ESERCITAZIONE 0

1) S_3 ha $3!$ elt:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

→ identità

cicliche

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se un numero va in se stesso non c'è bisogno di rappresentarlo: $(1,2)$

tabella moltiplicativa:

•	e	(1,2)	(2,3)	(1,3)	(1,2,3)	(1,3,2)
e	e	(1,2)	(2,3)	(1,3)	(1,2,3)	(1,3,2)
(1,2)	(1,2)	e	(1,2,3)	(1,2,3)	(1,2)	(1,3,2)
(2,3)	(2,3)	(1,2,3)	e	(1,2,3)	(2,3)	(1,2)
(1,3)	(1,3)	(1,2,3)	(1,2,3)	e	(1,3)	(1,3,2)
(1,2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,3,2)	(2,3)	e	e
(1,3,2)	(1,3,2)	(2,3)	(1,3,2)	(1,2)	(1,2,3)	(1,2,3)

dovrebbero essere giuste

parto sempre dallo stesso lato.

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow e$$

S_3 è generato da elementi σ, τ tali che:

$\sigma^2 = 1$ e $\tau^3 = 1$ e

$$\sigma\tau = \tau^2\sigma = \sigma\tau\tau = \sigma\tau^2\tau = \sigma\tau^2\tau^2 = \sigma\tau^4 = \sigma\tau\tau^3 = \sigma\tau$$

2)

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

3) $xyz = 1$. $yzx = 1$? $yxz = 1$?

$\forall\, x, y, z \in G$ gruppo

$(xy)z = 1 \Rightarrow (xy)zz^{-1} = 1z^{-1} \Rightarrow xy = z^{-1}$
$\Rightarrow xyy^{-1} = y^{-1}z^{-1} \Rightarrow x = y^{-1}z^{-1}$
$\Rightarrow xyz = yzy^{-1}z^{-1} \Rightarrow xyz = 1$
procedimento valido anche per l'altro caso.

4) $(G, \cdot)$, $(G^\circ, \circ) \mid a \circ b := b \cdot a$. G° gruppo?
dimostrare associatività, elt neutro e inverso.

esercizio dato da D'Alessandro:
dimostrare per induzione che
$$\sum_{i=0}^{n} 4i+1 = (n+1)\cdot(2n+1)$$

B.I. $\rightarrow n = 0 \Rightarrow 1 = 1$ ✓

P.I. $\rightarrow n = n+1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} 4i+1 = \sum_{i=0}^{n} 4i+1 + 4(n+1)+1 =$$
$$(n+1)(2n+1) + 4(n+1)+1 =$$
$$2n^2 + n + 2n + 1 + 4n + 4 + 1$$
$$2n^2 + 7n + 6$$
$$(n+2)(2n+2+1) = 2n^2 + 2n + n + 4n + 4 + 2 =$$
$$2n^2 + 7n + 6 \quad \square.$$

5) $a, b \in G$ gruppo. a ha ordine 5. $a^3 b = b a^3$.
$ab = ba$? $\hookrightarrow$ ovvero $a^5 = e$
$a^2 a^3 b = a^2 b a^3 \Rightarrow a^5 b = a^2 b a^3 \Rightarrow b = a^2 b a^3$
$\Rightarrow a^5 = 1$ elt neutro moltiplicazione
$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow ab = ba$ per $b = b$

6) a) SI
b) SI
c) NO inv e neutro
d) SI
e) SI