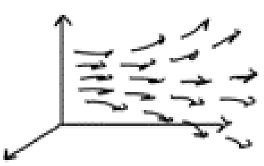
סיכום בממפי"ס 2

אנליזה וקטורית

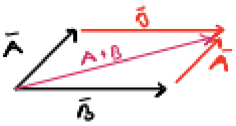
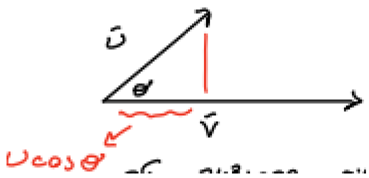
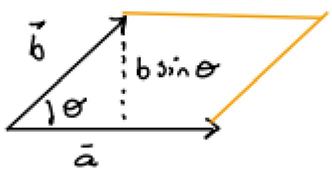
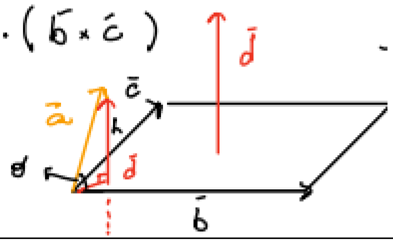


סקלר-גודל בלי כיוון. למשל: טמפ', מסה, מטען.
שדה סקלרי-סקלר שתלוי במרחב, למשל טמפ' שמשתנה ממקום למקום $T = T(x, y, z)$, פונקציה זו מחזירה סקלר.
ווקטור-חץ בעל אורך וכיוון. למשל: מיקום, מהירות, תאוצה, כוח.
שדה וקטורי- וקטור שמשתנה כתלות במרחב. $\vec{F}(x, y, z)$, פונקציה זו מחזירה וקטור. ניתן לחלק לרכיבים.

פ' סקלרית שתלויה בוקטור $\phi(\vec{r})$
פ' וקטורית שתלויה בסקלר $\vec{r}(t)$
פ' וקטורית שתלויה בוקטור $\vec{v}(\vec{r})$

סוגי פונקציות של וקטורים:
תיאור אלגברי של וקטור מצריך ראשית צירים ומערכת צירים.

<u>פעולות בסיסיות עם וקטורים</u>

	תיאור אלגברי	תיאור גאומטרי
חיבור	$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$	
כפל בסקלר הכיוון לא משתנה, האורך משתנה, היחידות יכולות להשתנות	$\overrightarrow{mA} = (mA_x, mA_y, mA_z)$	
מכפלה סקלרית $\vec{A} \cdot \vec{B} = C$ תוצאה: סקלר $ABcos\theta$ תכונות: חילוף, פילוג וקיבוץ. אם שני הווקטורים שונים מאפס, ו-$c=0$ הווקטורים ניצבים.	$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=x,y,z} A_i B_i$ ניתן להשתמש גם בדלתא של קרונקר: $\widehat{e_i} \cdot \widehat{e_j} = \delta_{ij}$	
מכפלה וקטורית תוצאה: פסודו וקטור שגודלו $ABsin\theta$ $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ $\vec{C}$ ניצב לשני הווקטורים, לפי כלל יד ימין. תכונות: אנטי חילוף $AB = -BA$, פילוג, קיבוץ.	$\bar{c} = \sum_{i,j,k} a_j b_k \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i$ $c_i = \sum_{jk} a_j b_k \varepsilon_{ijk}$ $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & i=j,\ j=k,\ i=k \\ 1 & 123,\ 312,\ 231 \\ -1 & 213,\ 132,\ 321 \end{cases}$	
מכפלה חיצונית תוצאה: טנזור $\vec{A} \otimes \vec{B} = \bar{\bar{C}}$	$c_{ij} = a_i b_j$	$\bar{\bar{c}} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$
מכפלה סקלרית משולשת (נפח המקבילון) זהויות: $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ הסימן יתחלף בפרמוטציה לא ציקלית	$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \sum_{ijk} a_i b_j c_k \varepsilon_{ijk}$	$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ 
מכפלה וקטורית משולשית זהויות: "*bac-cab*" $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b})$	$\bar{d} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \sum_{ijk} a_i (\bar{b} \times \bar{c})_j \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$	

<u>כתיב טנזורי-הערות</u>

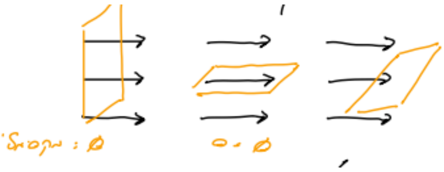
- אינדקס הסכימה לא מופיע בביטוי הסופי
- אינדקסים שלא סוכמים עליהם (חופשיים) יופיעו בביטוי החופשי
- הדלתא של קרונקר "מחליפה" אינדקס

עבודה ושטף

עבודה-ההיטל של הכוח לאורך הדרך. $dW = \vec F \cdot d\vec r = F(r)\cos\theta\, dr$ והעבודה הכוללת היא סכום התרומות.

הוקטור $\vec F$ הוא שדה וקטורי שתלוי במסלול $\vec r(t)$. אם מדובר בשדה וקטורי אחר (לא של כוח) האינטגרל ייקרא סרקולציה.

שטף-נפח הנוזל שעובר דרך מסגרת ביחידת זמן. $\phi = \int \vec v(\vec r)\cdot d\vec A$ מקורות, השטף



כאשר יש משטח סגור העוטף נפח V שאין בתוכו
דרך המשטח הסגור יהיה אפס.

וקטור השטח-וקטור שגודלו גודל השטח וכיוונו ניצב לשטח.

בדו מימד: לנקודה במסלול K יש וקטור ניצב N (הפונה החוצה מהמסלול) ווקטור משיק T.
הוקטור הניצב תורם לשטף ואילו הוקטור המשיק תורם לעבודה/סרקולציה.

