1) **INIETTIVA**:

$\forall\, a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

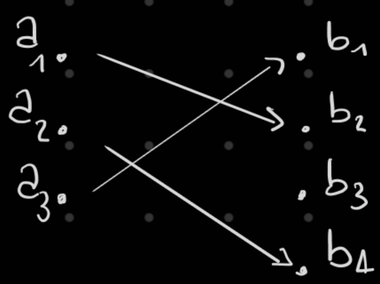
2) **SURIETTIVA**:

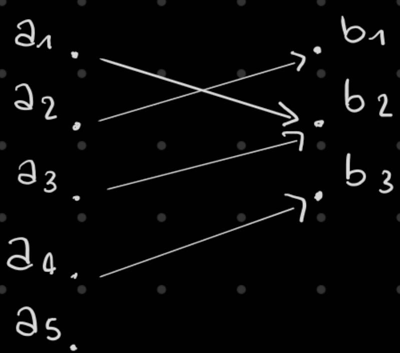
$\mathrm{Im}\, f = B$ ovvero

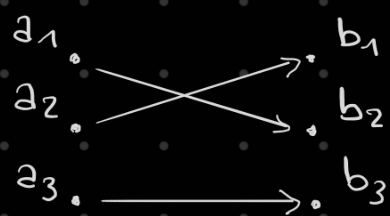
$\forall\, b \in B \ \exists\, a \in A \mid f(a) = b$

3) **BIIETTIVA** (o BIUNIVOCA)

iniettiva e suriettiva insieme

1



2



3


# ESERCITAZIONE 1

**1)** $S_3$ ha $3!$ elt:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

identità

cicliche

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se un numero va in se stesso non c'è bisogno di rappresentarlo: $(1,2)$

tabella moltiplicativa:

| • | e | (1,2) | (2,3) | (1,3) | (1,2,3) | (1,3,2) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| e | e | (1,2) | (2,3) | (1,3) | (1,2,3) | (1,3,2) |
| (1,2) | (1,2) | e | (1,2,3) | (1,2,3) | (1,2) | (1,3,2) |
| (2,3) | (2,3) | (1,2,3) | e | (1,2,3) | (2,3) | (1,2) |
| (1,3) | (1,3) | (1,2,3) | (1,2,3) | e | (1,3) | (1,3,2) |
| (1,2,3) | (1,2,3) | (1,3,2) | (1,3,2) | (2,3) | e | e |
| (1,3,2) | (1,3,2) | (2,3) | (1,3,2) | (1,2) | (1,2,3) | (1,2,3) |

dovrebbero essere giuste

parto sempre dallo stesso lato.

$$\begin{matrix} 1 & & 2 & & 1 \\ 2 & \to & 1 & \to & 2 \\ 3 & & 3 & & 3 \end{matrix} \Rightarrow e$$

$S_3$ è generato da elementi $\sigma, \tau$ tali che:

$\sigma^2 = 1$ e $\tau^3 = 1$ e

$\sigma\tau = \tau^2\sigma = \sigma\tau\tau = \sigma\tau^2\tau = \sigma\tau^2\tau^2 = \sigma\tau^4 = \sigma\tau\tau^3 = \sigma\tau$

**2)**

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

**3)** $xyz = 1$. $yzx = 1$? $yxz = 1$?

$\forall\, x, y, z \in G$ gruppo

$(xy)z = 1 \Rightarrow (xy)zz^{-1} = 1z^{-1} \Rightarrow xy = z^{-1}$

$\Rightarrow xyy^{-1} = y^{-1}z^{-1} \Rightarrow x = y^{-1}z^{-1}$

$\Rightarrow xyz = yzy^{-1}z^{-1} \Rightarrow xyz = 1$

procedimento valido anche per l'altro caso.

4) $(G, \cdot)$, $(G^\circ, \circ) \mid a \circ b := b \cdot a$. $G^\circ$ gruppo?

① $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

$\Rightarrow a \circ cb = ba \circ c \Rightarrow cba = cba$

② $e \circ a = ae = a \wedge a \circ e = ea = a$

③ $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ $\square$

5) $a, b \in G$ gruppo. $a$ ha ordine 5. $a^3 b = b a^3$. $ab = ba$?

