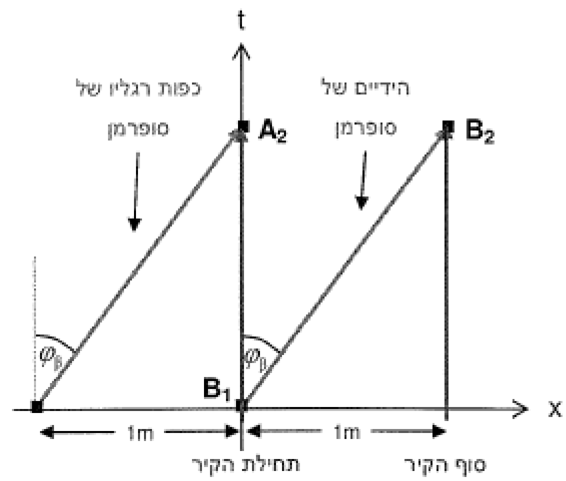
את המאורע בו ידיו של סופרמן יצאו מן הקיר. שימו לב כי מנקודת מבט של המפטי-דמפטי, הרואה את סופרמן באורך של מטר אחד, המאורעות A_2 ו-B_2 התרחשו באותו הזמן. הזמן הנדרש לידיו של סופרמן לעבור את הקיר כולו הוא:

$$t=\frac{1}{\sqrt{3}/2}=\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \text{(ד-11)}$$

זהו זמנם של המאורעות A_2 ו-B_2 במערכת **O**.



איור ד-8: סופרמן בתוך הקיר



איור ד-9: דיאגרמת חלל-זמן במערכת המפטי-דמפטי

נספח 6 - דוגמא נוספת של התקצרות אורך:

שיחה בין שני הצופים

כדי להמחיש את לב העניין אפשר לדמיין שיחה בין שני הצופים בשתי המערכות המחליפים ביניהם חוויות:

הצופה ב-O מדווח:

פיזרתי חיישנים לאורך ציר x. הפעלתי את כולם בדיוק בזמן $t = 0$, כדי לאתר את שתי קצות הסרגל. גיליתי בזמן $t = 0$ את נקודה **2** ב-$x = 0$ ואת נקודה **1** ב- $x = L'\sqrt{1-\beta^2}$. מסקנה: אורך הסרגל הוא $L'\sqrt{1-\beta^2}$.

הצופה ב-'O מגיב:

טעות! החישנים שלך אינם מסונכרנים, וכתוצאה מכך החיישן שגילה את הנקודה **1**, הופעל מוקדם מדי. כיוון שאתה רואה את הסרגל מתקדם במהירות β, הטעות בזמן של החיישן הייתה קריטית, וגררה טעות באורך הסרגל. אילו רק החיישנים שלך היו מחכים קמעא והיו מסונכרנים <u>באמת</u> עם החיישן בראשית, היית מגלה שאורך הסרגל הוא L'.

הערת העורך:

הצופה במערכת **'O** מדבר על הסינכרון האמיתי. אנו יודעים כי בגלל מהירות האור הקבועה בכל המערכות האינרציאליות אין דבר כזה. לכל צופה יש את הסינכרון שלו, ולכן גם אין אורך אמיתי. כל צופה והאורך שלו.

נסכם:

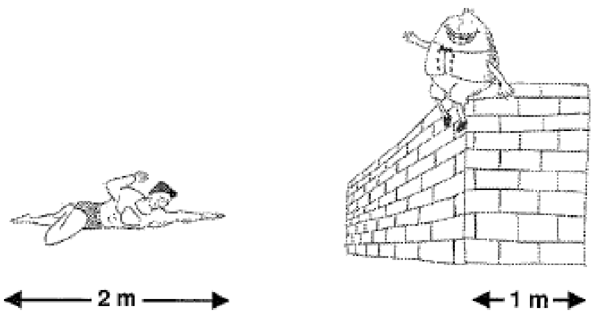
נתונות שתי נקודות **A** ו-**B** נמצאות במנוחה במערכת **'O**. המרחק בין **A** ל-**B** במערכת **'O** נקרא המרחק העצמי (**Proper Length**).