גזירה ואינטגרציה

1) גרדיאנט - $\vec\nabla\phi$ פעולה של שדה סקלרי, מחזיר וקטור $(\partial_i\phi)$

2) דיברגנס - $\vec\nabla\cdot\vec A$ פעולה של שדה וקטורי, מחזיר סקלר $(\partial_i A_i)$

3) קרל - $\vec\nabla\times\vec A$ פעולה של שדה סקלרי, מחזיר וקטורי $(\partial_i A_j \epsilon_{ijk})$

עבור פונקציה סקלרית במשתנה אחד-אינטגרל על הנגזרת נותן את הפונקציה הקדומה (המשפט היסודי של החדו"א) $\int_a^b \frac{df}{dx}dx = f(b) - f(a)$

כלל השרשרת	$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$	$\Rightarrow \int_a^b \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{df}{dg}dg$
כלל לייבניץ	$\frac{d}{dx}(f\cdot g) = \frac{df}{dx}\cdot g + f\cdot\frac{dg}{dx}$	$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

כדי להכליל את כלל השרשרת לאינטגרל רב מימדי, יש להשתמש ביעקוביאן.

נגזרת שלמה של פונקציה רבת משתנים: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \bar\nabla f\cdot d\bar s$

אופרטור הגזירה (נאבלה) $\bar\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ או בכתיב אינדקסי: ∂_i

גרדיאנט של פונקציה $\bar\nabla f$ בכתיב טנזורי: $\partial_i f$, הכיוון בו השינוי בפונקציה הוא מקסימלי. משפט הגרדיאנט $f_2 - f_1 = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \bar\nabla f\cdot d\bar s$

אם התזוזה ds בניצב לגרדיאנט-אין שינוי בערך הפונקציה -> הגרדיאנט ניצב למשטחים שעל פניהם הפונקציה קבועה!

תוצאה חשובה: $\nabla r = \frac{\vec r}{r} = \hat r$

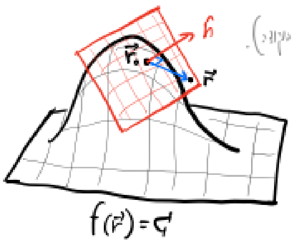
כוח משמר הוא כוח שניתן לתאר כגרדיאנט של אנרגיה פוטנציאלית, שכן העבודה שלו לא תלויה במסלול $\bar F = -\bar\nabla U$
קווי השדה של F ניצבים למשטחים שעל פניהם U קבוע.

נגזרת כיוונית-כאשר משנים את רכיבי הפונקציה בכיוון מסוים V השינוי בפונקציה יהיה: $\frac{\partial f}{\partial x}dx$

כאשר נשנה את הכיוון של V, נחליף את $d\bar s$ בביטוי לנגזרת השלמה ב-$\bar v$. והנגזרת הכיוונית תהיה: $\bar\nabla_v f = \bar\nabla f\cdot\bar v$

כאשר כיוון ההתקדמות מקביל לגרדיאנט-הנגזרת מקסימלית. ב-$2D$ אוסף הנק' בהן הפ' קבועה נקרא "קו גובה" וב-$3D$
"משטח רמה". הנורמל למשטח הרמה (בכל נקודה) הוא $\hat n = \frac{\bar\nabla f}{|\bar\nabla f|}$ המישור המשיק למשטח בנקודה:

$$(\vec r - \vec r_0)\cdot\hat n = 0$$



$\bar\nabla\cdot\bar F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ בקואורדינטות קרטזיות

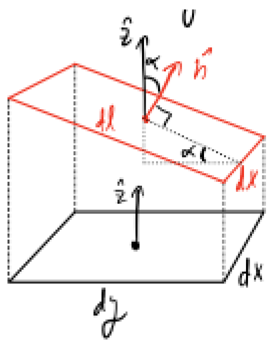
דיברגנץ של פונקציה וקטורית- בכתיב טנזורי: $\partial_i F_i$, מתאר את השטף ψ
המקומי.

הקרל $\vec\nabla\times\vec F$-בכתיב טנזורי: $\partial_i F_j \epsilon_{ijk}$, מתאר את העבודה המקומית שמבצע השדה או מידת הסיבוב (תנועה מעגלית).

הקרל מתאפס ב: נוזל בלי מערבולות, כוחות משמרים.

תכונה שהשתמשנו בה להוכחה: אם תוצאה מסוימת נכונה לכל משטח, אז האינטגרנד עצמו חייב להיות אפס.

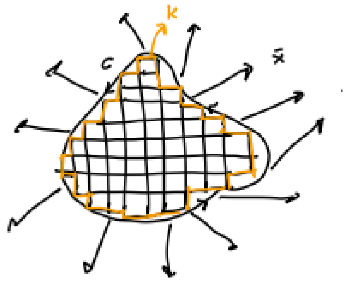
אינטגרל מסלולי של שדה וקטורי F לאורך מסלול C



נניח פרמטריזציה למסלול $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ונשתמש בכלל השרשרת. $\int_c \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} =$
$$\int_a^b [\bar{F}(\overline{r(t)}) \cdot \frac{\overline{dr}}{dt}] dt$$
אם העקום C אינו חלק (גזיר אינסוף פעמים), ניתן לחלקו למספר עקומים חלקים.

<u>אינטגרציה של שדות על גבי משטחים $\iint_s \bar{A} \cdot d\bar{a}$</u>

כאשר A הוא שדה סקלרי ו-S הוא משטח המתואר ע"י המשוואה $\psi(r) = 0$
ו-$d\bar{a} = |d\bar{a}|\hat{n}$ אלמנט שטח אינפי המצביע לכיוון הנורמל למשטח $\hat{n} = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$. נחפש התאמה בין המשטח $\psi(r) = 0$ לאחד המישורים הקרטזיים, למשל עבור מישור XY נחפש את ההטלה של $|d\bar{a}|$ על המישור: $d\bar{a} = \frac{dxdy}{|\hat{n}\cdot\hat{z}|}\hat{n}$ ואז: $\iint_s \bar{A} \cdot d\bar{a} = \iint_{S_{xy}} \bar{A} \cdot \frac{dxdy}{|\hat{n}\cdot\hat{z}|}\hat{n}$



<u>משפטי גאוס וסטוקס (תפו"א)</u>

נחשב את העבודה והשטף של שדה וקטורי X על פני משטח S התחום ע"י עקום C.
השטף והעבודה הכוללים שווים לסכום השטף/עבודה על פני ריבועים אינפי'.

