Funzioni:

Iniettiva: $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

- *Verificare iniettività*
  - Confronto $f(x_1) = f(x_2)$ e vedo se $x_1 = x_2$
  - Se $\exists f(x)' \rightarrow f(x)' \neq 0 \ \forall x \in D$

Suriettiva: $Im(f(x)) = Codominio$

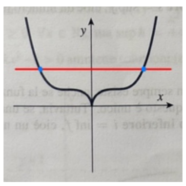
Inversa: $f(x)^{-1}: C \rightarrow D \ t.c. \ f^{-1}(f(x)) = x$

- Proprietà
  - Se $\exists f(x)^{-1} \rightarrow$ l'inversa è unica!
  - Ogni funzione iniettiva è invertibile sulla sua immagine
- Verificare invertibilità
  - Verifico se $f(x)$ è iniettiva, se lo è la funzione è sicuramente invertibile sulla sua immagine
  - Ricaviamo la funzione in y
  - La funzione inversa perciò sarà definita su tutti gli elementi dell'immagine meno eventuali punti di discontinuità

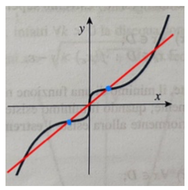
Funz. Composta: $f: A \rightarrow B \ \ e \ \ g: B \rightarrow C \quad t.c. \ \ g \circ f : A \rightarrow C \ \ e \ \ g \circ f = g(f(x))$

- $g \circ f$ si legge "g dopo f"

Funz. Pari: $f(-x) = f(x)$



Funz. Dispari: $f(-x) = -f(x)$



- Proprietà:
  - Somma di funzioni pari/dispari è pari/dispari
  - Il prodotto o il quoziente tra funzioni pari/dispari è pari/dispari
    - Tra una funzione pari ed una dispari invece è dispari
  - La composizione di funzioni è:
    - Pari: se almeno una funzione è pari
    - Dispari: se tutte le funzioni sono dispari
  - L'inversa dispari (se esiste) è sempre dispari
    - Per le funzioni pari questo non vale perché per renderla invertibile bisogna ridurre il dominio

Operazioni sul dominio

$Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
$Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
$Dom(f * g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
$Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \left(Dom(f) \cap Dom(g)\right) - \{x \ \in Dom(g) \ t.c. \ \ g(x) = 0\}$ (meno eventuali punti di discontinuità)

Monotonia

Crescente e Strettamente crescente: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Decrescente e Strettamente decrescente: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- Proprietà
  - $se \ f(x) \ strettamente \ monotona \ \rightarrow \ f(x)^{-1} \ strettamente \ monotona$
  - $la \ somma \ di \ funzioni \ crescenti/decrescenti \ è \ crescente/decrescente$
  - $se \ f \ e \ g \ sono \ monotone \ \rightarrow g \circ f \ è \ monotona$
    - $crescente\text{:} \ \ se \ il \ numero \ di \ fuzioni \ decrescenti \ che \ la \ compongono \ è \ pari \ o \ nullo$
    - $decrescente\text{:} \ \ se \ il \ numero \ di \ funzioni \ decrescenti \ che \ la \ compongono \ è \ dispari$

Funz. Limitate, estremo superiore/inferiore, massimo e minimo

Limitata Superiormente: $se \ \exists l \in \ C \ : \ \ f(x) \leq l \ \ \forall x \in D$

Limitata Inferiormente: $se \ \exists l \in \ C \ : \ \ l \leq f(x) \ \ \forall x \in D$

Limitata: $se \ \exists l \in \ C \ : -l \leq f(x) \ \leq l \ \ oppure \ \ |f(x)| \leq l \ \ (con \ l > 0) \ \ \forall x \in D$

Massimo: $M \geq f(x) \ \ \forall x \in D \ \ e \ \ \exists x_M : f(x_M) = M$

Minimo: $m \leq f(x) \ \ \forall x \in D \ \ e \ \ \exists x_m : f(x_m) = m$

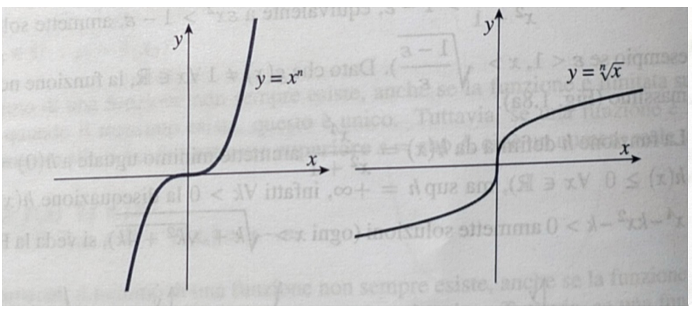
Sup $f(x)$: $S \geq f(x)\ \ \forall x \in D$ se $f(x)$ non è limitata superiormente $Sup\big(f(x)\big) = +\infty$ altrimenti $M = S$