מרחק זה הינו המרחק המקסימלי בין הנקודות. במערכת **O** הנעה במהירות β ביחס למערכת **'O** בכיוונו של הקטע **AB** המרחק יהיה קצר יותר: $L = L'\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L'}{\gamma}$

ד.2. הפרדוקס של סופרמן

בעקבות הספר Taylor & Wheeler: Spacetime Physics

סופרמן עף במהירות $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\gamma = 2)$, ועובר דרך קיר בטון עבה כמתואר **באיור ד-6**. המפטי-דמפטי יושב על הקיר ומתבונן בפלא המתרחש לעיניו. אורכו של סופרמן – 2 מטרים, ועוביו של קיר הבטון הינו מטר אחד.



איור ד-6: סופרמן והמפטי-דמפטי

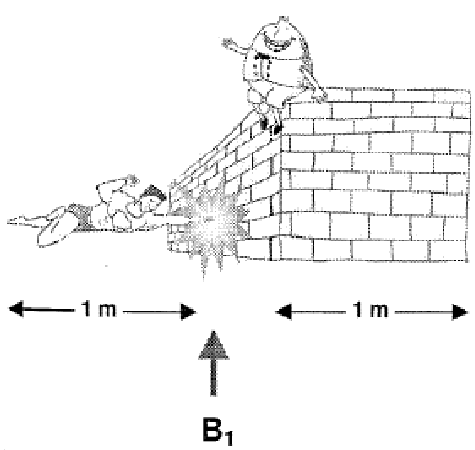
על פי התכווצות האורך, מבחינתו של המפטי-דמפטי, אורכו של סופרמן מתקצר פי שתיים – למטר אחד. על כן, מבחינתו של המפטי-דמפטי, יהיה רגע בו סופרמן יהיה מוכל כולו בתוך הקיר. לעומת זאת, עבור סופרמן הקיר מתקצר והופך לקיר בעל עובי של חצי מטר בלבד, ואילו אורכו שלו הוא 2 מטרים. מבחינתו של סופרמן לא יהיה אף רגע בו כל כולו יהיה בתוך הקיר. המפטי-דמפטי אומר שסופרמן יהיה מוכל כולו בתוך הקיר, וסופרמן אומר שלא. איך ייתכן כי שניהם צודקים?

<u>הפתרון</u>

פתרון הפרדוקס נעוץ בעובדה כי על פי תורת היחסות שני מאורעות המתרחשים באותו זמן במערכת אחת יכולים להיות בעלי זמנים שונים במערכת אחרת. על כן שני הצופים צודקים. כדי לראות זאת נסתכל על סדרת האירועים המופלאה של כניסת סופרמן לתוך הקיר משתי נקודות מבט, האחת מנקודת מבט של המפטי-דמפטי, והאחרת מנקודת ראותו של סופרמן.

נקודת מבט של המפטי-דמפטי (המערכת O)

המפטי-דמפטי רואה את סופרמן באורך של מטר אחד, ועל כן הוא, אכן, יהיה כולו מוכל בתוך הקיר.



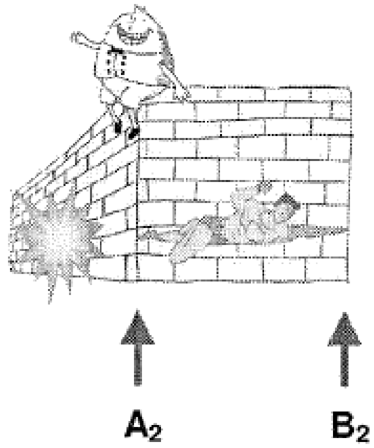
איור ד-7: סופרמן מגיע אל הקיר

נסמן ב-B_1 את המאורע בו ידיו של סופרמן פגעו לראשונה בקיר. נחליט כי אירוע זה מסמן את הראשית בזמן ובמקום. כמו כן, נסמן ב-A_2 את המאורע בו <u>רגליו</u> של סופרמן <u>נכנסו</u> לקיר, וב-B_2