$\hookrightarrow a^5 = 1$

$ab = 1ab \Rightarrow ab = a^5 ab \Rightarrow ab = a^6 b \Rightarrow ab = ba^6$

$\Rightarrow ab = ba^5 a \Rightarrow ab = ba$ $\square$

6) a) SI c) NO e) NO

b) SI d) SI

$\rightarrow GL_n(\mathbb{K})$ è gruppo lineare delle $M_{n\times n}$ nell'insieme $\mathbb{K}$ invertibili.

l'inverso di $A \cdot B$ è $B^{-1}A^{-1}$

l'inversa di una $M_{2\times 2}$ la trovo così

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile sse $ad - bc \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

esercizio:

dimostrare per induzione che
$$\sum_{i=0}^{n} 4i+1 = (n+1)\cdot(2n+1)$$

B.I. $\rightarrow$ $n=0 \Rightarrow 1=1$ ✓

P.I. $\rightarrow$ $n=n+1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} 4i+1 = \sum_{i=0}^{n} 4i+1 + 4(n+1)+1 =$$
$$(n+1)(2n+1) + 4(n+1)+1 =$$
$$2n^2+n+2n+1+4n+4+1$$
$$2n^2+7n+6$$
$$(n+2)(2n+2+1) = 2n^2+2n+n+4n+4+2 =$$
$$2n^2+7n+6 \quad \square.$$

es. siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $c|a$, $c|b$. verificare che:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ $c|(\alpha a + \beta b)$.

# ESERCITAZIONE 2

**10)** $(3522, 321)$ già fatto a lezione ✓

$(413, 173)$

$413 = 173 \cdot 2 + 67$

$173 = 67 \cdot 2 + 39$

$67 = 39 \cdot 1 + 28$

$39 = 28 \cdot 1 + 11$

$28 = 11 \cdot 2 + 6$

$11 = 6 \cdot 1 + 5$

$6 = 5 \cdot 1 + 1$

$5 = 1 \cdot 5 + 0 \qquad \Rightarrow MCD = 1$

bezout:

$$
\begin{aligned}
1 &= 6 - 5 \cdot 1 \\
&= 6 - (11 - 6 \cdot 1) = 6 \cdot 2 - 11 \\
&= (28 - 11 \cdot 2) \cdot 2 - 11 = 28 \cdot 2 - 11 \cdot 5 \\
&= 28 \cdot 2 - (39 - 28 \cdot 1) \cdot 5 = 28 \cdot 7 - 39 \cdot 5 \\
&= (67 - 39 \cdot 1) \cdot 7 - 39 \cdot 5 = 67 \cdot 7 - 39 \cdot 12 \\
&= 67 \cdot 7 - (173 - 67 \cdot 2) \cdot 12 = 67 \cdot 31 - 173 \cdot 12 \\
&= (413 - 173 \cdot 2) \cdot 31 - 173 \cdot 12 = 413 \cdot 31 - 173 \cdot 74 \\
&= 12803 - 12801 = 1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \alpha = 31, \quad \beta = -74$

**9)** $b := x^3 - 6x^2 + x + 4 \qquad a := x^5 - 6x + 1$

$\delta b(x) = 3$ e $\delta a(x) = 5 \Rightarrow \delta q(x) = 2$ e $\delta r(x) \leq 2$

$(x^5 - 6x + 1) = (x^3 - 6x^2 + x + 4)(ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + F)$

$\Rightarrow ax^5 + bx^4 + cx^3 - 6ax^4 - 6bx^3 + 6cx^2 + ax^3 + bx^2 + cx + 4ax^2 + 4bx + 4c$

$+ dx^2 + ex + F$

$\Rightarrow ax^5 + x^4(b - 6a) + x^3(c - 6b + a) + x^2(6c + b + 4a + d)$

$+ x(c + 4b + e) + (4c + F)$

$$
\begin{cases} a = 1 \\ b - 6a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}
$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c-6b+a=0 \\ 6c+b+4a+d=0 \\ c+4b+e=-6 \\ 4c+f=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=35 \\ d=-220 \\ e=-65 \\ f=-139 \end{cases}$$

$\Rightarrow q(x) = x^2+6x+35$ e $r(x) = -220x^2-65x-139$

2) dimostra per induzione che

$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$

caso base: $n=1 \Rightarrow 2-1=1=1^2$ ✓

passo induttivo: $n+1$

$\sum_{i=1}^{n+1} 2i-1 = (n+1)^2$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2i-1 + 2(n+1)-1 = (n+1)^2$

$n^2+2n+2-1 = n^2+2n+1 \Rightarrow n^2+2n+1 = n^2+2n+1$ ✓

3) dimostrare che $\forall n \geq 1 \quad 4 \mid 5^n-1$

caso base: $n=1 \Rightarrow 5-1=4$ divisibile per 4.

passo induttivo: $n+1$

$\Rightarrow 5^{n+1}-1$ servono i mod

4) dimostrare per induzione che

$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$

sapendo $F_1 = F_2 = 1$ e $f_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

caso base: $n=1 \Rightarrow F_1^2 = 1^2 = F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1$

passo induttivo: $n+1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} F_{n+1}^2 = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$

$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 + F_{n+1}^2 = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$