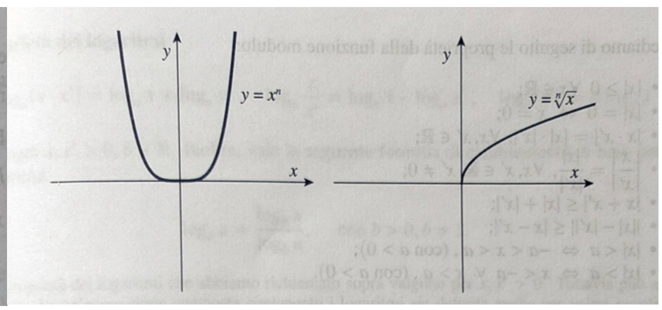
Inf $f(x)$: $I \leq f(x)\ \ \forall x \in D$ se $f(x)$ non è limitata inferiormente $Inf\big(f(x)\big) = -\infty$ altrimenti $m = I$

- Proprietà:
  - $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$
  - $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$
  - $\sup(k \cdot f) = \begin{cases} k \cdot \sup f & se\ k > 0 \\ k \cdot \inf f & se\ k < 0 \end{cases}$
  - $\inf(k \cdot f) = \begin{cases} k \cdot \inf f & se\ k > 0 \\ k \cdot \sup f & se\ k < 0 \end{cases}$
- Verificare se $f(x)$ limitata, ha massimo/minimo e sup/inf
  - Vediamo se il dominio ha discontinuità, lì la funzione inversa ovviamente non esiste
  - Calcoliamo la funzione nel codominio ricavandomi x
  - Studiamo il codominio e vediamo dove la funzione esiste, ovvero il "dominio" della funzione calcolata
  - Altri metodi:
    - Calcolo $f(x)' = 0$ o vedo dove $\nexists f(x)'$ e sostituisco la x trovata in $f(x)$ e confronto i vari risultati siccome si tratta di un massimo e minimo locali devo trovare quello assoluto
    - Attraverso il comportamento asintotico posso vedere che si comporta come una funzione simile e prendo il codominio di quella simile

Funzioni Elementari

Potenze e Radici:
- Esponente Dispari: funzioni dispari, strettamente crescenti e suriettive su tutto $\mathbb{R}$ quindi invertibili
- Esponente Pari: funzioni pari, non iniettive e non invertibili, ma riducendo il dominio a $[0, +\infty)$ esse risultano strettamente crescenti e quindi invertibili
- Proprietà:
  - $se\ n < m\ si\ ha\ x^n > x^m\ se\ x \in (0,1)$
  - $se\ n < m\ si\ ha\ x^n < x^m\ se\ x > 1$

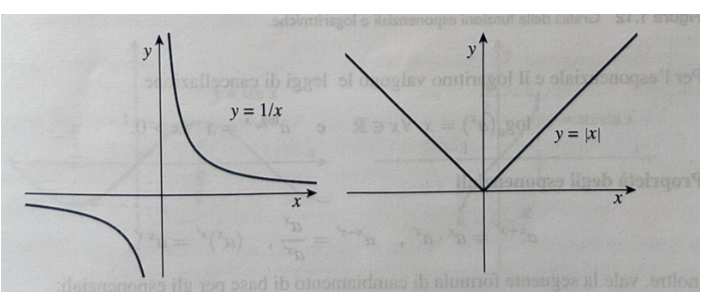




Reciproco: $\frac{1}{x} \rightarrow Dominio: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\ e\ Codominio: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

- E' una funzione dispari, iniettiva ma non monotona
- La funzione è invertibile: $f(x)^{-1} = \frac{1}{y}$