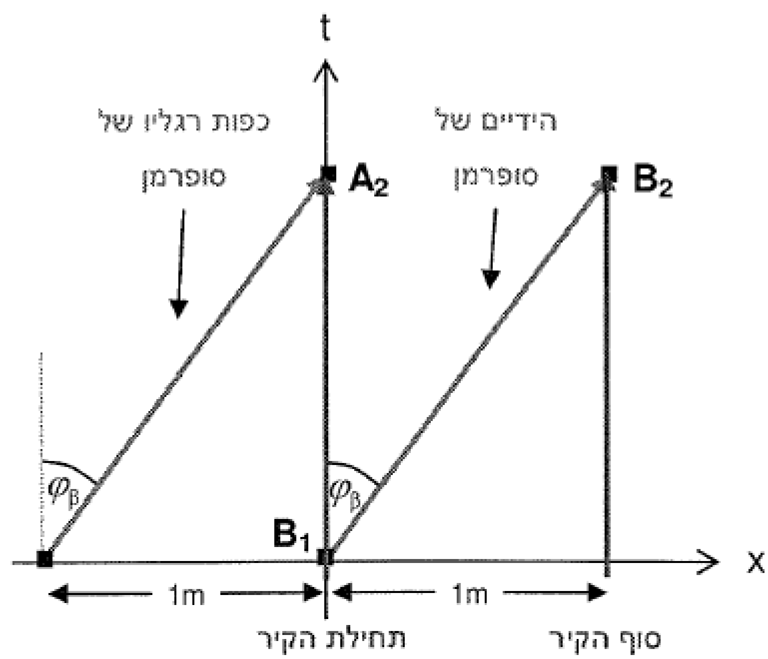
את המאורע בו <u>ידיו</u> של סופרמן <u>יצאו</u> מן הקיר.
שימו לב כי מנקודת מבט של המפטי-דמפטי, הרואה את סופרמן באורך של מטר אחד, המאורעות A_2 ו-B_2 התרחשו באותו הזמן. הזמן הנדרש לידיו של סופרמן לעבור את הקיר כולו הוא:

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \text{(ד-11)}$$

זהו זמנם של המאורעות A_2 ו-B_2 במערכת O.



איור ד-8: סופרמן בתוך הקיר

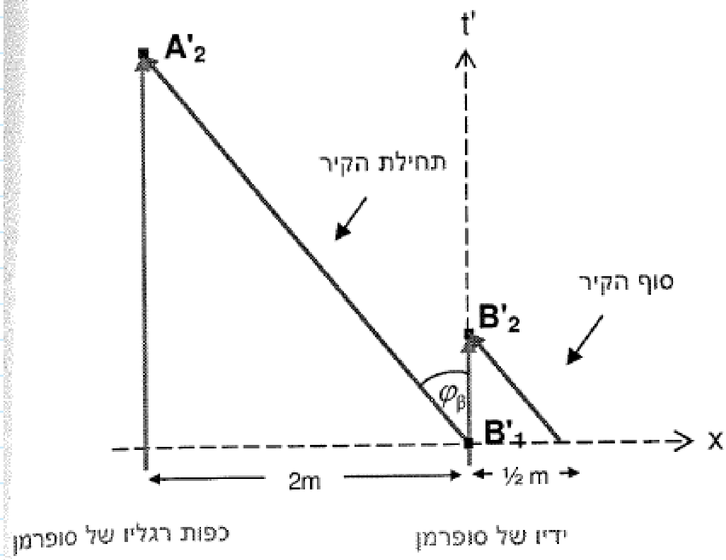


איור ד-9: דיאגרמת חלל-זמן במערכת המפטי-דמפטי

נקודת מבט של סופרמן (המערכת 'O)

במערכת 'O סופרמן נח, ואורכו שני מטר, והקיר שאורכו חצי מטר נע שמאלה לעברו של סופרמן.

כפי שכבר סיכמנו, ראשית מערכת הצירים היא האירוע בו תחילת הקיר מגיעה אל קצה ידיו של סופרמן. המאורעות A'2 ו- B'2 התרחשו בזמנים שונים.



