Presentazione ProgettoPCS2025

Bazzanella Alice,
Scaglione Francesca,
Tomatis Elisa.

Punti principali

Nel nostro progetto abbiamo:

- definito i **solidi geodetici di classe I**;
- scritto su files i risultati ottenuti;
- calcolato il **cammino minimo**;
- costruito i **solidi geodetici di classe II**;
- verificato, per ogni unità logica, il corretto funzionamento utilizzando i GoogleTest.

Struttura del codice

Cartelle e files creati

Per lavorare al progetto abbiamo suddiviso i files creati all'interno di cartelle:

- **src**: contiene i files con le dichiarazioni di funzioni per la creazione, triangolazione, ottimizzazione ed analisi dei poliedri;
- **src_test**: contiene il file **Test.hpp** dove all'interno sono implementati i google test richiesti;
- **export_paraview**: contiene il file **Export_Paraview.cpp** per l'esportazione su Paraview.

Definizione dei poliedri

Solidi Geodetici di classe I

Un poliedro geodetico è un poliedro convesso definito da facce triangolari che possiamo rappresentare tramite il **simbolo di Schlaffi** $\{3, q+\}_{b,c}$.

- **p** rappresenta il numero di vertici del poligono che si osserva guardando ciascuna faccia;
- **q** rappresenta il numero di vertici del poligono che si osserva guardando ciascun vertice ovvero la valenza;
- **b, c** sono parametri utilizzati per la triangolazione delle facce.

Definizione dei poliedri

Solidi Geodetici di classe I

Per lavorare con i poliedri abbiamo usato la **libreria PolyhedralLibrary** definita in **Utils.hpp**.

Nel file **Polyhedra.cpp** abbiamo costruito i poliedri, ciascuno è caratterizzato da:

- **Cell0DsCoordinates**: matrice 3xn di coordinate dei vertici normalizzate;
- **Cell1DsExtrema**: matrice nx2 contenente gli estremi dei lati;
- **Cell2DsVertices**: vettore di liste con gli id dei vertici delle facce;
- **Cell2DsEdges**: vettore di liste con gli id dei lati di ciascuna faccia;
- **Cell3DsVertices**, **Cell3DsEdges**, **Cell3DsFaces** per il volume finale.

Inizializzazione della mesh triangolata

Solidi Geodetici di classe I

All'interno del file **Dimension.cpp** ci sono le funzioni per gestire la mesh sia prima che dopo la triangolazione:

- **ComputePolyhedronVEF(q,b,c)**: calcola il numero atteso di vertici, spigoli e facce tramite le formule date. Ci permette di inizializzare correttamente la mesh triangolata;
- **CalculateDuplicated(q,b,c,dimension)**: stima il numero di vertici e spigoli duplicati generati durante la triangolazione.

```
vector<int> ComputePolyhedronVEF(int q,
     int b, int c)
{
    vector<int> result(3); //
        inizializza un vettore con 3
        valori, tutti -1

    int T = 0;
    T = b * b + b * c + c * c;
    int V = 0;
    int E = 0;
    int F = 0;

    if (q == 3) {
        V = 2 * T + 2;
        E = 6 * T;
        F = 4 * T;
    }
    else if (q == 4) {
        V = 4 * T + 2;
        E = 12 * T;
        F = 8 * T;
    }
    else {
        V = 10 * T + 2;
        E = 30 * T;
        F = 20 * T;
    }
    result[0] = V;  // Primo elemento:
        V (vertici)
    result[1] = E;  // Secondo elemento
        : E (spigoli)
    result[2] = F;  // Terzo elemento:
        F (facce)

    return result;}
```

Triangolazione

Solidi Geodetici di classe I

Nel caso $b = 0,\ c \geq 1$ oppure $b \geq 1,\ c = 0$ abbiamo scritto il file **Triangulation1.cpp** in cui l'obiettivo é suddividere le facce della mesh in triangoli secondo il livello **subdivisionLevel** $= b + c$.

Il file contiene le funzioni:

- **FindAddEdge**: verifica se un edge è già stato inserito altrimenti lo aggiunge;
- **triangulateAndStore**: alloca spazio per le strutture e calcola tramite interpolazione i nuovi vertici;
- **PopulateCell3D**: raggruppa le celle 0D, 1D, 2D per la cella 3D. Aggiunge dei flag per distinguere gli elementi interni ed esterni.

Alla fine si ottiene una nuova mesh chiamata **meshTriangulated**.

```
void FindAddEdge(
    int a, int b,
    PolyhedralMesh& meshTriangulated,
    unsigned int& k2,
    unsigned int k3)
{
    bool found = false;

    for (unsigned int i = 0; i <= k2;
        ++i) {
        if ((meshTriangulated.
            Cell1DsExtrema(i, 0) == a
            &&
             meshTriangulated.
                 Cell1DsExtrema(i, 1)
                 == b) ||
            (meshTriangulated.Cell1DsExtrema(i,
                0) == b &&
                 meshTriangulated.
                     Cell1DsExtrema(i, 1)
                     == a)) {

            // Edge già presente
            meshTriangulated.
                Cell2DsEdges[k3].
                push_back(i);
            found = true;
            break;}
    }
}
```