$F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$

$F_n \cdot F_{n+1} + (F_n + F_{n-1})^2 = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$

$F_n \cdot F_{n+1} + F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2 = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$

$\Rightarrow \underbrace{F_nF_{n+1}}_{F_{n+2}^2} + F_nF_{n+1} + 3F_nF_{n-1} = F_{n+1}F_{n+2}$

$2F_{n+2}^2 + 3F_{n-1}^2 = F_{n+1}^2$

da continuare

# ESERCITAZIONE 3

1) $(14743,\ 8915)$

$14743 = 8915 \cdot 1 + 5828$

$8915 = 5828 \cdot 1 + 3087$

$5828 = 3087 \cdot 1 + 2741$

$3087 = 2741 \cdot 1 + 346$

$2741 = 346 \cdot 7 + 319$

$346 = 319 \cdot 1 + 27$

$319 = 27 \cdot 11 + 22$

$27 = 22 \cdot 1 + 5$

$22 = 5 \cdot 4 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0 \qquad \Rightarrow MCD = 1$

bezout:

$1 = 5 - 2 \cdot 2$

$= 5 - (22 - 5 \cdot 4) \cdot 2 = 5 \cdot 9 - 22 \cdot 2$

$= -22 \cdot 2 + (27 - 22 \cdot 1) \cdot 9 = 27 \cdot 9 - 22 \cdot 11$

$= 27 \cdot 9 - (319 - 27 \cdot 11) \cdot 11 = 27 \cdot 130 - 319 \cdot 11$

$= (346 - 319 \cdot 1) \cdot 130 - 319 \cdot 11 = 346 \cdot 130 - 319 \cdot 141$

$= 346 \cdot 130 - (2741 - 346 \cdot 7) \cdot 141 = 346 \cdot 1117 - 2741 \cdot 141$

$= (3087 - 2741 \cdot 1) \cdot 1117 - 2741 \cdot 141 = 3087 \cdot 1117 - 1258 \cdot 2741$

$= 3087 \cdot 1117 - (5828 - 3087 \cdot 1) \cdot 1258 = 2375 \cdot 3087 - 5828 \cdot 1258$

$= (8915 - 5828 \cdot 1) \cdot 2375 - 5828 \cdot 1258 = 8915 \cdot 2375 - 3633 \cdot 5828$

$= 8915 \cdot 2375 - (14743 - 8915 \cdot 1) \cdot 3633 = 8915 \cdot 6008 - 14743 \cdot 3633$

$\alpha = -3633 \qquad \beta = 6008$

$(10000,\ 642)$

$10000 = 642 \cdot 15 + 370$

$642 = 370 \cdot 1 + 272$

$370 = 272 \cdot 1 + 98$

$272 = 98 \cdot 2 + 76$

$98 = 76 \cdot 1 + 22$

$76 = 22 \cdot 3 + 10$

$22 = 10 \cdot 2 + 2$

$10 = 2 \cdot 5 + 0 \qquad \Rightarrow MCD = 2$

bezout:

$2 = 22 - 10 \cdot 2$

$= 22 - (76 - 22 \cdot 3) \cdot 2 = 22 \cdot 7 - 76 \cdot 2$

$= (98 - 76 \cdot 1) \cdot 7 - 76 \cdot 2 = 98 \cdot 7 - 76 \cdot 9$

$= 98 \cdot 7 - (272 - 98 \cdot 2) \cdot 9 = 98 \cdot 25 - 272 \cdot 9$

$= (370 - 272 \cdot 1) \cdot 25 - 272 \cdot 9 = 370 \cdot 25 - 272 \cdot 34$

$= 370 \cdot 25 - (642 - 370 \cdot 1) \cdot 34 = 370 \cdot 59 - 642 \cdot 34$

$= (10000 - 642 \cdot 15) \cdot 59 - 642 \cdot 34 = 10000 \cdot 59 - 642 \cdot 919$

$\alpha = 59 \qquad \beta = -919$

$(5785, 546)$

$5785 = 546 \cdot 10 + 325$

$546 = 325 \cdot 1 + 221$

$325 = 221 \cdot 1 + 104$

$221 = 104 \cdot 2 + 13$

$104 = 13 \cdot 8 + 0 \qquad \Rightarrow MCD = 13$

bezout:

$13 = 221 - 104 \cdot 2$

$= 221 - (325 - 221 \cdot 1) \cdot 2 = 221 \cdot 3 - 325 \cdot 2$

$= (546 - 325 \cdot 1) \cdot 3 - 325 \cdot 2 = 546 \cdot 3 - 325 \cdot 5$

$= 546 \cdot 3 - (5785 - 546 \cdot 10) \cdot 5 = 546 \cdot 53 - 5785 \cdot 5$

$\alpha = -5 \qquad \beta = 53$