משפט גאוס
$$\int_s \bar{x} \cdot d\bar{A} = \int_V \nabla \cdot \bar{x}\, d\bar{V}$$

משפט סטוקס
$$\int_c \bar{x} \cdot d\bar{s} = \int_s \nabla \times \bar{x}\, d\bar{A}$$

בשני המקרים המשפטים קושרים בין אינטגרל בממד נמוך (קו בסטוקס, שטח בגאוס) לאינטגרל בממד גבוה יותר על פני נגזרת של השדה.

<u>משפט גרין</u> -משפט סטוקס במישור (פונקציה דו רכיבית):
$$\oint_c (Mdx - Ndy) = \int_s \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

<u>משפטי לייבניץ ורײנולדס:</u>

ממשפט רײנולדס נקבל ש $\bar{\nabla} \cdot U = 0$

הכללה של לייבניץ: Leibniz integral rule
$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(b(t),t)\frac{db}{dt} - f(a(t),t)\frac{da}{dt}$$

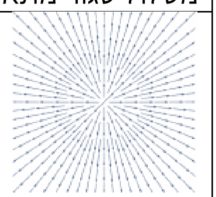
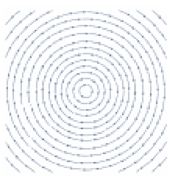
רײנולדס:
$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f(\bar{r},t)\,dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f\,\bar{v}(\bar{r}) \cdot \hat{N}\,dA$$

<u>נגזרות גבוהות יותר</u>

לפלסיאן (דיברגנץ של גרדיאנט)	$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} = \bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\partial_{ii} = \partial_i\partial_j\delta ij$
קרל של גרדיאנט	$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla}\phi = 0$	
דיברגנץ של קרל	$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B}) = 0$	$\partial_k\partial_i B_j\epsilon_{ijk} = 0$
קרל של קרל	$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{F}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) - \bar{\nabla}^2 F$ הוכחה ע"י בין-צב	$\partial_m(\partial_i F_j\epsilon_{ijk})\epsilon_{mkn} = \partial_n\partial_j F_j - \partial_{ii}F_n$

שדה שהקרל שלו מתאפס-שדה משמר, שדה שהדיברגנץ שלו מתאפס-שדה חסר מקורות (סולונואידי).

<u>תכונות של שדות</u>

משמרים (אי רוטציוניים) $\bar{\nabla} \times \bar{F} = 0$	חסרי מקורות (סולונאידים) $\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = 0$
גרדיאנט של פ' סקלרית $\bar{F} = -\bar{\nabla}\phi$ כש ϕ מוגדר עד כדי קבוע	קרל של פוטנציאל וקטורי $\bar{F} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$ כש A מוגדר עד כדי ∇f
האינטגרל המסלולי אינו תלוי במסלול, האינטגרל על מסלול סגור מתאפס.	האינטגרל לא תלוי בשטח, האינטגרל על משטח סגור מתאפס.
	

<u>משפט הלמהולץ</u>- אם F הוא שדה וקטורי רציף, גזיר ודועך ל-0 באינסוף אז ניתן לייצג אותו כסכום של שדה משמר ושדה חסר מקורות: $\bar{F}(\bar{r}) = -\bar{\nabla}\varphi(\bar{r}) + \bar{\nabla} \times \bar{A}(\bar{r})$

<u>נגזרות של מכפלות</u>

פונקציות סקלריות f, g פונקציות וקטוריות F, G האופרטור $(F \cdot \nabla)$ פועל על כל אחד מרכיבי הוקטור שמימינו.

$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$	$\partial_i(fg) = g\partial_i f + f\partial_i g$
$\nabla \cdot (fF) = \nabla f \cdot F + f\nabla \cdot F$	$\partial_i(fF_i) = (\partial_i f)F + f\partial_i F_i$
$\nabla \times (fF) = (\nabla f) \times F + f\nabla \times F$	$\partial_i(fF_j) = (\partial_i f)F_j\epsilon_{ijk} + f\partial_i F_j\epsilon_{ijk_i}$

א) אינטגרלים קוויים

פונ' סקלרית על פני מסלול

① $\int_c \varphi \, d\bar{s}$ מחזיר וקטור (חם חם מתחמם)

② $\underbrace{\int_c \bar{F} \cdot d\bar{s}}_{\text{העבודה}}$ מחזיר סקלר

③ $\int_c \bar{F} \times d\bar{s}$ מחזיר וקטור (לאן זה מסתובב)

ב) אינטגרלים משטחיים. באופן דומה יש שלושה סוגים

① $\int_s \varphi \, d\bar{a}$

② $\underbrace{\int_s \bar{F} \cdot d\bar{a}}_{\text{השטף}}$ כמו באינטגרלים קוויים

③ $\int_s \bar{F} \times d\bar{a}$

ג) אינטגרלים נפחיים

אלמנט הנפח הוא סקלר, אין לו כיוון

① $\int_V \varphi \, dV$ מחזיר סקלר (למשל-מסה)

② $\int_V \bar{F} \, dV = \hat{x} \int F_x \, dV + \hat{y} \int F_y \, dV + \hat{z} \int F_z \, dV$

מחזיר וקטור

$\nabla \cdot (F \times G) = (\nabla \times F) \cdot G - F \cdot \nabla \times G$	$\partial_i (F_m G_n) \epsilon_{mni} = \partial_i F_m \epsilon_{imn} G_n - F_m \partial_i G_n \epsilon_{inm}$
$\nabla \times (F \times G) = -G(\nabla \cdot F) - (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F + F(\nabla \cdot G)$	$\partial_i (F_m G_n) \epsilon_{mnj} \epsilon_{ijk}$
$\nabla (F \cdot G) = F \times (\nabla \times G) + (F \cdot \nabla)G + G \times (\nabla \times F) + (G \cdot \nabla)F$	$\partial_i (F_j G_j) = (\partial_i F_j) G_j + F_j \partial_i G_j$

עוד זהויות חשובות
$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{imn} = \delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}$
$\sum_{i=1}^{3} A_i \delta_{ij} = A_j$
הגדרת עזר $g(r) = \frac{f(r)}{r}$

