Geometria nello spazio

1. Un vettore geometrico è una classe di segmenti orientati, ovvero dati due punti A e B è il segmento che ha come estremo iniziale A e come estremo finale B. Esso si rappresenta con una freccia dritta che va da A a B

   Dati v e w vettori geometrici, in modo tale che l'estremo finale di v coincida con l'estremo iniziale di w, la loro somma è data dal vettore che ha come estremo iniziale l'estremo iniziale di v e come estremo finale l'estremo finale di w.

   Proprietà:
   - Proprietà **commutativa**: v + w = w + v
   - Proprietà **associativa**: (v+w) + u = (u+w) + v
   - **Elemento neutro** → esistenza del vettore nullo: v + 0 = v
   - **Esistenza degli opposti** → v + (-v) = 0 (vettore nullo)

2. Dato un vettore v $\neq 0$ ed uno scalare $\lambda \neq 0$ il loro prodotto avrà:
   - Direzione: stessa direzione di v
   - Verso: concorde se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$
   - Modulo: |v| |λ|

   Altrimenti se v = 0 e $\lambda = 0$ il loro prodotto sarà 0 (vettore nullo)

3. Dati due vettori geometrici v e w posti in modo tale che i loro estremi iniziali coincidano, e sia θ l'angolo formato dai due vettori. Allora il loro prodotto è dato dallo **scalare**: |v| |w| cos(θ)

   Utilizzando le coordinate possiamo riscrivere i due vettori v e w come proiezione di sé stessi sui 3 assi ottenendo così:
   v = (v1,v2,v3) e w = (w1,w2,w3) il loro prodotto sarà uno scalare dato da: $\sum_{i=1}^{3} v_i w_i$

4. Normalizzare un vettore significa renderlo un versore, ovvero un vettore di modulo 1, perciò dato v $\neq 0$
   il vettore geometrico seguente è normalizzazione di v: $\frac{v}{|v|} = \frac{1}{|v|} v$

   Se si conoscono le coordinate del vettore, perciò avremo v = (v1,v2,v3), la sua normalizzazione è dalla seguente
   formula: $\frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}(v_1, v_2, v_3)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$ → $|v|$ (norma di v)

5. La proiezione ortogonale di un vettore v $\neq 0$ su un versore e, sarà un vettore geometrico dato da:
   $(v \cdot e)e = \left(|\mathrm{v}||\mathrm{e}|\cos(\theta)\right) e = (|\mathrm{v}|\cos(\theta)\,)\,\mathrm{e}$ (come risultato avremo uno scalare per un versore)

   Analogamente la proiezione di un vettore v $\neq 0$ su un vettore w $\neq 0$, sarà un vettore geometrico ottenuto allo stesso modo di prima, infatti proprio per questo motivo è necessario trattare w come un versore andando a normalizzarlo:
   $\left(v \cdot \frac{w}{|w|}\right)\frac{w}{|w|} = \left(|\mathrm{v}| \left|\frac{w}{|w|}\right| \cos(\theta)\right)\frac{w}{|w|} = \left(|\mathrm{v}|\cos(\theta)\right)\frac{w}{|w|}$

6. Data una retta r, l'insieme dei piani che contengono r è detto fascio di piani di sostegno r, ed è descritto come segue:

   Data una retta r descritta dalle seguenti equazioni cartesiane $r = \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax' + by' + cz' + d' = 0 \end{cases}$

   Il fascio di piani è descritto dall'equazione: $\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(ax' + by' + cz' + d') = 0$ con λ, μ scalari e per ogni coppia di $\lambda, \mu \neq 0$ otteniamo l'equazione cartesiana di un piano contenente r

   Un esempio del suo utilizzo per esempio potrebbe essere che ci viene chiesto di trovare un piano che contenga una determinata retta e passante per un punto P