איור ד-10: דיאגרמת חלל-זמן במערכת סופרמן

המעבר מהמערכת O (המפטי-דמפטי) למערכת 'O (סופרמן)

מטריצת המעבר ממערכת O למערכת 'O תהיה:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}_{O \to O'} \qquad \text{(ד-12)}$$

קואורדינטות האירוע A'_2 (תחילת הקיר מגיע לרגלי של סופרמן):

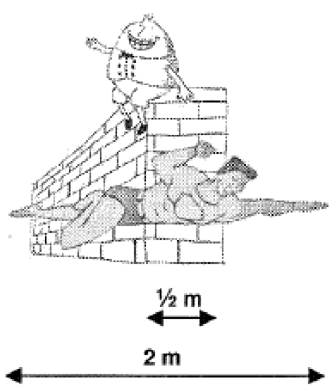
$$A'_2=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{3}}\\ -2\end{pmatrix} \qquad \text{(ד-13)}$$

כלומר, מנקודת הראות של סופרמן, תחילת הקיר "הגיע" לרגליו בזמן $t'=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

קואורדינטות האירוע **B'2** (סוף הקיר מגיע לידיו של סופרמן):

$$B'_2=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{(ד-14)}$$

מנקודת הראות של סופרמן, הקיר, שאורכו חצי מטר, מתקדם לעברו. סופרמן מבחין בשתי נקודות, המייצגות את שני צידיו של הקיר, המתקדמות באותה מהירות לעברו. הזמן $t=0$ הוא כאשר הנקודה הראשונה, חזית הקיר, הגיעה אל ידיו. על חזית הקיר לעבור 2 מטר עד שתגיע לרגליו, ועל כן אירוע זה יתרחש רק אחרי $\frac{4}{\sqrt{3}}$ יחידות מטר-זמן. לעומת זאת, הנקודה המייצגת את אחורי הקיר נמצאת בזמן $t=0$ במרחק של חצי מטר מן הראשית, ועל כן יעברו $\frac{1}{\sqrt{3}}$ יחידות מטר-זמן עד שהיא תגיע אל ידיו של סופרמן. באותו רגע, כאשר $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$, הקיר כולו "מוכל" על ידי סופרמן, אבל סופרמן אינו מוכל בתוך הקיר. מצב זה ימשך עד $t=\frac{4}{\sqrt{3}}$, שאז תעבור ראשית הקיר את כפות רגליו של סופרמן.



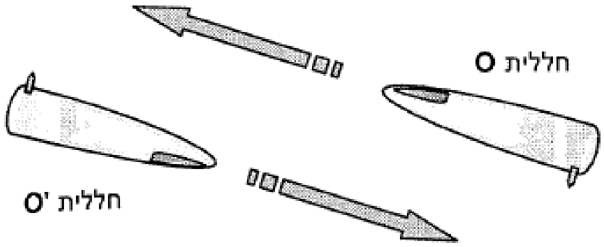
איור ד-11: הקיר מוכל בתוך סופרמן

כלומר, שני הצדדים צודקים. מנקודת מבטו של סופרמן הוא לעולם לא יהיה כולו בתוך הקיר, ומנקודת מבטו של המפטי-דמפטי קיים רגע בו סופרמן "מוכל" כולו בתוך הקיר. ההבדל נובע, שוב, מאיבוד הסימולטאניות. שני אירועים סימולטאניים במערכת של המפטי-דמפטי מתרחשים בהפרש זמנים גדול במערכת של סופרמן. הפרש הזמנים הוא הגורם כי סופרמן אינו רואה את עצמו מוכל בתוך הקיר.

ד.3. פרדוקס מלחמת החלליות

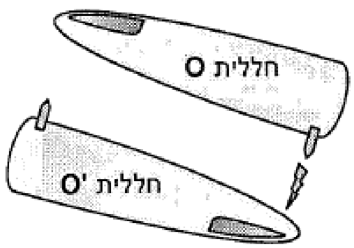
בעקבות הספר Taylor & Wheeler: Spacetime Physics

שתי חלליות אויבות נעות זו לקראת זו במהירות יחסית של $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\gamma = 2)$. תא הטייס של כל חללית נמצא בראשיתה, ותותח הלייזר שלה נמצא בזנבה. החללית **O** מעוניינת להשמיד את החללית **'O**.