נשתמש בזהויות אלו על מנת להוכיח את משפטי האינטגרציה הבאים:

זהות 2+גאוס. אם אחת הפונקציות מתאפסת על השפה-האינטגרל על השטח נופל.	$\int_V (\nabla \varphi \cdot \bar{A}) \, d\bar{V} = \int_s (\varphi \bar{A}) \cdot d\bar{a} - \int_V \varphi \nabla \cdot \bar{A} \, dV$
זהות 4+גאוס. אם אחת הפונקציות מתאפסת על השפה-האינטגרל על השטח נופל.	$\int_V \bar{G} \cdot (\nabla \times \bar{F}) \, dV = \int_S (\bar{F} \times \bar{G}) \cdot d\bar{a} + \int_V \bar{F} \cdot (\nabla \times \bar{G}) dV$
משפט גרין הראשון. השתמשנו בגאוס ובהצבת עזר $F = f\nabla g$	$\int_s f \nabla g \cdot d\bar{a} = \int \nabla f \cdot \nabla g \, dV + \int_V f \nabla^2 g \, dV$
משפט גרין השני. השתמשנו בגאוס ובהצבת עזר $F = f\nabla g - g\nabla f$	$\int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV = \int (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\bar{a}$

<u>משפט היחידות של הדיברגנץ והקרל</u>-הדיברגנץ והקרל של שדה וקטורי קובעים באופן חד ערכי את השדה.

<u>גאומטריה דיפרנציאלית של עקומים במרחב</u>

ניתן לתאר עקום במרחב כפונקציה של הזמן $\bar{r}(t)$ או של אורך הקשת (המרחק מהראשית) $\bar{r}(s)$. הקשת היא אורך המסלול: $|d\bar{r}| = ds$ ולכן: $\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\left|\frac{dr}{dt}\right|}$

כדי לתאר עקום באופן שאינו תלוי בראשית או במערכת המעבדה, נגדיר את השלשה האורתונורמלית הבאה:
המשיק לעקום: $\hat{T} = \frac{d\bar{r}}{ds}$, הניצב לעקום $\frac{d\hat{T}}{ds} = k\hat{N}$ והבינורמל (ניצב לשניהם) $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$.
k היא העקומימיות ההופכי שלה $\rho = \frac{1}{k}$ הוא רדיוס העקמומיות. בנוסף נגדיר את τ הפיתול.
שני עקומים בעלי אופן פונקציות של עקמומיות ופיתול זהים עד כדי הזזה וסיבוב קשיח.
<u>משוואות פרנה-סרה:</u> $\frac{d\hat{B}}{dS} = -\tau\hat{N}$, $\frac{d\hat{N}}{ds} = -k\hat{T} + \tau\hat{B}$, $\frac{d\hat{T}}{ds} = k\hat{N}$
מציאת העקמומיות והפיתול:

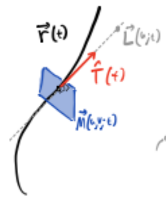
* מציאת k,τ בהינתן $\vec{r}(s)$:

$$\begin{cases} k = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\cdot\hat{N} = \frac{d\hat{T}}{ds}\cdot\hat{N} = -\hat{T}\cdot\frac{d\hat{N}}{ds} \\ \tau = \hat{B}\cdot\frac{d\hat{N}}{ds} = -\hat{N}\cdot\frac{d\hat{B}}{ds} \end{cases}$$

* מציאת k,τ בהינתן $\vec{r}(t)$:

$$\begin{cases} k = \frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \\ \tau = \frac{\dot{\vec{r}}\cdot(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2} \end{cases}$$

* הישר המשיק לעקום בזמן t: $\vec{L}(u;t) = \vec{r}(t) + u\hat{T}(t)$



* המישור הנורמל לעקום בזמן t: $\vec{M}(u,v;t) = \vec{r}(t) + u\hat{N}(t) + v\hat{B}(t)$

<u>קואורדינטות כלליות או עקומות</u>
ניתן לתאר נקודה במרחב במערכת צירים שנבחר->אם המערכות תקינות יש קשר פונקציונלי חח"ע בין שתי המערכות (בפרט בין וקטורי היחידה שלהן).

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x,y,z) \\ q_2 = q_2(x,y,z) \\ q_3 = q_3(x,y,z) \end{cases} \xleftrightarrow[\text{הפיך}]{} \begin{cases} x = x(q_1,q_2,q_3) \\ y = y(q_1,q_2,q_3) \\ z = z(q_1,q_2,q_3) \end{cases}$$

נבטא את המסלול כ $r(t) = r(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$
ואלמנט העתקה אינפי' בתור: $dr = \frac{dr}{dt}dt = \sum_{i=1}^{3}\frac{dr}{dq_i}dq_i$
נסמן: $\frac{dr}{dq_i} = \left|\frac{dr}{dq_i}\right|\frac{\frac{dr}{dq_i}}{\left|\frac{dr}{dq_i}\right|} = h_i\hat{e_i}$ כש-h הוא פקטור הסקאלה ו$\hat{e_i}$ הוא וקטור היחידה של הקואורדינטה q_i
אם נשמור על 2 קוא' קבועות ונשנה את השלישית (q_i) נקבל את עקום הקואורדינטה q_i שמתואר על ידה באופן פרמטרי.
אם נשמור על q_i קבועה ונשנה את השתיים האחרות נקבל את משטח הקואורדינטה.
כדי למצוא את וקטורי היחידה נוכל להשתמש במשיקים לעקומי הקוא' e_i או בניצבים למשטחי הקוא' E_i.
אלמנט שטח אינפי' על המשטח הוא: $d\vec{a}_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}dq_j dq_k$ הנורמלים למשטחי הרמה: $\hat{n} = \frac{\bar{\nabla}q_i}{|\bar{\nabla}q_i|}$ מרכיבים את בסיס הניצבים.
המטריקה ומדידת אורך, שטח ונפח:

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{d\vec{r}\cdot d\vec{r}}$$

$$ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}dq_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}dq_j\right) = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}dq_i dq_j \equiv \sum_{i,j=1}^{3}g_{ij}dq_i dq_j$$