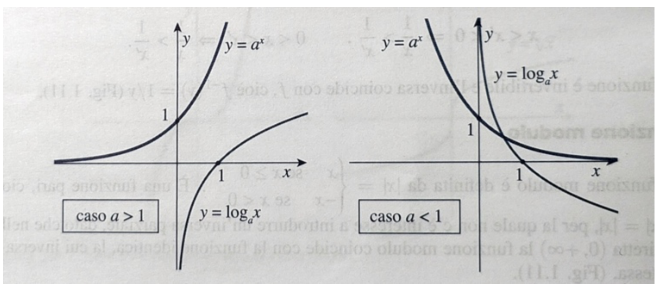
Valore Assoluto: $|x| = \begin{cases} x\ se\ x \geq 0 \\ -x\ se\ x \leq 0 \end{cases}$, è una funzione pari: $|-x| = |x|$, l'inversa è sé stessa perché il modulo coincide con la funzione identica
- Proprietà:
  - $|x \cdot x'| = |x| \cdot |x'|\ \ \forall x \in \mathbb{R}$
  - $\left|\frac{x}{x'}\right| = \frac{|x|}{|x'|}\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ x' \neq 0$
  - $|x + x'| \leq |x| + |x'|$ *
  - $|x - x'| \geq ||x| - |x'||$ (distanza)
  - $|x| < a \ \leftrightarrow\ -a < x < a\ \ (con\ a > 0)$
  - $|x| > a \ \leftrightarrow x < -a\ \vee\ x > a\ \ (con\ a > 0)$
  - $|\sum_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ conseguenza di *
  - $g(x) \leq f(x)\ \forall x\ \ \rightarrow |g(x)| \leq |f(x)|$



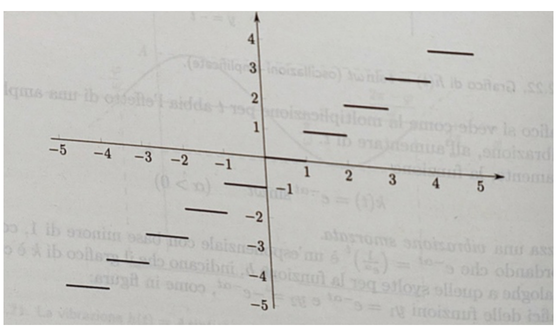
Esponenziale:
- Se a>1 è strettamente crescente
- Se 0<a<1 è strettamente decrescente (se a = 1 è una funzione costante y = 1)
  - $Se\ a\ \neq 1, \exists f(x)^{-1} = log_a(x)$
- Leggi di cancellazione:
  - $log_a(a^x) = x\ \ (\forall x \in \mathbb{R})\ \ e\ \ a^{log_a(x)} = x\ \ (\forall x > 0)$
- Proprietà:
  - $a^{x+x'} = a^x \cdot a^{x'}$
  - $a^{x-x'} = \frac{a^x}{a^{x'}}$
  - $(a^x)^{x'} = a^{x \cdot x'}$
  - $a^x = b^{x \cdot log_b(a)}\ con\ b > 0, b \neq 1$ (cambiamento di base)
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$ (potenze, utile per nepero)

Logaritmo:
- $Dominio: (0, +\infty)\ \ Codominio: \mathbb{R}$
- Se a>1 strettamente crescente
- Se 0<a<1 strettamente decrescente
- Proprietà: $(\forall x, x' > 0,\ b \in \mathbb{R})$
  - $log_a(x \cdot x') = log_a(x) + log_a(x')$
  - $log_a\left(\frac{|x|}{|x'|}\right) = log_a(x) - log_a(x')$
  - $log_a(x^b) = b \cdot log_a(x)$
  - $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}\ con\ a > 0, a \neq 1$ (cambiamento di base)

NB: $log_a(x^2) \neq 2log_a(x)$ perché bisogna mantenere la proprietà di x^2 perciò: $log_a(x^2) = 2log_a(|x|)$ bisogna mettere il valore assoluto!



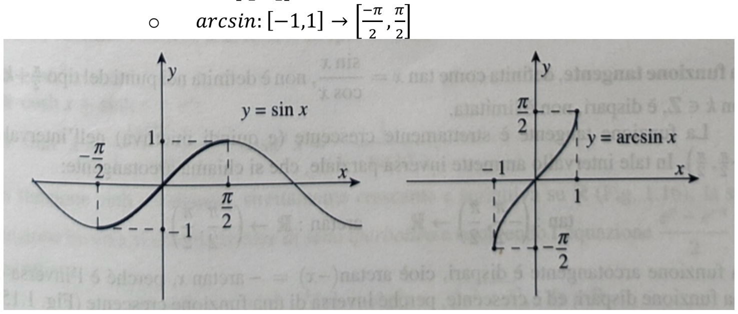
Funzione parte intera: [x] = quell'intero n tale che $n \leq x \leq n+1$
- Se $x \geq 0$ si prende la cifra prima della virgola
- Se $x \leq 0$ si prende il massimo intero $\leq x$
  - Tranne nel caso in cui x sia già intero