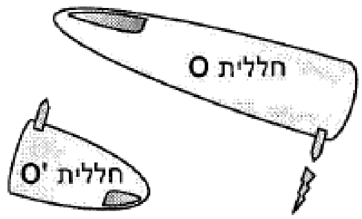
איור ד-12: שתי חלליות אויבות נעות זו לקראת זו

המפקד של החללית **O** החליט על טקטיקת הפעולה הבאה: הוא יחכה עד אשר יראה את זנבה של החללית **'O** ממול תא הטייס שלו, ואז תתבצע הירייה. על פי חישוביו, תא הטייס של חללית **'O** יהיה אז ממול התותח של החללית **O**, וכך, חושב לו המפקד של החללית **O**, **<u>הירייה תפגע בתא הטייס של החללית 'O</u>**.



איור ד-13: טקטיקת הפעולה של מפקד החללית O

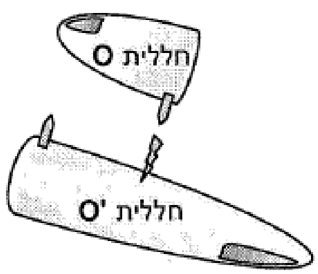
המפקד של החללית O, שלרוע מזלו לא למד פיזיקה מודרנית, לא לקח בחשבון שבמערכת שלו, אורכה של חללית O' מתקצר פי שתיים. היריה תתבצע כאשר זנבה של החללית O' ימצא אמנם ממול תא הטייס שלו, אך לעומת זאת תא הטייס שלה עוד לא יגיע אל מול התותח שלו. ועל כן **__היריה לא תפגע כלל בחללית O'__**.



איור ד-14: התכווצות האורך שלא נלקחה בחשבון

המפקד של חללית O' הצליח לעלות על רשת הקשר הפנימית של החללית O, ועל כן הוא מודע לתכנית הפעולה של החללית O. בנוסף, בלימודי העתודה האקדמאית שלו הוא השתתף בשיעורי המבוא לפיזיקה מודרנית, ועל כן הוא היה מודע היטב להתקצרות האורך. מצויד בכל אלה הוא ניסה לנתח את האירועים העלולים לקרות מנקודת ראותו. לדעתו של מפקד O' החללית O קצרה יותר מן החללית שלו עצמו פי שתיים, ועל כן

__היריה תיפגע בדיוק במרכז החללית O'__.



איור ד-15: המצב כפי שרואה אותו מפקד החללית O'

פרדוקס זה דומה מאוד לפרדוקס הקודם, בהבדל אחד. הפתרון של הפרדוקס הקודם, שטען כי שני הצדדים צודקים, אינו ישים כאן. כאן יש רק אפשרות אחת: או שהחללית O' לא תיפגע כלל, או שתיפגע בראשה או באמצעיתה. רק אחת מכל שלוש האפשרויות יכולה להתקיים!

> <u>פרדוקס</u>: איך יתכן כי הירייה גם תפגע בתא הטייס, גם תפגע במרכז החללית וגם כלל לא תיפגע בחללית?

<u>הפתרון</u>

איור ד-14 הוא הנכון, ואכן חללית O' לא תיפגע.

הטעות של **איור ד-13** ברורה – הוא אינו מתחשב בהתקצרות האורך.

הטעות המסתתרת מאחורי **איור ד-15** אינה כה מובנת מאליה, ונעוצה, כמו בפרדוקס הקודם, בהנחה המוסווית של אינווריאנטיות הסימולטאניות. מפקד החללית O' הניח בטעות כי שני מאורעות הנראים סימולטאניים במערכת של החללית O נראים גם סימולטאניים גם מנקודת ראותה של החללית O'. שני המאורעות הם:

- **A** – המפקד של חללית O רואה את זנבה של חללית O' ממולו.
- **B** – תותח הלייזר של O יורה.

הגישה השגויה שהניחה כי המאורעות **A** ו-**B** מתרחשים סימולטאנית גם במערכת של O', היא זאת שגרמה לטעות של המפקד של החללית O'. אמנם שני המאורעות מתרחשים סימולטאנית ב-O, אך מכיוון שהם נמצאים במקומות שונים במרחב, הם מתרחשים בזמנים שונים במערכת של O'.

ננתח את המאורעות בצורה מפורטת יותר, מנקודת מבטו של כל אחד מהצופים, ונראה כי שני הצופים יגיעו למסקנה כי החללית O' לא נפגעה.