• אורך של עקום $\vec{r}(q_1(t),q_2(t),q_3(t))$:

$$ds = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3}g_{ij}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_j}{dt}}\,dt$$

• נפח אינפי' :

$$\left|J\left(\frac{x,y,z}{q_1,q_2,q_3}\right)\right| = \sqrt{|g|}$$

$(g = J^T J)$

$$\boxed{g_{ij} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}} = h_i h_j\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j$$

<u>טנזור המטריקה</u>

$$d\bar{a}_1 = d\bar{s}_2\times d\bar{s}_3 = h_2 h_3\, dq_2\, dq_3\,(\hat{e}_2\times\hat{e}_3)$$

$d\bar{V} = d\bar{s}_1 \cdot (d\bar{s}_2 \times d\bar{s}_3) = h_1 h_2 h_3\, dq_1 dq_2 dq_3\, \hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3)$ וניתן להשתמש בזוויות בין הווקטורים.

$$dV = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \right) dq_1 dq_2 dq_3 = \boxed{\left| J\left(\frac{x,y,z}{q_1,q_2,q_3}\right) \right| dq_1 dq_2 dq_3}$$

יעקוביאן

לחלופין אם נשתמש בדטרמיננטה נראה שמדובר למעשה ביעקוביאן.

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{e}_i \\ \nabla q_i = H_i \hat{E}_i \end{cases}$$

שתי המערכות הן הופכיות (דואליות): $\nabla q_i \cdot \frac{\partial r}{\partial q_j} = \delta_{ij}$

$$\nabla q_1 = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3}}{\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_3} \right)} = \frac{1}{h_1} \frac{\hat{e}_2 \times \hat{e}_3}{\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3)}$$

עבור מערכות אורתוגונליות:

$$\boxed{\hat{e}_i = \hat{E}_i \quad ; \quad H_i = \frac{1}{h_i}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = h_i^2 \nabla q_i}$$

וגם המטריקה אלכסונית.

<u>נגזרות וקטוריות בקוא' עקומות</u>

נגדיר את הנגזרות רק עבור בסיסים אורתוגונליים, נשמור על המשמעות הגאומטרית המקורית (כיוון השינוי, צפיפות השטף, צפיפות העבודה) וכן נקפיד לגזור גם את וקטורי היחידה במידה והם משתנים במרחב.

אופרטור הנאבלה בקוא' עקומות אורתוגונליות: $\nabla = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \right)$

<u>גרדיאנט ∇f</u>: $\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\hat{e}_3$

<u>דיברגנץ $\nabla \cdot F$</u>: $\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3 h_1 h_2) \right]$

<u>קרל $\nabla \times F$</u>: $\nabla \times F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ F_1 h_1 & F_2 h_2 & F_3 h_3 \end{vmatrix}$

<u>לפלסיאן $\nabla^2 f$</u>: $\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right) \right]$

<u>של שדה וקטורי:</u> $\nabla^2 F = \nabla^2(F_1\hat{e}_1) + \nabla^2(F_2\hat{e}_2) + \nabla^2(F_3\hat{e}_3)$ כש- $\nabla^2(F_1\hat{e}_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1\hat{e}_1) \right) + \cdots \right]$

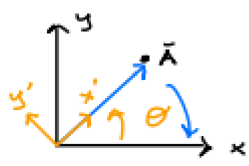
ע"מ לגזור את וקטור היחידה בלפלסיאן של שדה וקטורי נוח לעבור לקוא' קרטזיות:

$$\nabla^2 \hat{e}_i = \left(\nabla^2(\hat{e}_i \cdot \hat{x})\right)\hat{x} + \left(\nabla^2(\hat{e}_i \cdot \hat{y})\right)\hat{y} + \left(\nabla^2(\hat{e}_i \cdot \hat{z})\right)\hat{z}$$

	גליליות	כדוריות
גרדיאנט	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$	
דיברגנץ	$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}F_\phi + \frac{\partial}{\partial z}F_z$	
קרל		

<u>מבוא לטנזורים</u>

במרחב בעל d מימדים, טנזור מדרגה n יהיה בעל n אינדקסים, d^n רכיבים ויעבור טרנספורמציה כמו טנזור. דרגה של טנזור-מס' וקטורי הבסיס הדרושים לתאור כל רכיב. למשל סקלר הוא טנזור מסדר 0, וקטור הוא טנזור מסדר 1. שינוי של מערכת קוא' לא משנה את הטנזור! כל גודל פיזיקלי צריך להיות בלתי תלוי במערכת הקואורדינטות אותה נבחר. למשל אלמנט אורך.



המטריקה מקשרת בין שני סוגי הרכיבים: $b_i = \sum_{i=1}^{3} g_{ij} b^j$ (מורידה/מעלה אינדקס). $g_{ij} g^{ij} = \delta^i_j$

למשל אם L הוא אופרטור הטרנס', אז הגודל של רכיבי הטנזור יעבור לפי L ווקטורי הבסיס יעברו טרנס' לפי L^{-1}. בסה"כ הטנזור נשאר אינווריאנטי.

<u>וקטורים קונטרא-וריאנטיים וקו-וריאנטיים</u>

ראינו שישנן שתי דרכים לבטא את וקטורי היחידה במערכות עקומות:

בעזרת המשיקים לעקומות הקואורדינטות $\hat{e_i} = \frac{\partial r}{\partial g_i}/h_i$ ובעזרת הניצבים למשטחי הקואורדינטות: $\hat{E}_i = \nabla q_i / H_i$

נוכל לפרק כל וקטור לפי כל אחד משני הבסיסים או ישירות באמצעות המשיקים/ניצבים (למרות שהם לא מנורמלים).