Funzioni Goniometriche

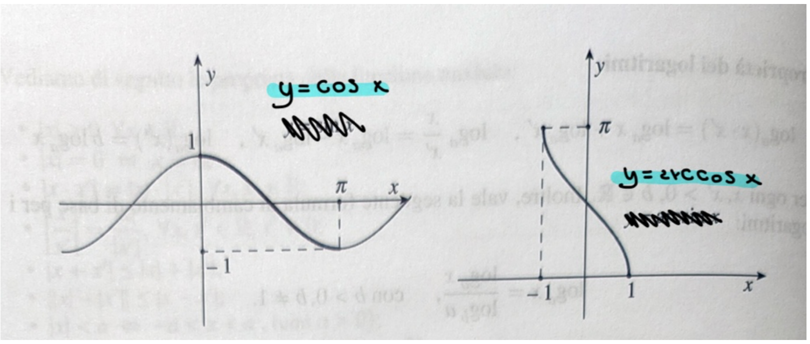
Seno: è una funzione dispari, limitata $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ e strettamente crescente nell'intervallo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e perciò in questo intervallo ammette inversa

- $sin: \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$
- $arcsin: [-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



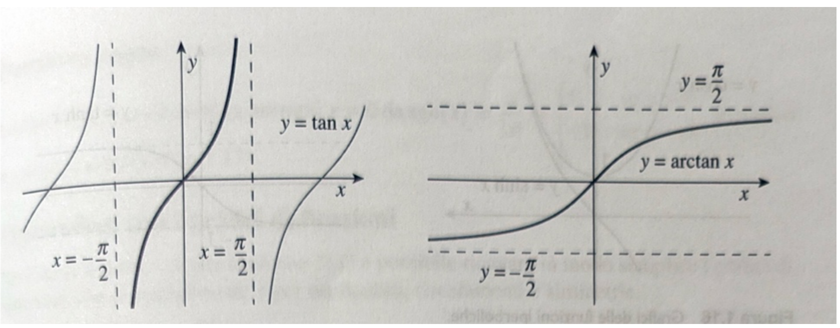
Coseno: è una funzione pari, limitata $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ e strettamente decrescente nell'intervallo $[0,\pi]$ e perciò in questo intervallo ammette inversa

- $cos: [0,\pi] \ \rightarrow [-1,1]$
- $arccos: [-1,1] \rightarrow [0,\pi]$



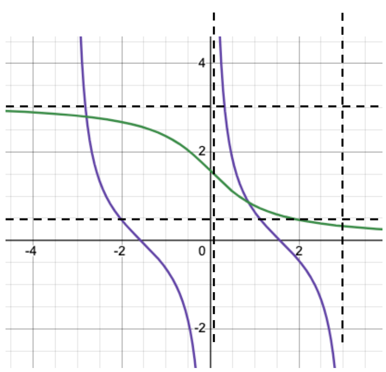
Tangente: è una funzione dispari e strettamente crescente nell'intervallo $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ e non è definita nei punti del tipo $\frac{\pi}{2}+k\pi \ \ (con\ k\ \in \mathbb{Z})$

- Quindi la sua inversa sarà anch'essa dispari e strettamente crescente
- tan: $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \ \rightarrow \ \mathbb{R} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $arctan$: $\mathbb{R} \ \rightarrow \ \left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$



Cotangente: è una funzione dispari e strettamente decrescente nell'intervallo $(0,\pi)$ e non è definita nei punti del tipo $k\pi \ \ (con\ k\ \in \mathbb{Z})$

- Quindi la sua inversa sarà anch'essa dispari e strettamente decrescente
- cot: $(0,\pi) \rightarrow \ \mathbb{R} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $arccot$: $\mathbb{R} \ \rightarrow \ (0,\pi)$



Principali relazioni tra le funzioni goniometriche

$\sin(x) = \frac{1}{\csc(x)} = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\tan(x) = \frac{1}{\cot(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \pm\sqrt{\sec^2 x - 1}$	$\sec(x) = \pm\sqrt{\tan^2 x + 1}$	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$\cos(x) = \frac{1}{\sec(x)} = \pm\sqrt{1 - sin^2 x}$	$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \pm\sqrt{csc^2 x - 1}$	$\csc(x) = \pm\sqrt{cot^2 x + 1}$	