7. I vettori v, w, u possono essere descritti in coordinate come segue: $v = (v_1, v_2, v_3),\ w = (w_1, w_2, w_3),\ u = (u_1, u_2, u_3)$
   Verifichiamo ora che $v(u + w) = v \cdot u + v \cdot w$ utilizzando il prodotto scalare otteniamo:
   $$v(u + w) = v\{(u_1 + w_1), (u_2 + w_2), (u_3 + w_3)\} = v_1(u_1 + w_1) + v_2(u_2 + w_2) + v_3(u_3 + w_3) = v_1u_1 + v_1w_1 + v_2u_2 + v_2w_2 + v_3u_3 + v_3w_3$$
   $$v \cdot u + v \cdot w = (v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3) + (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) = v_1u_1 + v_1w_1 + v_2u_2 + v_2w_2 + v_3u_3 + v_3w_3$$

   Il risultato che abbiamo ottenuto è lo stesso perciò abbiamo verificato la proprietà.

8. Le posizioni reciproche di due rette nello spazio sono 3:
   a. Parallele
   b. Incidenti o Incidenti e Ortogonali
   c. Sghembe o Sghembe e Ortogonali

Esercizi

Equazione parametrica retta: $\begin{cases} x = x_A + tv_1 \\ y = y_A + tv_2 \\ z = z_A + tv_3 \end{cases}$

Equazione cartesiana retta: Ricavo t nell'equazione parametrica e poi la sostituisco es: $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 2z - y + 1 = 0 \end{cases}$

Trovare il vettore direzionale retta:
1. Se conosco il punto A ed il punto B → $v_r = B - A$
2. Se conosco l'equazione parametrica → $v_r = coordinate\ di\ t$
3. Se conosco l'equazione cartesiana → mi devo ricondurre all'equazione parametrica risolvendo il sistema e poi sostituendo t con la variabile trovata

Posizione reciproca rette:
- Parallele: vettori direzionali $v_r\ e\ v_{r'}$ hanno la stessa direzione (se sono proporzionali)
- Incidenti: se le due rette hanno un punto in comune
  - Per vedere se hanno punti in comune eguagliamo le equazioni parametriche (utilizzando due parametri differenti es: t e s)
- Sghembe: se non sono n'è parallele n'è incidenti

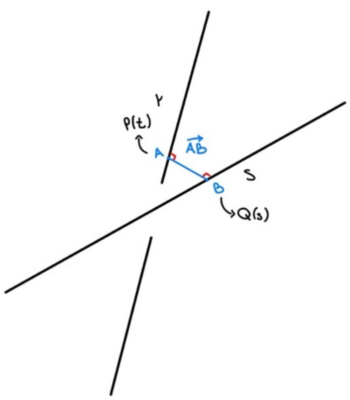
Se le due rette sono incidenti o sghembe potrebbero essere anche ortogonali se: $v_r \cdot v_{r'} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{3} v_{r_i} v_{r_i'} = 0$

Distanza punto-punto: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Distanza punto-retta: Per trovare la distanza da un punto P ad una retta r dobbiamo trovare il vettore geometrico $\overrightarrow{AP}$ che sia ortogonale a v_r, a quel punto $d(P, r) = d(P, A)$

1. Troviamo il vettore direzionale $\overrightarrow{AP}$ con $A = Q(t)$ punto generico della retta r ricavato dall'equazione parametrica
2. Imponiamo la condizione di ortogonalità tra $\overrightarrow{AP}\ e\ r \rightarrow \{\overrightarrow{AP} \cdot v_r = 0$ e sostituiamo il valore di t trovato in $\overrightarrow{AP}$
3. $d(P, r) = d(P, A) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}$

Distanza retta-retta:
- Rappresenta la minima distanza tra le due rette, per calcolarla vogliamo trovare due punti $H\ e\ H'$ t.c. $d(r, r') = d(H, H')$, la retta formata dai punti H, H' che collega le due rette deve ovviamente essere ortogonale ad esse.



1. Rette incidenti: la distanza è zero
2. Rette Parallele: si calcola la distanza punto-retta
3. Rette sghembe: In questo caso dobbiamo prendere due punti generici dati dalle eq. Parametriche $P(t)\ e\ Q(s)$ trovare il vettore direzionale di questi due punti, ed imporre la condizione di ortogonalità per entrambe le rette tramite un sistema a due equazioni a due variabili ($t\ e\ s$), quindi si risolve e si trovano i valori di $t\ e\ s$, a questo punto basta sostituire i valori in $P(t)\ e\ Q(s)$ e calcolare la distanza tra questi due punti.