הביטוי לפי המשיקים נקרא קונטרה-וריאנטי ואז כותבים את האינדקסים למעלה $\bar{a} = a^1\hat{e_1} + a^2\hat{e}_2$

ולפי הניצבים נקרא קו-וריאנטי וכותבים את האינדקסים למטה $\bar{a} = a_1\widehat{E^1} + a_2\widehat{E^2}$

הגדרה 1: שלשת מספרים (A^1,A^2,A^3) הינם הרכיבים הקונטרה-וריאנטיים של וקטור $\bar{A}$ במער' קואור' q^i אם במעבר למערכת $\bar{q}^i$ הם הופכים לרכיבים $(\bar{A}^1,\bar{A}^2,\bar{A}^3)$ כמו שמתנהגים רכיבי הוקטור $d\bar{r}$. כלומר:

$$\boxed{\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} A^j}$$

וקטור קונטרה-וריאנטי

וקטור קונטרה-וריאנטי מתפלג מערכת קואור' על ידי נגזרה של וקטורי הבסיס החדשים על ידי הישנים.

הגדרה ב': שלשת המס' (A_1,A_2,A_3) הינם הרכיבים הקו-וריאנטיים של וקטור $\bar{A}$ במעבר קואור' q^i אם במעבר למערכת $\bar{q}^i$ הם הופכים לרכיבים $(\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3)$ כפי שמתנהגים הרכיבים של $\nabla\psi$

$$\boxed{\bar{A}_i = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} A_j}$$

$j,i=1,2,3$ סוכמים על j

וקטור קו-וריאנטי

עבור $N=2$

$$\bar{A}_1 = \frac{\partial q^1}{\partial \bar{q}^1}A_1 + \frac{\partial q^2}{\partial \bar{q}^1}A_2$$
$$\bar{A}_2 = \frac{\partial q^1}{\partial \bar{q}^2}A_1 + \frac{\partial q^2}{\partial \bar{q}^2}A_2$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial \bar{q}^1} & \frac{\partial q^2}{\partial \bar{q}^1} \\ \frac{\partial q^1}{\partial \bar{q}^2} & \frac{\partial q^2}{\partial \bar{q}^2} \end{pmatrix}}_{J^T\left(\frac{q^1,q^2}{\bar{q}^1,\bar{q}^2}\right)} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

טנזור יכול להיות קונטרא וריאנטי A^{ij} קו וריאנטי A_{ij} ומעורב ${A_j}^i$ A^i_j נסכום כשאינדקס מופיע פעם אחת למטה ופעם אחת למעלה: $a_{ij}b^j$.

בטנזורים מעל דרגה 2 לא ניתן להשתמש בכתיב מטריציוני בגלל חוקי הטרנס' השונים.

<u>פסודו וקטורים</u>

דוגמה: תחת טרנס' שיקוף רכיבי וקטור המיקום יקבלו מינוס, אבל הווקטור ימשיך להצביע לאותו כיוון.

רכיבי וקטור שהוא תוצאה של מכפלה וקטורית לא יקבלו מינוס ולכן הוא יצביע לכיוון ההפוך! זהו פסודו וקטור.

<u>טנזורים מדרגה גבוהה יותר</u>

מכפלה חיצונית של שני וקטורים: $T^{ij} = A^iB^i$ איך T^{ij} עובר טרנס'?

$$\bar{T}^{ij} = \underbrace{\bar{A}^i\bar{B}^j}_{\text{הסכם הסכימה}} = \left(\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k}A^k\right)\left(\frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^m}B^m\right) = \underbrace{\frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^k}\frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^m}}_{\text{זו הגדרה}} \underbrace{T^{km}}_{A^kB^m}$$

כלומר רכיבי טנזור מדרגה 2 עוברים טרנס' ע"י מכפלות של שתי

$$\bar{A}_{ij} = {J^k}_i A_{kl} {J^l}_j = {J^T}_i{}^k A_{kl} {J^l}_j = \left[J^T A J\right]_{ij}$$

מטריצות טרנס'.

באופן דומה עבור טנזורים מסדרים גבוהים יותר. מדרגה 3 והלאה לא ניתן לכתוב טנזור כמטריצה, אלא רק באמצעות הרכיבים שלו.

<u>טנזור איזוטרופי</u>-נראה אותו דבר בכל מערכת.

בדומה למטריצות: יש טנזור סימטרי ואנטי סימטרי וניתן לכתוב כל טנזור כסכום של חלק סימטרי ואנטי סימטרי:

$$F^{ij} = \frac{1}{2}\left(F^{ij} + F^{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(F^{ij} - F^{ji}\right)$$

<u>מכפלה חיצונית</u>-בין שני טנזורים, יוצרת טנזור מדרגה גבוהה יותר ${A^i}_{jk}{B^{lm}}_{nqp} = {C^i}_{jk}{}^{lm}{}_{nqp}$ התהליך ההפוך לא בהכרח אפשרי.

<u>צמצום</u>-כמו *TRACE* של מטריצה, סכום איברי האלכסון. מקבלים טנזור מדרגה נמוכה יותר. ${A^{ij}}_{klm} \to j=l,\ {A^{ij}}_{kjm} = {B^i}_{km}$

<u>מכפלה פנימית</u>-לוקחים מכפלה חיצונית של זוג טנזורים ואז מצמצמים אינדקס מהטנזור הראשון עם אינדקס מהטנזור השני: $A^i_{jk}B^{lm}_{np}\delta^k_l = A^i_{jk}B^{km}_{np} = C^{im}_{jnp}$ המכפלה הסקלרית מוגדרת על כן: $a^ib_j = c$

<u>כלל המנה</u>-אם המכפלה הפנימית של גודל מסוים עם טנזור היא טנזור אז הגודל הוא גם טנזור.

<u>מד"רים</u>

נתון קשר פונקציונלי בין נגזרות של פונקציה X, עלינו למצוא את הפונקציות שמקיימות אותו. כדי לקבל פתרון פרטי נצטרך אינפורמציה נוספת:

1) תנאי התחלה: הפונ' והנגזרת הראשונה בזמן כלשהו

2) תנאי שפה: ערכי הפונ' בשתי נקודות שונות

<u>הגדרות</u>

סדר-הנגזרת הגבוהה ביותר שמופיעה

מעלה-החזקה הגבוהה ביותר של הנגזרת הגבוהה ביותר (אחרי שכותבים את המש' כפולינום בפונ' ובנגזרותיה).