<u>מערכת החללית היורה - O</u>

נסתכל על קווי החיים של ראשן וזנבן של החלליות כפי שהן נראות במערכת החללית O.

ראשה של החללית O וזנבה נחים במערכת זו, ועל כן קווי החיים שלהם מיוצגים ב**איור ד-16** כקווים אנכיים.

ראשה וזנבה של החללית O' נעים במהירות $\sqrt{3}/2$, ומיוצגים באיור בקווים מוטים. נסמן את הזמן $t = 0$ כאשר שתי החלליות נמצאות ראש מול ראש.

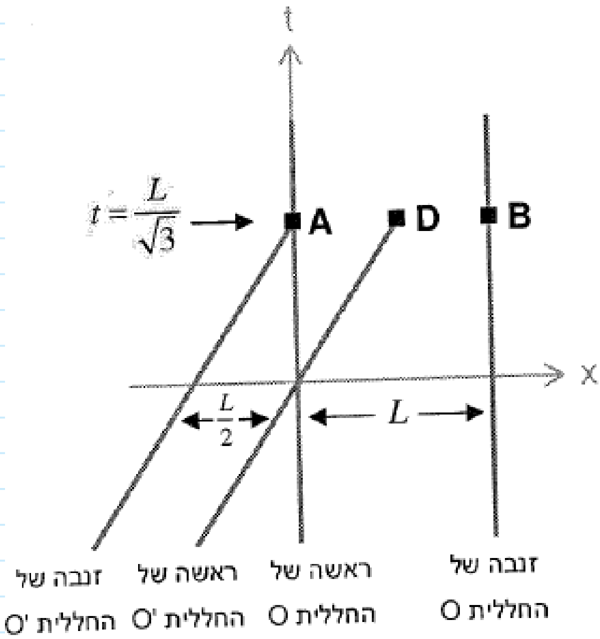
אורכה של החללית 'O "נראה" במערכת זו כ-$L/2$. כלומר, בזמן $t=0$ זנבה של החללית 'O נמצא במרחק של $L/2$ מראשה של החללית O, ועל כן יעברו עוד

$$t=\frac{L/2}{\sqrt{3/2}}=\frac{L}{\sqrt{3}}$$

יחידות זמן עד שזנבה של 'O יגיע אל ראשה של החללית O (האירוע A). בינתיים התקדם גם ראשה של החללית 'O והוא נמצא כעת במרחק של $L/2$ מן הראשית (אירוע D), בדיוק באמצע בין הראש והזנב של החללית O.

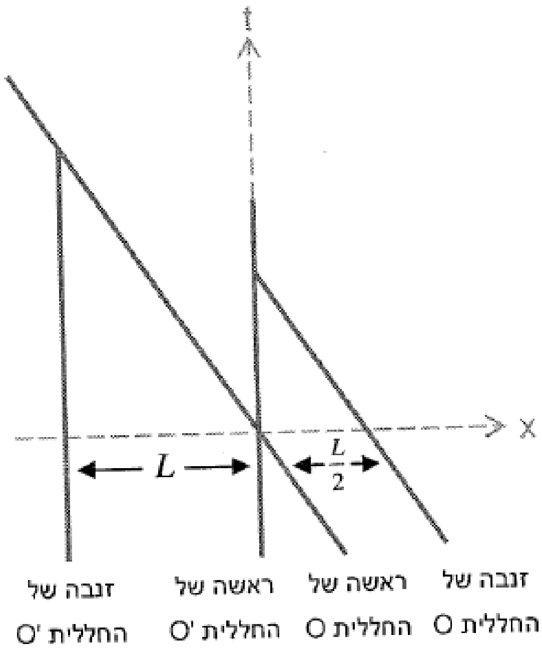
באותו רגע יורה התותח של החללית O (אירוע B),

<u>**ולכן אין פגיעה – החללית O ירתה לפני הזמן.**</u>



איור ד-16: מערכת החללית O

מערכת חללית המטרה – O'



איור ד-17: מערכת החללית O

נסתכל על קווי החיים של ראשן וזנבן של החלליות כפי שהן נראות במערכת החללית **O'**.