1) Troviamo il vettore direzionale $\overrightarrow{AB} = P(t) - Q(s)\ \ es{:} \{(1 - t), (s), (s - 1 - 2t)\}$
2) Imponiamo la condizione di ortogonalità: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot v_r = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot v_s = 0 \end{cases}$ e sostituiamo il valore di t trovato in $\overrightarrow{AB}$
3) $d(r, r') = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}$

NB: non è vero che se sono ortogonali non va posta la condizione di ortogonalità, perché devo ottenere: $\overrightarrow{AB} \perp r\ e\ \overrightarrow{AB} \perp r'$

Equazione Parametrica di un piano: $\begin{cases} x = x_A + tv_1 + sw_1 \\ y = y_A + tv_2 + sw_2 \\ z = z_A + tv_3 + sw_3 \end{cases}$

- Come trovarla?
  1. Mi ricavo una delle variabili per esempio x: $x = ay + bz + c$
  2. Siccome ho due parametri impongo che y sia t e z sia s
  3. Ottengo un sistema della forma: $\begin{cases} x = c + a \cdot t + b \cdot s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$

Rette Complanari: Per esserlo devono essere incidenti o parallele siccome devono giacere sullo stesso piano
- Trovare equazione del piano che le contiene:
  1. Incidenti:
     a. Basta prendere i vettori direzionali delle due rette: $v_r\ e\ v_s$ ed il punto di incidenza in modo tale che appartenga ad entrambe le rette e sostituire i valori nell'equazione parametrica di un piano
  2. Parallele:
     b. Prendo il vettore direttore di una delle due rette, ed un punto A sulla prima retta ed un punto B sulla seconda retta e trovo il vettore direttore $\overrightarrow{AB}$ che passa per questi due punti e sostituisco i valori nell'equazione parametrica del piano

- NB: Se due rette sono complanari per trovare l'equazione del piano che le contiene posso anche calcolare il fascio di piani con le equazioni cartesiane di una retta ed un punto a caso di una delle due rette perché tanto sono complanari per forza

Equazione cartesiana del piano:

- Conoscendo un punto A ed $\underline{n}$
  1. Trovo il piano perpendicolare ad $\underline{n} \rightarrow n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$
  2. Impongo il passaggio per A per trovare $d \rightarrow\ n_1x_A + n_2y_A + n_3z_A + d = 0$
  3. Riscrivo l'equazione del piano come al punto 1 ma con il valore di d trovato al punto 2
- Conoscendo un punto A ed una retta r
  1. Fascio di piani di sostegno r: $\lambda(ax + by + cz + d) + \ \mu(ax' + by' + cz' + d') = 0$
  2. Nell'equazione sostituisco nelle parentesi le equazioni cartesiane della retta → in questo modo ora la retta appartiene al piano
  3. Impongo che anche il punto A appartenga al piano, quindi sostituisco le coordinate del punto con i valori di x, y, z in entrambe le equazioni e ricavo $\lambda\ e\ \mu$ (ad uno dei due dovrò attribuire un valore comodo casuale che voglio io)
  4. Riscrivo l'equazione con $\lambda\ e\ \mu$ calcolati come nel punto 2
- Avendo due rette complanari
  - Posso fare la stessa cosa di quando conosco un punto ed una retta, vedi sopra rette complanari

Punto di intersezione retta-piano: Prendo il punto generico $P(t)$ della retta r e lo sostituisco nell'equazione del piano
$n_1(x_A + tv_1) + n_2(y_A + tv_2) + n_3(z_A + tv_3) + d = 0$ così trovo t e sostituendolo in $P(t)$ trovo il punto di intersezione

Posizione reciproca di due piani: Dati due piani: $\begin{matrix} \pi_1: ax + by + cz + d = 0 \\ \pi_2: ax' + by' + cz' + d' = 0 \end{matrix}$ ed i loro rispettivi vettori normali: $\underline{n} = (a, b, c)\ e\ \underline{n}' = (a', b', c')$