Il segno davanti alla radice dipende dal quadrante in cui si trova x

Funzioni di angoli negativi

$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\csc(-x) = -\csc(x)$	$\sec(-x) = \sec(x)$	$\cot(-x) = -\cot(x)$

Formule di Addizione

$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$	$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 \pm \tan(a)\cdot\tan(b)}$	$\sin(a+b)\cdot\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2(b) - \cos^2(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$	$cot(a \pm b) = \dfrac{\cot(a)\cdot cot(b) \mp 1}{\cot(a) + cot(b)}$	$\cos(a+b)\cdot\cos(a-b) = cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2(b) - sin^2(a)$

Formule di Bisezione

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$	$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$	$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$	$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

Potenze di funzioni goniometriche

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\,2x)$	$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin(x) - sin\,3x)$	$\sin^4 x = \frac{1}{8}(3 - 4cos(2x) + \cos(4x))$	$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$
$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2x)$	$cos^3 x = \frac{1}{4}(3cos(x) + \cos 3x)$	$cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4cos(2x) + \cos(4x))$	$cot^2 x = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

Relazioni tra funzioni goniometriche inverse

$\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$	$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$	$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
$\arctan(x) + \mathrm{arccot}(x) = \dfrac{\pi}{2}$	$\arctan(-x) = -\arctan(x)$	$\mathrm{arccot}(-x) = \pi - \mathrm{arccot}(x)$

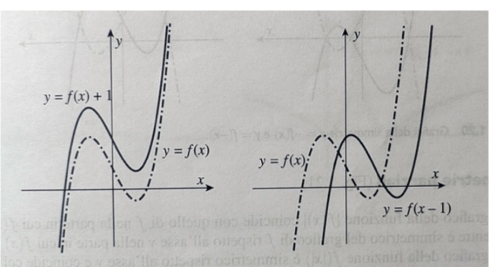
Somma, differenza, prodotto di funzioni goniometriche

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cdot\cos\frac{1}{2}(a-b)$	$\sin a\cdot\sin b = \frac{1}{2}\{\cos(a-b) - \cos(a+b)\}$	$\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b}$
$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cdot\sin\frac{1}{2}(a-b)$	$\cos a\cdot\cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a-b) + \cos(a+b)\}$	$\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}$
$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cdot\cos\frac{1}{2}(a-b)$	$\sin a\cdot\cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a-b) + \sin(a+b)\}$	$\cot a + \cot b = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin a\cdot\sin b}$
$\cos a - \cos b = 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cdot\sin\frac{1}{2}(b-a)$	$\cos a\cdot\sin b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) - \sin(a-b)\}$	$\cot a - \cot b = \dfrac{\sin(b-a)}{\sin a\cdot\sin b}$

Operazioni con i grafici di funzioni

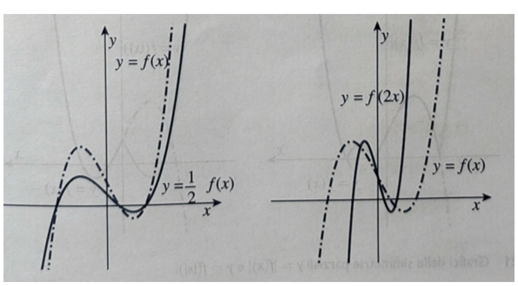
Traslazioni:

- $f(x) + k$ → si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ di un vettore di lunghezza k
  - $se\ k > 0$ verso l'alto
  - $se\ k < 0$ verso il basso
- $f(x + k)$ si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ di un vettore di lunghezza k
  - $se\ k > 0$ verso sinistra
  - $se\ k < 0$ verso destra

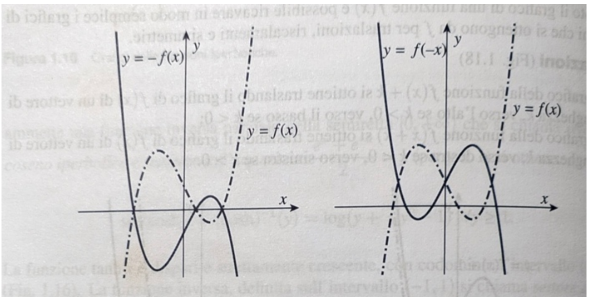


Riscalamenti:

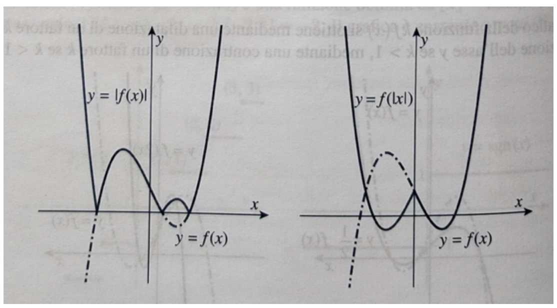
- $kf(x)$→ si ottiene mediante una dilatazione/contrazione del grafico di $f(x)$ di un fattore k nella direzione dell'asse y
  - $se\ k > 1$ dilatazione
  - $se\ k < 1$ contrazione
- $f(kx)$ si ottiene mediante una dilatazione/contrazione del grafico di $f(x)$ di un fattore k nella direzione dell'asse x
  - $se\ k > 1$ contrazione
  - $se\ k < 1$ dilatazione



Simmetrie:
- $-f(x)$→ è simmetrico rispetto al grafico di $f(x)$ rispetto all'asse x
- $f(-x)$→ è simmetrico rispetto al grafico di $f(x)$ rispetto all'asse y



Simmetrie Parziali:
- $|f(x)|$
  - dove $f(x) \geq 0$ coincide con quello di $f(x)$
  - dove $f(x) < 0$ è simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'asse y
- $f(|x|)$
  - dove $x \geq 0$ coincide con quello di $f(x)$
  - dove $x < 0$ è simmetrico del grafico di $f(x)$ rispetto all'asse y



Successioni

Limitata, Limitata Sup, Limitata Inf: valgono le stesse regole per le funzioni, però le successioni sono definite in $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ con indice n $\{a_n\}$

Definitivamente: Una successione $\{a_n\}$ possiede o (acquista) definitivamente una certa proprietà se $\exists N \in \mathbb{N} :\ a_n$ soddisfa quella proprietà $\forall n \geq N$

Successioni Convergenti: $\{a_n\}$ è convergente ↔ $\exists l \in \mathbb{R} : |a_n - l| < \varepsilon$ oppure $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ definitivamente, con $\varepsilon > 0$
  - NB: l deve essere unico!

Successioni Divergenti: $\{a_n\}$ è divergente ↔ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ oppure $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

Successioni Irregolari: Se non sono n'è convergenti e n'è divergenti → il loro limite non esiste (es: oscillanti)

Criterio di Convergenza di Cauchy: $\{a_n\}$ *convergente* ovvero ha limite finito ↔ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |a_n - a_m| < \varepsilon$ oppure $-\varepsilon + a_m < a_n < \varepsilon + a_m \quad \forall n, m > N$
  - Vale anche se abbiamo due successioni: $|a_n - b_m| < \varepsilon$ oppure $-\varepsilon < a_n - b_m < \varepsilon$ oppure $-\varepsilon + b_m < a_n < \varepsilon + b_m$
    - Nel caso di due successioni significa che sono asintotiche e convergenti

Infinitesima: Quando una successione $\{a_n\}$ tende a zero all'infinito

Crescente e Strettamente crescente: $a_n \leq a_{n+1}$, $a_n < a_{n+1}$

Decrescente e Strettamente decrescente: $a_n \geq a_{n+1}$, $a_n > a_{n+1}$

Teorema di Monotonia:
- $\{a_n\}$ monotona crescente e superiormente limitata → è convergente ed il suo limite è uguale a $\sup\{a_n\}$
- $\{a_n\}$ monotona decrescente e inferiormente limitata → è convergente ed il suo limite è uguale a $\inf\{a_n\}$
  - **Corollario**
    - se $\{a_n\}$ successione monotona, converge o diverge sempre ed il suo limite esiste

Algebra dei limiti: Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$

$a_n \pm b_n \to a \pm b$	$a_n \cdot b_m \to ab$	$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$	${a_n}^{b_n} \to a^b\ (a_n, a > 0)$

Teorema di Permanenza del segno:
- 1° forma: Se $a_n \to a$ e $a > 0$ allora $a_n > 0$ *definitvamente* oppure se $a < 0$ allora $a_n < 0$ *definitvamente*
- 2° forma: Se $a_n \to a$, $b_n \to b$ e $a_n \geq b_n$ *definitivamente*, allora $a \geq b$

Teorema del Confronto: Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ $definitivamente$ e $a_n \to l$, $c_n \to l$ allora anche $b_n \to l$ $(l \in \mathbb{R})$

- *Corollario*:
  - Se $|b_n| \leq c_n$ $ovvero$ $-c_n \leq b_n \leq c_n$ $definitivamente$ e $c_n \to 0$ allora anche $b_n \to 0$
  - Se $c_n \to 0$ e b_n è $limitata$ $(ma\ non\ necessariamente\ convergente)$ allora $c_n b_n \to 0$