לינארית-בכל מחובר מופיעה לכל היותר הפונ' הנעלמה או אחת מנגזרותיה בחזקה ראשונה (לא כפולינומים, סינוסים וכו')

הומוגנית-מד"ר הומוגנית ממעלה K אם נכפול את הפתרון y ב λ אז המשוואה כולה תוכפל ב-λ^k ולכן גם λy הוא פתרון.

מד"ר לינארית הומוגנית נראית כך: $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$ $b(x)=0$

פתרון של משוואה לא הומוגנית ניתן לכתוב כסכום: $y=y_p+y_h$

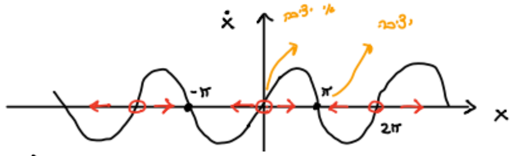
אוטונומית-לא תלויה מפורשות במשתנה הב"ת

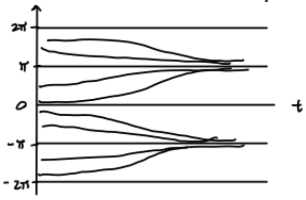
<u>מד"ר מסדר ראשון $y'=f(x,y)$</u>

נגזרת אחת->אינטגרציה אחת->תנאי התחלה אחד.

משפט הקיום והיחידות: אם f ו$\frac{df}{dy}$ רציפות במלבן נתון $(\beta>x>\alpha)$ הכולל את תנאי ההתחלה (x_0,y_0) אז ישנו $h>0$ כך שבמרווח $(\beta>x_0+h>x>x_0-h>\alpha)$ קיים פתרון יחיד. רציפות f בלבד מבטיחה קיום, אבל לא יחידות.

<u>הפתרון הגרפי</u>





נצייר את $\dot{x}$ כפונקציה של x. למשל: $\dot{x}=\sin(x)$

אם הנגזרת חיובית נצייר חץ ימינה, אם היא שלילית-שמאלה.

אם הנגזרת מתאפסת זו נקודת שבת.

אם הזרימה כלפיה והנגזרת שלילית-הנקודה יציבה

אם ממנה והנגזרת חיובית-לא יציבה.

אם הנגזרת מתאפסת יש לבדוק נגזרות גבוהות יותר.

הזמן לא מופיע בגרף הזה! אבל נוכל לדעת מה החלקיק יעשה כתלות בתנאי ההתחלה:

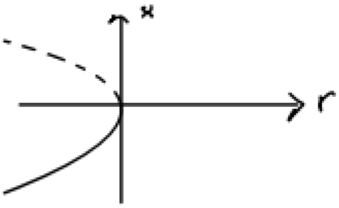
<u>ביפורקציות:</u> נקודות שבת יכולות להיווצר, להעלם או לשנות יציבות כתלות בפרמטרים.

ביפורקציות אורף: לדוג' $\dot{x}=r+x^2$ $r<0$ שתי נק' שבת, $r=0$ נק' שבת אחת, $r>0$ אין.

נהוג לצייר את נק' השבת כפונקציה של r: הקו המקווקו מסמן מצב לא יציב.

ביפורקציה טרנסקריטית: נק' השבת קיימת תמיד, אך משנה את יציבותה. למשל:

$\dot{x}=rx-x^2$



<u>פתרון אנליטי</u>

I. <u>מד"ר-הפרדה:</u> אם ניתן לכתוב את המד"ר כך: $M(x)dx+N(y)dy=0$

הפתרון יתקבל כך: $\int N(y)dy=-\int M(x)dx+c$

II. <u>לינארי:</u> אם ניתן לכתוב את המד"ר כך: $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

הפתרון יתקבל כך: $\mu(x)=e^{\int p(x')dx'}\rightarrow y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(s)q(s)ds+c\right]$

III. <u>מקדמים הומוגניים מאותו סדר:</u> (הומוגניות t) אם ניתן לכתוב את המד"ר כך: $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$

הפתרון יתקבל כך: $v=\frac{y}{x}\rightarrow \ln|x|+c=\int\frac{dv}{f(v)-v}$

(פונקציה הומוגנית מסדר n מקיימת: $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$)

IV. <u>מדויקת:</u> אם מתקיים: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ כאשר: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

אם קיים $M=\frac{\partial g}{\partial x}$ ו- $N=\frac{\partial g}{\partial y}$ הפתרון יהיה: $g(x,y)=c$.

הערות:

במד"רים מסדר 1 אין אוסילציות

ניתן להגדיר פוטנציאל U:

$$\dot{x}=F(x)=-\frac{dU}{dx}$$

החלקיק ינוע כלפי פוטנציאל נמוך יותר ולכן נקודת מינימום של U פירושה נקודת שבת.

מקדמים לינאריים לא הומוגניים: $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$ כל אחד מהמקדמים מגדיר ישר,

הישרים נחתכים בנקודה (x_0,y_0) נחליף משתנים ל- $\bar{x}=x-x_0,\ \bar{y}=y-y_0$

משוואות מהצורה: $(a_1x^2+b_1y^2+c_1)dx+(a_2x^2+b_2y^2+c_2)dy=0$ נפתרות בהצבה $u=x^2,\ v=y^2$

משוואת ברנולי $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n,\ \ n\geq 2$ ניתנות לפתרון באמצעות ההצבה $u=y^{1-n}$

מד"רים מהצורה $yM(x,y)dx+xN(xy)dy=0$ נפתרות ע"י הצבה $v=xy$

מד"ר מדויקת מסדר ראשון היא למעשה דיפרנציאל שלם של פונקציה קדומה. זה קורה כש $\frac{\partial m}{\partial y}=\frac{\partial n}{\partial x}$

לעתים ניתן להשתמש בגורם אינטגרציה כדי להפוך את המד"ר למדויקת:

אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=p(x)$ אז $\mu=e^{\int p(x)dx}$ ואם $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=q(y)$ אז $\mu=e^{\int q(y)dy}$

כדי לוודא שהפונקציה הנתונה מקיימת את [illegible]?
נגזור את המשוואה של הפתרון הנתון:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|y|+y^2\right)=\frac{d}{dx}\left(\sin x+c\right)$$

$$\left(\frac{1}{y}+2y\right)\frac{dy}{dx}=\cos x \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x}{1+2y^2} \quad \checkmark$$

<u>מד"רים מסדר שני</u>

נגזרת שניה-> 2 קבועי אינטגרציה, 2 תנאי התחלה/שפה.

