

1) **INIETTIVA**:

$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

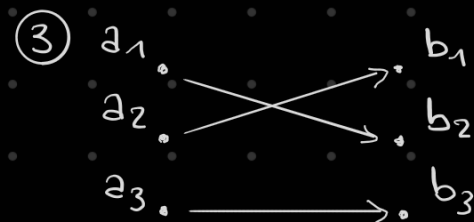
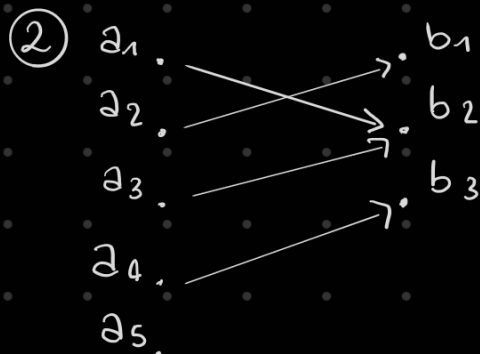
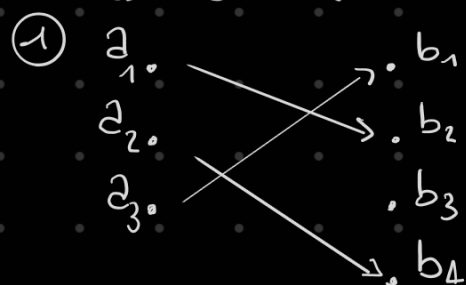
2) **SURIETTIVA**:

$$\text{Im } f = B \quad \text{ovvero}$$

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \mid f(a) = b$$

3) **BIETTIVA** (o BIUNIVOCA)

iniettiva e suriettiva insieme



ESERCITAZIONE 0

1) S_3 ha $3!$ elt:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

↘ identità ↗

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{cicliche}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se un numero va in se stesso non c'è bisogno di rappresentarlo: $(1, 2)$

tabella moltiplicativa:

\cdot	e	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(1, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$
e	e	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(1, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$
$(1, 2)$	$(1, 2)$	e	$(1, 2, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 2)$	$(1, 3, 2)$
$(2, 3)$	$(2, 3)$	$(1, 2, 3)$	e	$(1, 2, 3)$	$(2, 3)$	$(1, 2)$
$(1, 3)$	$(1, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 2, 3)$	e	$(1, 3)$	$(1, 3, 2)$
$(1, 2, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 3, 2)$	$(2, 3)$	e	e
$(1, 3, 2)$	$(1, 3, 2)$	$(2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 2, 3)$

dove zero essere giusto

parto sempre dallo stesso lato.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 \rightarrow 1 & \rightarrow 2 & \Rightarrow e \\ 3 & 3 & 3 \end{array}$$

S_3 è generato da elementi σ, τ tali che:

$$\sigma^2 = 1 \quad e \quad \tau^3 = 1 \quad e$$

$$\sigma\tau = \tau^2\sigma = \sigma\tau\tau = \sigma\tau^2\tau = \sigma\tau^2\tau^2 = \sigma\tau^4 = \sigma\tau\tau^3 = \sigma\tau$$

2) $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

3) $x y z = 1$, $y z x = 1$? $y x z = 1$?

$$\forall x, y, z \in G \text{ gruppo}$$

$$\begin{aligned}
 (xy)z = 1 &\Rightarrow (xy)zz^{-1} = 1z^{-1} \Rightarrow xy = z^{-1} \\
 &\Rightarrow xy y^{-1} = y^{-1}z^{-1} \Rightarrow x = y^{-1}z^{-1} \\
 &\Rightarrow xy z = y z y^{-1} z^{-1} \Rightarrow xyz = 1
 \end{aligned}$$

procedimento valido anche per l'altro caso.

- 4) $(G, \cdot), (G^0, \circ) \mid a \circ b = b \cdot a$. G^0 gruppo?
 dimostrare associatività, elt neutro e inverso.

esercizio dato da D'Alessandro:

dimostrare per induzione che

$$\sum_{i=0}^n 4i+1 = (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$\text{B.I.} \rightarrow n=0 \Rightarrow 1=1 \quad \checkmark$$

$$\text{P.I.} \rightarrow n=n+1$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} 4i+1 = \sum_{i=0}^n 4i+1 + 4(n+1)+1 =$$

$$\begin{aligned}
 &(n+1)(2n+1) + 4(n+1) + 1 = \\
 &2n^2 + n + 2n + 1 + 4n + 4 + 1 \\
 &2n^2 + 7n + 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (n+2)(2n+2+1) &= 2n^2 + 2n + n + 4n + 4 + 2 = \\
 &2n^2 + 7n + 6 \quad \square
 \end{aligned}$$

- 5) $a, b \in G$ gruppo. a ha ordine 5. $a^3 b = b a^3$
 $ab = ba$? \hookrightarrow ovvero $a^5 = e$
 $a^2 a^3 b = a^2 b a^3 \Rightarrow a^5 b = a^2 b a^3 \Rightarrow b = a^2 b a^3$
 $\Rightarrow a^5 = 1$ \hookrightarrow elt neutro moltiplicazione
 $\Rightarrow a = 1 \Rightarrow ab = ba$ per $b = b$

- 6) a) sì d) sì
 b) sì e) sì
 c) NO inv e neutro

es. siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $c|a, c|b$. verificare che:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \quad c|(a\alpha + b\beta).$$