Regola dei segni:

- se $a_n \to a > 0$ e $b_n \to 0^+$ allora $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$
- se $a_n \to a < 0$ o $b_n \to 0^-$ allora $\frac{a_n}{b_n} \to -\infty$

Forme Indeterminate:

F.I. di tipo moltiplicativo	F.I. di tipo esponenziale	F.I. di tipo Additivo
$0 \cdot \infty$	$1^{\pm\infty}$	$+\infty - \infty$
$\frac{0}{0}$	0^0	
$\frac{\infty}{\infty}$	$(\infty)^0$	

Tecniche Risolutive:

somma e sottrai	Raccogli chi comanda	Moltiplica e dividi	Moltiplica, dividi e razionalizza (insieme)	F.I. Esponenziali: ${a_n}^{b_n} = e^{\log({a_n}^{b_n})} = e^{b_n \cdot \log(a_n)}$

Numero di Nepero: Sia a_n $una\ successione\ divergente$ allora esiste $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{an}\right)^{a_n} = e$

Confronti e stime Asintotiche: se abbiamo $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} \to 1$, allora le due successioni sono asintotiche e si definisce: $a_n \sim b_n$

- Proprietà:
  - Se $a_n \sim b_n$ allora convergono allo stesso limite o divergono entrambe a $\pm\infty$ o entrambe non hanno limite
  - Si possono scrivere come catene di funzioni asintotiche: se $a_n \sim b_n \sim \ldots \sim c_n \ \to \ a_n \sim c_n$
  - Un'espressione può essere stimata fattore per fattore: se $a_n \sim b_n,\ c_n \sim d_n,\ e_n \sim f_n$ allora $\frac{a_n c_n}{e_n} \sim \frac{b_n d_n}{f_n}$
    - NB: non vale per la somma o per l'esponenziale

Criterio del rapporto: Sia a_n una succ. positiva t.c. $a_n > 0\ \forall n$, se esiste $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

- Se $l < 1$ $a_n \to 0$ (monotona decrescente $a_n > a_{n+1}$)
- Se $l > 1$ $a_n \to +\infty$ (monotona crescente $a_{n+1} > a_n$)

Gerarchia infiniti: (+lento → +veloce)

$\ln(\ln(x)) \to \log(x), \log_k(x) \to \log^a(x) \to x^{\frac{1}{3}} \to x^{\frac{1}{2}} \to x, 2x \to x^2 \to x^n \to 2^x \to 3^x \to n! \to n^n$

Gerarchia infinitesimi: (+veloce → +lento verso 0)

$\ln(\ln(x)) \to \log(x), \log_k(x) \to \log^a(x) \to x^{\frac{1}{3}} \to x^{\frac{1}{2}} \to x, 2x \to x^2 \to x^n \to 2^x \to 3^x \to n! \to n^n$

Limiti

Punto di Accumulazione: $\forall \varepsilon > 0\ (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) \cap D - \{x_0\} \neq \emptyset$

- significa che posso avvicinarmi quanto voglio a x_0 e troverò sempre dei valori abbastanza vicini ad x_0 senza che siano x_0 (insieme denso)
  - il limite ha senso di esistere solo se l'insieme è denso, altrimenti non mi potrei avvicinare quanto voglio ad un certo valore

Teorema di unicità del limite: Se esiste $\lim_{x\to c} f(x) = l$ tale limite l è unico

Teorema esistenza del limite:

- $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ Però può succedere che i due limiti siano diversi o solo uno dei due esista
- $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} b_n = x_0 : a_n, b_n \neq x_0\ \forall n \in N\ e\ f(a_n) = f(b_n)$ (esistenza del limite con limiti di successioni)

Limiti delle funzioni elementari:

- Potenze: $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & se\ n\ è\ pari \\ -\infty & se\ è\ n\ è\ dispari \end{cases}$
- Logaritmi: $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & se\ a > 1 \\ -\infty & se\ a < 1 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} 0 & se\ a > 1 \\ +\infty & se\ a < 1 \end{cases}$
- Funzioni Goniometriche:

$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$	$\nexists \lim_{x\to+\infty} \cos x$	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$	$\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0\ \ \forall x_0 \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$	$\nexists \lim_{x\to-\infty} \sin x$	$\nexists \lim_{x\to-\infty} \cos x$	$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$	$\lim_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0\ \ \forall x_0 \in [-1,1]$
$\lim_{x\to x_0} \arctan x = \arctan x_0$	$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$		$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = \frac{-\pi}{2}$	$\lim_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0\ \ \forall x_0 \in [-1,1]$