I piani sono:

- Paralleli: se $\underline{n}\ e\ \underline{n}'$ sono proporzionali
- Incidenti: altrimenti (l'intersezione è una retta)
  - Ortogonali: se $\underline{n} \cdot \underline{n}' = 0$ → se sono ortogonali ovviamente sono incidenti

Posizione reciproca retta-piano: Sia data una retta r ed un piano π, essi sono:

- Paralleli: se $\underline{v_r}$ e $\underline{n}$ sono ortogonali (vale anche viceversa)
  - Perché $\underline{n}$ è ortogonale al piano
- Incidenti: se hanno un punto in comune
  - Basta prendere l'equazione cartesiana del piano $\pi_1: ax + by + cz + d = 0$ e facendo passare il piano per il punto generico della retta $P(t)$ si risolve per t
  - Ortogonali: se $\underline{v_r} \cdot \underline{n} = 0$

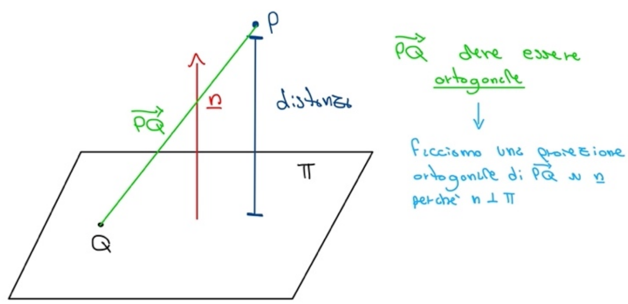
Trovare $r\ \perp\ \pi$ e passante per P:

1. Siccome $r \perp \pi$ (ortogonale), allora $\underline{n} = v_r$ perché $\underline{n} \perp \pi$
2. Ricaviamo l'equazione parametrica di r : t sarà dato da v_r ed imponiamo che passi per P scrivendolo al posto di x_A, y_A, z_A

Distanza punto-piano = retta-piano = piano-piano:

1) Determino il punto di arrivo P e scelgo un punto casuale sul piano che chiamo Q
2) Calcolo il vettore $\overrightarrow{PQ}$ e siccome la distanza è rappresentata dalla distanza minima devo rendere $\overrightarrow{PQ}$ ortogonale a P
3) Siccome $\underline{n}$ è ortogonale al piano, mi basta fare una proiezione ortogonale di $\overrightarrow{PQ}$ su $\underline{n}$
   a. Nel calcolo della proiezione ortogonale $\underline{n}$ va normalizzato perché in questo modo diventa come una direzione di un asse e perciò viene proiettata solo la lunghezza della componente di $\overrightarrow{PQ}$, altrimenti otterremmo anche la lunghezza di $\underline{n}$ ma a noi serve solo la distanza da P al piano π → praticamente $\underline{n}$ come versore viene allungato fino a raggiungere P
4) Dopo otterremo il vettore blu che rappresenta la distanza come in figura e perciò basterà calcolare il suo modulo per ottenere la distanza come scalare

$d(\pi, P) = ?$



$$\left|\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{\underline{n}}{|n|}\right)\cdot\frac{\underline{n}}{|n|}\right| = \left|\overbrace{\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{\underline{n}}{|n|^2}\right)}^{\text{scalare}}\cdot\overbrace{\underline{n}}^{\text{vettore}}\right|$$

$$\hookrightarrow \frac{x_{PQ}\cdot x_n + y_{PQ}\cdot y_n + z_{PQ}\cdot z_n}{a^2+b^2+c^2}\cdot \overbrace{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}}^{\underline{n}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{x_{PQ}\cdot x_n + y_{PQ}\cdot y_n + z_{PQ}\cdot z_n}{a^2+b^2+c^2}\cdot a\right)^2 + \left(\frac{x_{PQ}\cdot x_n + y_{PQ}\cdot y_n + z_{PQ}\cdot z_n}{a^2+b^2+c^2}\cdot b\right)^2 + \left(\frac{x_{PQ}\cdot x_n + y_{PQ}\cdot y_n + z_{PQ}\cdot z_n}{a^2+b^2+c^2}\cdot c\right)^2}$$