ראשה וזנבה של החללית **O'** נחים, ומיוצגים באיור **ד-17** בקווים אנכים. ראשה של החללית **O** וזנבה נעים במערכת זו, ועל כן קווי החיים שלהם מיוצגים בשרטוט כקווים מוטים, כשהמרחק ביניהם הוא $L/2$.

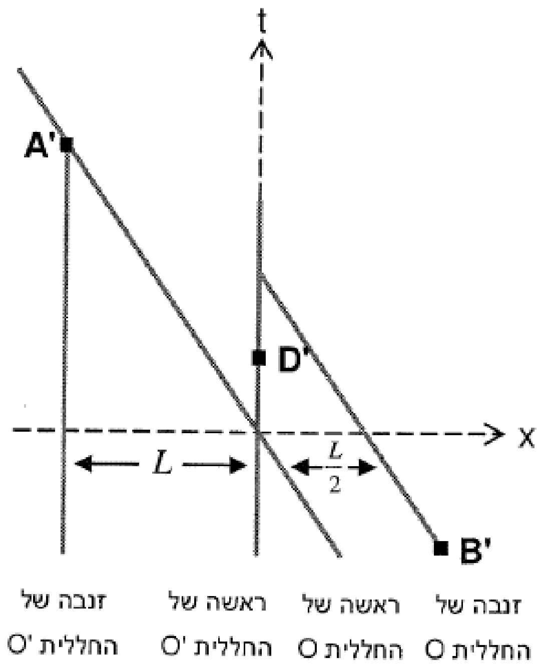
נמצא את מיקומם של המאורעות **'A**, **'B** ו-**'D** במערכת החללית **O'**:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L/\sqrt{3} \\ -L \end{pmatrix} \quad \text{(ד-15)}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L/\sqrt{3} \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L/\sqrt{3} - \sqrt{3}L \\ -L+2L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L/\sqrt{3} \\ L \end{pmatrix} \quad \text{(ד-16)}$$

$$D' = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L/\sqrt{3} \\ L/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L/\sqrt{3} - \sqrt{3}L/2 \\ -L+L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L/2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(ד-17)}$$

נוכל עתה להוסיף את שלושת האירועים בדיאגרמת מינקובסקי של חללית המטרה – **'O**



איור ד-18: מערכת החללית O

אנו רואים כי במערכת זו **'A**, **'B** ו-**'D** אינם סימולטאניים, למרות הסימולטאניות שלהם במערכת **O**. הירי במערכת **'O** (המאורע **'B**) התבצע הרבה לפני המאורע **'A**, ועל כן החללית **'O** לא נפגעה, גם על פי תיאור ההתרחשויות במערכת שלה.

בהערת אגב נעיר כי שלש הנקודות נמצאות על קו ישר במערכת **'O**, בדיוק כפי שהן מופיעות במערכת **O**. אין זה מקרה. הליניאריות של טרנספורמציית לורנץ משמרת את הליניאריות של שלש הנקודות. יתרה מזאת, הליניאריות של הטרנספורמציה גרמה לכך כי הנקודה **'D** נמצאת בדיוק בין **'A** לבין **'B**, כמו במערכת **O**.

איור ד-18 מעלה שאלה מעניינת. לכאורה, המאורע **A**, שבו ראה המפקד של **O** את זנבה של **'O** מולו, הוא המאורע שגרם למאורע **B**, הירי של תותח הלייזר, לפחות על פי סיפור המעשה במערכת **O**. כיצד ייתכן כי המאורע **A** שגרם למאורע **B** במערכת אחת יתרחש אחרי המאורע **B** במערכת אחרת?

השאלה ששאלנו מניחה הנחה מוסווית, כי מפקד החללית **O** מחכה עד שהוא רואה מולו את זנבה של **'O**, ואז הוא לוחץ על ההדק ומפעיל את התותח. הנחה זו מופרכת, מפני שבמערכת **O** שני המאורעות מתרחשים באותו רגע, במרחק של L זה מזה. ועל כן הם מופרדים מרחבית זה מזה, ואינם יכולים להשפיע זה על זה. לא ייתכן כי לחיצת ההדק היא שגרמה להפעלת התותח.