משפט: אם y_1 וy_2 הם פתרונות של $\ddot{y}+p\dot{y}+qy=0$ ויש נק' t_0 עבורה $w\neq 0$ אז משפ' הפתרונות $y=c_1y_1+c_2y_2$ מהווה את אוסף הפתרונות הבסיסי של המשוואה. כש $w=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{vmatrix}$ וניתן למצוא אותו גם ע"י: $w=ce^{-\int p(t)dt}$

שורשים חוזרים:

כדי למצוא פתרון שני נציב: $y=v(t)y_1(t)$.

נקבל:

$$\dot{y}=\dot{v}y_1+v\dot{y}_1$$

$$\ddot{y}=\ddot{v}y_1+2\dot{v}\dot{y}_1+v\ddot{y}_1$$

נציב במד"ר ונכנס איברים:

$$y_1\ddot{v}+2\dot{v}\dot{y}_1+\cancel{v}\ddot{y}_1+p(t)\dot{v}y_1+\cancel{p(t)}v\dot{y}_1+q(t)\cancel{v}y_1=0$$

$$\Rightarrow v(\underbrace{\ddot{y}_1+p(t)\dot{y}_1+q(t)}_{0})+y_1\ddot{v}+\dot{v}(2\dot{y}_1+py_1)=0$$

y' וy חסרות-> נעשה שתי אינטגרציות
Y חסרה-> נעבור למשתנה חדש $v=y'$
Xחסרה (מש' אוטונומית) נעבור למשתנה $v=y'=\frac{dy}{dx}$ נכפול את שני האגפים ב-$\frac{1}{v}=\frac{dx}{dy}$
<u>מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0$</u> נציב $y=e^{rt}$ נקבל את המשוואה האופיינית: $ar^2+br+c=0$ אם השורשים ממשיים ושונים אז הפתרון הוא קומבינציה והוא דועך/מתבדר. אם השורשים מדומים הפתרון מחזורי וניתן לרשום אותו כשילוב של סינוסים וקוסינוסים. אם השורשים מרוכבים הפתרון עושה אוסילציות+דעיכה/התבדרות.
<u>מד"ר מדויקת מסדר שני $P\ddot{y}+Q\dot{y}+Ry=0$</u> המד"ר מדויקת אם $R=Q'-p''$ ואז $f=Q-P'$ ונוכל לכתוב את המד"ר כ- $\frac{d}{dx}[Py'+fy]$
<u>משוואת אוילר-קושי</u>$a_nx^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=0$ ננחש פתרון מהצורה $y=x^m$

<u>מד"ר לינארית לא הומוגנית: $\ddot{y}+p\dot{y}+qy=g$</u>

<u>שיטת המקדמים הלא ידועים:</u>

1. נפתור את המד"ר ההומוגנית.
2. ננחש פתרון מהצורה של $g(t)$: סינוס-> שילוב של סינוסים וקוסינוסים, פולינום->פולינום, כפל של פונ'->כנ"ל.
3. אם g מהצורה של הפתרון ההומוגני ננחש פתרון בריבוי (כפל ב-t) גבוה יותר.
4. נשווה מקדמים למציאת הפתרון הפרטי.

<u>שיטת וריאציית הפרמטרים:</u>

במקרה של מד"ר מסדר שני:

ב. ווריאציית הפרמטרים - נמצא את הפתרון ההומוגני

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

נניח פתרון למשוואה הכללית מהצורה

$$y = v_1(t) y_1(t) + v_2(t) y_2(t)$$

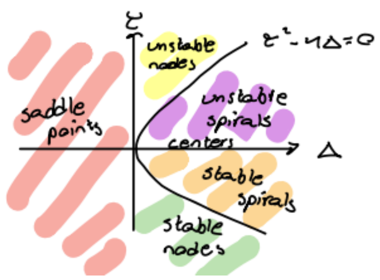
קיבלנו שני מעברים מצומדים ל- v_1 ו-v_2 שפתרונם

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= \int -\frac{y_2\, g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\, dt + c_1 \\ v_2 &= \int \frac{y_1\, g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\, dt + c_2 \end{aligned}}$$

במקרה הכללי:

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) u_i(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{W_i(s) g(s)}{W[y_1,\dots,y_n](s)}\, ds$$

כש $\dot{v}_i = \frac{g(t)\, W_i(t)}{W(t)}$



מערכות מצומדות של מד"רים לינאריים

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \xrightarrow{\text{בכתיב מקוצר}} \dot{\vec{x}} = \bar{\bar{A}}\, \vec{x}$$

מציאת הפתרון נעשית בכלים של אלגברה לינארית:

ננחש אקספוננט $\bar{v}e^{\lambda t}$ ונקבל את המשוואות: $\lambda\bar{v} = \bar{\bar{A}}r$ $\quad (\bar{\bar{A}} - \lambda\bar{\bar{I}})\bar{v} = 0$

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x}$$

כלומר עלינו למצוא את הע"ע ואת הו"ע של

עבור מע' מד"ר כללית הע"ע נתונים ע"י: $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ כשה τ הוא *trace(A)* ו Δ הוא *det(A)*

נוכל לאפיין כך את היציבות של נקודות השבת.

מד"רים מצומדים לא לינאריים

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

לרוב אין פתרון אנליטי, נעשה לינאריזציה של המשוואות סביב נק' ש"מ: $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$

נסמן: $u = x - x_0,\ v = y - y_0$ כשu ו-v הן הפרעות קטנות ליד ש.מ.:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{היעקוביאן } J}\Bigg|_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

מציבים x^*, y^* לכן זו מטריצה של מספרים

ניתן להפריד מד"ר מסדר שני למע' מד"ר מצומדת מסדר ראשון.