Distanza punto-piano = retta-piano = piano-piano FORMULA: Sia $P = (x_P, y_P, z_P)$ un punto e sia π il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$

- Allora $d(P,\pi) = \frac{|ax_P+by_P+cz_P+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Osservazione distanza retta ⊥ piano: Siccome il piano occupa l'intero spazio e la retta è ortogonale al piano, essi saranno per forza incidenti, quindi siccome la distanza è data dalla distanza minima io devo trovare il punto di incidenza che chiameremo H sostituendo il valore dell'equazione parametrica della retta in x,y,z del piano e calcolare la distanza da questi due punti, con la formula per la distanza tra i punti siccome i punti H e il punto sul piano A saranno complanari

Ottenere l'equazione parametrica dall'equazione cartesiana:

1. Passo dall'equazione cartesiana alla matrice associata
2. Riduco a scalini la matrice e vedo quali sono le colonne pivot e non pivot, quelle non pivot saranno le variabili libere che potrò associare ad un parametro
3. Applico la riduzione all'indietro per trovare le soluzioni del sistema e poi nel sistema scrivo la variabile libera uguale al parametro e le altre due equazioni le riscrivo uguali con il valore della variabile libera nelle equazioni uguale a t,s… in base a quante variabili libere ho
   a) Per le rette è sempre solo 1 variabile libera
   b) Per i piani invece sono sempre 2 variabili libere

Esempio 13. *Consideriamo la retta r nello spazio descritta dalle seguenti equazioni cartesiane.*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3x = 5 \end{cases}$$

Vogliamo ricavare equazioni parametriche di r. È possibile farlo risolvendo il sistema lineare dato dalle due equazioni cartesiane: esso ha infinite soluzioni che dipendono da una variabile libera.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right] \overrightarrow{E_{21}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

$$\overrightarrow{D_1(-\frac{1}{5})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \overrightarrow{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 \end{array}\right]$$

La variabile liberaè z, ossia quella che corrisponde alla colonna che non contiene pivot. che poniamo uguale al parametro t. Equazioni parametriche di r sono dunque ottenute come soluzioni nel sistema lineare di partenza:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Sistemi Lineari

1. Le operazioni elementari su un sistema lineare sono:
   a. S_{ij} : Scambiare due righe R_i e R_j
   b. $D_i(\lambda)$: Moltiplicare tutti i coefficienti della riga R_i per λ con $\lambda \neq 0$
   c. $E_{ij}(\lambda)$: Sommare alla riga R_i la riga R_j moltiplicata per uno scalare λ con $\lambda \neq 0$

2. Una matrice A si dice a scalini se:
   a. Eventuali righe nulle sono le ultime righe della matrice (in basso)
   b. Per ogni riga non nulla R_{i+1} (riga successiva) il primo elemento non nullo si trova più a destra rispetto al primo elemento non nullo della riga R_i

$$\begin{bmatrix} \mathbf{4} & -1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{-3} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Una matrice A si dice a scalini ridotta per righe ($rref(A)$) se:
   a. Eventuali righe nulle sono le ultime righe della matrice (in basso)
   b. Per ogni riga non nulla R_{i+1} (riga successiva) il primo elemento non nullo si trova più a destra rispetto al primo elemento non nullo della riga R_i però a differenza con la matrice a scalini questo elemento deve essere uguale a 1 e tutti gli altri elementi della riga devono essere uguali a 0
      a. Riassunto:
         i. E' una matrice ridotta a scalini dove il primo elemento di ogni riga R_i non nulla è uguale a 1 e tutti gli altri elementi della riga sono uguali a 0
         ii. E' una matrice a scalini dove tutti gli elementi sono 0 tranne sulla diagonale dove troviamo tutti 1
         iii. E' una matrice a scalini dove ogni pivot è 1 ed è l'unico elemento non nullo della propria colonna (definizione Postinghel)
   c. Es: Matrice identità

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Un Pivot è il primo elemento non nullo di una Riga R_i non nulla di una matrice a scalini