כדי שהתותח של החללית **O** יירה בדיוק ברגע שבו מפקד החללית רואה מולו את זנבה של **'O**, על המפקד של **O** לערוך סדרת תצפיות בזנבה של החללית המתקרבת, לחשב את מהירותו ולחזות

מתי יגיע הזנב אליו. מתוך החישובים האלה הוא יכול לתכנת מראש את התותח שיירה בדיוק באותו רגע שבו זנבה של **'O** מגיע אליו. בתסריט כזה שני האירועים – **A** ו-**B**, שניהם תוצאה של סדרת אירועים מורכבת, ואינם משפיעים זה על זה.

הדיון בשני האירועים מצביע על התכונה של זוג מאורעות המופרדים מרחבית זה מזה – הם יכולים להופיע בסדר שונה במערכות שונות. ועל כן אין פלא כי במערכת **O** שניהם מתרחשים באותו הזמן, בעוד שבמערכת **'O** - **B** מתרחש לפני **A**.

נספח 6 - הוכחה כי תנועה בציר x לא תגרור לכיווץ או התרחבות בע

ו.1. תנועה יחסית בציר x

בסעיף זה נרצה להראות כי לא יתכן כי תנועה בציר x תגרום לכיווץ או התרחבות בציר y. הדבר נובע מן ההנחה כי יש סימטריה בין תנועה יחסית בשני כיוונים הפוכים. לשם כך נסתכל על שתי מערכות **O** ו-**O'** הנעות זו ביחס לזו בציר x.

נניח כי המערכות נעות בצמוד אחת לשנייה, וכי במערכת **O'** ישנן שתי מברשות הנמצאות במנוחה לאורך ציר y. מברשת אחת ממוקמת כך שהקואורדינאטה שלה היא $y'=0$, והשנייה $y'=1$. שתי המברשות בולטות מן המערכת **O'** וצובעות שני פסים המקבילים לציר x במערכת **O**. האם יתכן מצב בו הפסים נראים במערכת **O** כ-$(x,0)$ ו-$(x,y\neq 1)$? כלומר, האם ייתכן כי הנקודה במערכת **O'**, שלה $y'=1$, נראית במערכת **O** עם $y\neq 1$?

נניח כי הפס השני מקיים $y<1$. כלומר, התנועה של **O'** ביחס ל-**O** גרמה לכך כי $y<y'$. לפי ההנחה שלנו המרחק האנכי בין שני הפסים במערכת **O** נראה קצר יותר. כלומר, העובדה שהמערכת **O'** נעה גרמה למרחק בציר ה-y להיראות קטן יותר מנקודת הראות של המערכת **O**. אבל המצב הזה לא יתכן! כי בדיוק במידה ש-**O'** נעה ביחס ל-**O**, כך גם המערכת **O** נעה ביחס ל-**O'**. אנו <u>מניחים</u> כי הכיוון של התנועה (**O'** נעה ביחס ל-**O** בכיוון החיובי, למשל, ואילו המערכת **O** נעה ביחס ל-**O'** בכיוון השלילי) אינו יכול להשפיע על התוצאות של טרנספורמציית לורנץ. זאת אומרת, שאם ההנחה שלנו נכונה גם המרחק בציר y של המערכת **O** צריך להראות מכווץ מבחינתה של המערכת **O'**. ולכן היה צריך להתקיים $y'<y$. ואם כך, הגענו לסתירה.

ועל כן המסקנה המתבקשת היא כי $y=y'$. כן הדבר גם ביחס לציר z.

טרנספורמציית לורנץ במקרה זה תהיה טרנספורמציית לורנץ הפשוטה (לציר x), כאשר אליה תתווספנה המשוואות הפשוטות $y'=y$ יחד עם $z'=z$.

ולכן מטריצת הטרנספורמציה תהיה:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \text{(ו-1)}$$

ברור כי הטרנספורמציה המיוצגת על ידי המטריצה הזאת שומרת על אורך האינטרוול, המוגדר כעת במרחב מינקובסקי הארבע-מימדי להיות $\tau^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. למעשה אפשר כך להגדיר את טרנספורמציית לורנץ הארבע מימדית:

הגדרה:

טרנספורמציית לורנץ – טרנספורמציה ליניארית השומרת על האינטרוול:

$$\tau^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$