- Modulo: $\lim_{x\to x_0} |x| = |x_0|$ $\quad \lim_{x\to\pm\infty} |x| = +\infty$
- Parte Intera: $\lim_{x\to x_0} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor\ \forall x_0 \notin \mathbb{Z}$ $\quad \lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n$ $\quad \lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1\ \ \forall n \in \mathbb{Z}$

Teorema del confronto: Se ∃ $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l$ e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \to c$, allora ∃ $\lim_{x\to c} g(x) = l$ $(c, l \in \mathbb{R} \cap \{\pm\infty\})$

- *Corollario*:
  1. Se ∃ $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ e $|h(x)| \leq g(x)$ oppure $-g(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to c$, allora ∃ $\lim_{x\to c} h(x) = 0$
  2. Se ∃ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $g(x)$ limitata definitivamente per $x \to c$, allora ∃ $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$

Teorema di Permanenza del segno:
- 1° forma: Se ∃ $\lim_{x\to c} f(x) = l$ e $l \geq 0$, allora $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to c$ (vale anche solo >)
- 2° forma: Se ∃ $\lim_{x\to c} f(x) = l_1$ e ∃ $\lim_{x\to c} g(x) = l_2$ $(l_1, l_2\ finiti\ o\ infiniti)$ e $l_1 \leq l_2$ $\to$ $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to c$ (vale anche viceversa)

Teorema cambio di variabile o delle funz. Composte:
- Se ∃ $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e ∃ $\lim_{t\to l} g(t) = \lambda$ $\to$ ∃ $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lambda$
  - Con $f(x) \neq l$ definitivamente per $x \to x_0$ (per evitare punti di discontinuità)

Teorema cambio di variabile in altri casi:
- Se ho $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = F.I.$ e ∃ $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e ∃ $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda$ allora:
  - $t = a(x)$, calcolo $\lim_{x\to x_0} t = l$, ricavo x da $t = a(x)$ ed ottengo $a(t)$ e quindi $\lim_{t\to l} f(a(t))g(a(t)) = \lambda$

Teorema criterio del rapporto:

Limiti con parametro: studiare i casi del parametro $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$

Limiti Notevoli:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\log a}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x\to +\infty} a^{-x} \cdot x^b = 0$ $(\forall b > 0, a > 1)$
$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^\alpha - 1}{x} = \alpha$	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = +\infty$ $(\forall b > 0, a > 1)$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[\alpha]{(x+1)} - 1}{x} = \alpha$	$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0^+} x^a \cdot \log_b x = 0$ $(\forall a > 0, b > 1)$	$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$

Limiti asintotici: $(x \to 0)$ al posto di x posso anche avere $f(x)$

$\sin x \sim x$	$(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^2$	$(e^x - 1) \sim x$	$\log(x+1) \sim x$	$[(1+x)^\alpha - 1] \sim \alpha x$	$\arcsin x \sim x$	$\arctan x \sim x$	$\arccos x - \frac{\pi}{2} \sim -1$

Studio di funzione

Asintoto Verticale: $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x\to c^\pm} f(x) = \pm\infty$ $(c \in \mathbb{R})$ Equazione: $x = c$

Asintoto Orizzontale: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$ oppure $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$ Equazione: $y = l$

Asintoto Obliquo: Quando $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ possiamo verificare se:

1. Esiste finito: $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$
2. Esiste finito: $\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - mx] = q$ t.c. $\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0$ $\to$ $f(x) \sim mx + q$ Equazione $= y = mx + q$

Teoria applicata agli Esercizi

Limiti

Utilizzo del Teorema dei due carabinieri:

Verificare se un limite esiste: ***Che cosa ci potrebbe dare problemi per la non esistenza del limite?***

- Funzioni oscillanti → ovvero non determinate all'infinito
- Discontinuità sul dominio o non definite in un punto/intorno → siccome $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x)$
  - Potrebbe però esistere solo $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (da sx) oppure $\lim_{x \to x_0 -} f(x)$ (da dx)

Che cosa possiamo utilizzare?

- Teorema dei due carabinieri ed il suo corollario
- Teorema del cambio di variabile o delle funz. Composte
  - Utile per verificare se esiste il limite di una funzione composta

NB: basta che non esista un limite per una funzione ed il limite totale non esiste → per le operazioni tra limiti