4. Algoritmo di Gauss-Jordan:
    a. Cerchiamo la prima colonna che abbia come primo elemento un elemento non nullo e lo chiamiamo $p1$
    b. Eventualmente scambiamo le righe con l'operazione S_{ij} per averla come prima colonna
    c. Utilizziamo l'operazione $E_{ij}(\lambda)$ per rendere tutti gli elementi della colonna di $p1$ (tranne $p1$) $nulli$
    d. Ripetiamo il procedimento escludendo la riga di $p1$, alla fine del procedimento avremo ottenuto una matrice a scalini
5. Algoritmo Riduzione per righe:
    a. Per ogni pivot (p_k) eseguiamo l'operazione $D_k\left(\frac{1}{p_k}\right)$ così il pivot diventa uguale a 1
    b. Riduciamo a zero tutti i termini sopra a (p_k) della colonna di (p_k) tramite operazioni $E_{jk}(\lambda)$ con $\lambda \neq 0$

6. Il rango di una matrice A, $rg(A)$ è uguale al numero totale di pivot di una sua forma a scalini

7. Teorema di Rouché-Capelli: Dato un sistema lineare in n incognite e sia $(A|b)$ la sua matrice completa associata
    a. Il sistema è incompatibile se $rg(A) < rg(A|b)$ → il sistema non ammette soluzioni
        i. Quando non ho variabili ma ho termini noti (quindi c'è un problema)
    b. Il sistema è compatibile se e solo se $rg(A) = rg(A|b)$ in questo caso il sistema ha:
        i. Un'unica soluzione se $rg(A) = n$
        ii. Infinite soluzioni che dipendono a $n - rg(A)$ variabili libere se $rg(A) < n$,

8. Questo è un esempio di un sistema non compatibile: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$
    a. Perché la matrice associata completa ridotta a scalini è di questa forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ → $rg(A) < rg(A|b)$

9. Questo è un esempio di un sistema compatibile: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$
    a. Perché la matrice associata completa ridotta a scalini è di questa forma $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$ → $rg(A) = rg(A|b)\ e\ rg(A) = n$ → 1 soluzione

10. Per ottenere l'equazione parametrica dall'equazione cartesiana svolgo i seguenti passaggi:
    a. Passo dall'equazione cartesiana alla matrice associata
    b. Riduco a scalini la matrice e vedo quali sono le colonne pivot e non pivot, quelle non pivot saranno le variabili libere che potrò associare ad un parametro
    c. Applico la riduzione all'indietro per trovare le soluzioni del sistema e poi nel sistema scrivo la variabile libera uguale al parametro e le altre due equazioni le riscrivo uguali con il valore della variabile libera nelle equazioni uguale a t,s… in base a quante variabili libere ho
        i. Per le rette è sempre solo 1 variabile libera
        ii. Per i piani invece sono sempre 2 variabili libere

Esempio 13. *Consideriamo la retta r nello spazio descritta dalle seguenti equazioni cartesiane.*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3x = 5 \end{cases}$$

Vogliamo ricavare equazioni parametriche di r. È possibile farlo risolvendo il sistema lineare dato dalle due equazioni cartesiane: esso ha infinite soluzioni che dipendono da una variabile libera.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right] \overrightarrow{E_{21}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

$$\overrightarrow{D_1(-\frac{1}{5})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \overrightarrow{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 \end{array}\right]$$

La variabile liberaè z, ossia quella che corrisponde alla colonna che non contiene pivot. che poniamo uguale al parametrio t. Equazioni parametriche di r sono dunque ottenute come soluzioni nel sistema lineare di partenza:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Esercizi

Casi da considerare per le soluzioni del sistema:
1. Se ci sono valori di k per il quale il sistema ammette infinite soluzioni ovvero $\exists k\ t.c.\ rg(A) < n$
    a. In questo caso bisogna fare 2 riduzioni all'indietro o due sistemi
        i. Nel primo si considera il sistema con un'unica soluzione quindi $k \neq valore$
        ii. Nel secondo si considera $k = valore$ considerando che c'è la variabile libera quindi per esempio se la variabile libera è z da $(k-1)z = 0$ diventa $(1-1)z = t$ nel caso in cui il valore sia $k \neq 1\ e\ k = 1$

2. Altrimenti se il sistema non ammette infinite soluzioni:
    a. I due casi rappresentano un valore di k scelto in modo comodo, quindi es: $k \neq 1 \; e \; k = 1$
        i. $k \neq 1$ è la soluzione con ancora il k
        ii. $k = 1$ è la soluzione come numeri con k in questo caso uguale a 1

Verificare se un sistema è compatibile con eventuali condizioni di esistenza: In questo caso se pongo $k \neq valore$ per le condizioni di esistenza della frazione allora dico che posso fare quell'operazione perché suppongo che k sia diverso da tale valore e poi quando devo dire per quali valori di k è compatibile devo verificare ponendo $k = valore$ se il sistema è compatibile o no riducendo a scalini la matrice originale, se è compatibile allora è compatibile per ogni valore di k altrimenti per tale valore non sarà compatibile.

Matrici

1. Siano $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) e \;\; B = [b_{i'j'}] \in M_{m'\times n'}(\mathbb{R})$ due matrici, il prodotto righe per colonne tra due matrici può essere definito se $n = m'$, ovvero se il numero di colonne della matrice A è uguale al numero di righe di B. In questo caso diremo che A è conformabile a sinistra di B oppure che B è conformabile a destra di A (non possiamo però dire viceversa a meno che la condizione non sia rispettata anche al contrario).
    a. Se A è conformabile a sinistra di B, il prodotto $A \times B$ è definito come:
        1. La matrice $C = [c_{ij'}] \in M_{m\times n'}(\mathbb{R})$ → C avrà il numero di colonne di B ed il numero di righe di A
        2. m = n. righe e n = n. colonne
    ii. Dove un coefficiente generico $[c_{ij'}] = \sum_{e=1}^{n} a_{ie} \times b_{ej'}$
        1. Es: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \;\; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \qquad [c_{21}] = a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21}$
            a. In A rimane fissa la riga, in B rimane fissa la colonna, quindi poi di conseguenza il contatore va messo sull'indice mancante
            b. Per formare la riga k di C, la riga k di A deve essere moltiplicata per tutte le colonne di B ed ogni coefficiente di quella riga di C sarà dato dalla somma di: ogni elemento della riga k di A moltiplicato per ogni elemento della colonna di B → elemento1xelemento1+elemento2xelemento2 ecc…

Esempio

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 2x2 $\qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 2x3

Calcoliamo $AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 2x3

$2\times 0 + 1\times 2$

$2\times(-2) + 1\times 1$

2. $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ è invertibile se $\exists B \in M_{m'\times n'}(\mathbb{R}) \;\; t.c. \;\; A \times B = B \times A = I_n$ (Matrice identità)
    a. Per effettuare sia $A \times B \; e \; B \times A$ le matrici devono essere necessariamente quadrate
    b. In tal caso B è detta l'inversa di A e si denota con A^{-1}
    c. NB: Tutte le matrici quadrate che hanno una riga o una colonna di zeri non sono invertibili →perché altrimenti una riga/colonna sarebbe di soli zeri e non si formerebbe la matrice identità dalla loro moltiplicazione

Una matrice diagonale → tutti gli elementi della diagonale non sono nulli, è sempre invertibile

Una matrice quadrata di ordine n ($M_{n\times n}$) invertibile se e solo se ha rango n, quando una matrice ha rango massimo essa non ha righe o colonne nulle perciò è sempre invertibile

3. Le matrici delle operazioni elementari si costruiscono effettuando l'operazione sulla matrice identità, la matrice ottenuta sarà la matrice dell'operazione elementare cercata.

4. Data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrice quadrata
    a. Sia $B = [A \mid I_n]$ la matrice trovata accostando la matrice A e la matrice identità di dimensione n anch'essa quadrata
    b. Troviamo B ridotta a scalini (non è $rref(B)$ questa è anche ridotta per righe)
    c. Verifichiamo che abbia rango massimo, se ce l'ha allora la matrice è invertibile
    d. Procediamo con la riduzione all'indietro, quando otterremo A uguale alla matrice identità allora l'inversa sarà data dalla matrice ottenuta che si troverà a destra di A (dove prima c'era I_n)

Riassunto:
- Sia $B = [A \mid I_n]$ la matrice trovata accostando la matrice A e la matrice identità
- A è invertibile ↔ $rref(B) = [I_n \mid P]$ dove $P = A^{-1}$

Se A è invertibile allora avrà un'unica soluzione

5. L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = 0$ è chiuso rispetto:
    a. Alla somma → $A(\underline{v} + \underline{w}) = A\underline{v} + A\underline{w} = 0$
    b. Al prodotto per uno scalare $A(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = \lambda A\underline{v} + \mu A\underline{w} = 0$

L'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo $A\underline{x} = b$ non è chiuso n'è rispetto alla somma e n'è rispetto al prodotto per uno scalare

6. Dato un sistema lineare non omogeneo $A\underline{x} = b$ $(b \neq 0)$ il sistema omogeneo ad esso associato è $A\underline{x} = 0$ $(A\underline{x} - b = 0)$
    a. Sia x_0 una soluzione del sistema lineare non omogeneo, allora l'insieme delle soluzioni sarà della forma $x_0 + v$ dove v è una soluzione del sistema omogeneo associato

Infatti $A(\underline{x}_0 + v) - b = 0 \rightarrow Ax_0 + Av - b = 0 \rightarrow b + 0 - b = 0 \rightarrow (Ax_0 + Av) = b$ e Ax_0 deve fare b perché x_0 è soluzione allora $Av = 0$ perciò v deve per forza essere soluzione del sistema omogeneo associato.

Domande Extra

7. <u>Che cosa indica la scrittura $M_{m \times n}(\mathbb{R})$?</u> → Indica l'insieme delle Matrici $m \times n$

8. <u>Che cos'è il nucleo di A?</u> → E' l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = 0$ e si indica con $N(A)$

9. <u>Che cos'è la nullità di A?</u> → E' il numero di colonne di $rref(A)$ non-pivot che rappresentano il numero di variabili libere e si indica con $null(A)$

Esercizi

Come trovare l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo:
1. Vedi screenshot fatti prima (le soluzioni vanno scritte in forma vettoriale)

Soluzioni $\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} x = -2w + 1 \\ y = -3z \end{cases}$

(ho scelto x, y in funzione di z, w)

le soluzioni sono della forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2w+1 \\ -3z \\ z \\ w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{x}_0} + \underbrace{z \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{soluzioni di } A\underline{x} = \underline{0}}$$

Le soluzioni del sistema sono dunque

$$\begin{cases} x = -z + w + 5 \\ y = z - 2w - 4 \end{cases}$$

Le soluzioni possono essere descritte nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} -z + w + 5 \\ z - 2w - 4 \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ -2w \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

nel quale sono evidenziate una soluzione particolare, $(5, -4, 0, 0)$, che si ottiene dando alle variabili libere il valore 0, e due soluzioni del sistema omogeneo associato, $(-1, 1, 1, 0)$ e $(1, -2, 0, 1)$.

Spazi Vettoriali

1. Un vettore geometrico è una classe di segmenti orientati, ovvero dati due punti A e B è il segmento che ha come estremo iniziale A e come estremo finale B. Esso si rappresenta con una freccia dritta che va da A a B

Siccome la matrice ha rango 1 per il teorema nullità più rango se l'Immagine ha dimensione 1 il nucleo ha dimensione 3 perché abbiamo 4 incognite

La funzione è Iniettiva se la matrice rappresentativa non ha variabili libere perché in quel caso la nullità di A sarebbe 0 e quindi lo sarebbe anche il Kernel di f e perciò conterrebbe solo il vettore nullo

2) Gli auto-vettori sono i vettori che compongono la base dello spazio delle soluzioni sostituendo le soluzioni del polinomio caratteristico nella matrice

L'auto-spazio è l'insieme degli auto-vettori

Autospazio si scrive come E(lambda) perché gli autovettori sono definiti rispetto ad un lambda specifico vedi 2), perché le soluzioni del polinomio caratteristico sono proprio gli autovalori