Gestione della mesh triangolata

Solidi Geodetici di classe I

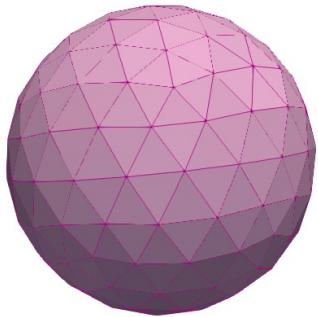
Una volta creata la mesh triangolata bisogna rimuovere i duplicati formati per questo sempre all'interno del file **Dimension.cpp** ci sono le funzioni:

- **RemoveDuplicatedVertices**: trova tutti i vertici duplicati e aggiorna la mesh con i vertici unificati. Ai vertici master assegna maxFlag;
- **RemoveDuplicatedEdges**: con la stessa logica della funzione precedente vengono rimossi gli spigoli duplicati e si aggiornano gli id dei lati.
- **NewMesh**: permette di creare una nuova mesh contenente solo gli elementi validi, gli id sono riassegnati consecutivamente a partire da 0.

```
if ((meshTriangulated.
    Cell0DsCoordinates.col(i) -
     meshTriangulated.
         Cell0DsCoordinates.col(j)).
         norm() < tol) {
    // Trovato un duplicato:
        reindirizzamento tramite Union-
        Find
    unsigned int root_i = i;
    while (id_remap[root_i] != root_i)
        root_i = id_remap[root_i];
```

```
unsigned int root_j = j;
    while (id_remap[root_j] != root_j)
        root_j = id_remap[root_j];
if (root_i != root_j)
        id_remap[root_i] = root_j;

    id_remap[i] = root_j;
    meshTriangulated.Cell0DsCoordinates
        .col(i) =
        meshTriangulated.
            Cell0DsCoordinates.col(j);
```

Triangolazione



(p q b c) = (3 5 4 0)

Scrittura su files

Solidi Geodetici di classe I

All'interno del main.cpp prendiamo in input una quadrupla di numeri interi $\{p, q, b, 0\}$ oppure $\{p, q, 0, b\}$. Nel caso in cui $p = 3$ viene restituito il poliedro geodetico di classe I corrispondente con 4 file .txt:

- **Cell0Ds.txt**: contiene l'id di ogni vertice e le sue coordinate nello spazio;
- **Cell1Ds.txt**: contiene l'id di ogni lato e il vertice di inizio e di fine;
- **Cell2Ds.txt**: contiene gli id di ogni faccia, il numero di vertici e i loro id, i numeri di lati e i loro id;
- **Cell3Ds.txt**: generando un poliedro alla volta contiene il suo id, i vertici, i lati e le facce.

Duale

Poliedri di Goldberg

A partire da un solido geodetico di classe I, scambiando il ruolo di vertici e facce, è possibile ottenere il suo duale detto **Poliedro di Goldberg generalizzato** indicato con $\{q+, p\}_{b,c}$.

Per farlo a partire dalla **meshTriangulated** abbiamo scritto il file **Dual.cpp**.

- **Creazione dei vertici**: vengono calcolati i baricentri delle facce del poliedro orginale in quanto vertici del poliedro duale. L'id del vertice è lo stesso della faccia da cui proviene;
- **creazione degli spigoli**: viene creata una mappa che per ogni spigolo originale elenca le facce che lo condividono. Si uniscono i baricentri delle facce condivise;

```
// Mappa Vertice Originale -> Facce che lo Contengono
map<unsigned int, vector<unsigned int>> buildVertexToFacesMap(const PolyhedralMesh& meshTriangulated) {
    map<unsigned int, vector<unsigned int>> vertexToFaces;
    for (unsigned int faceId = 0; faceId < meshTriangulated.Cell2DsId.size(); ++faceId) {
        for (unsigned int vertexOriginalId : meshTriangulated.Cell2DsVertices[faceId]) {
            vertexToFaces[vertexOriginalId].push_back(faceId);
        }
    }
    return vertexToFaces;
}
```

Duale

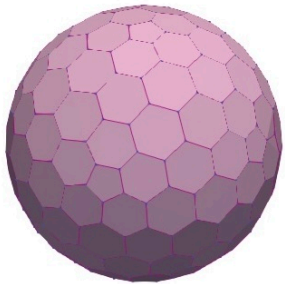
Poliedri di Goldberg

- **creazione delle facce**: per ogni vertice originale si trovano le facce incidenti. I baricentri di queste facce generano una faccia del duale. I baricentri vengono raccolti visitando le facce attorno ad un vertice originale.
- vengono gestiti **errori topologici**;
- tutti i vertici vengono proiettati su una **sfera unitaria**.

Alla fine si ottiene una nuova mesh chiamata **meshDual**.

```
void ProjectMeshToUnitSphere(
    PolyhedralMesh& meshTriangulated) {
    for (int i = 0; i <
        meshTriangulated.
        Cell0DsCoordinates.cols(); ++i)
         {
        Vector3d vertexCoords =
            meshTriangulated.
            Cell0DsCoordinates.col(i);
        double norm = vertexCoords.norm
            (); // Equivalente a std::
            sqrt(vertexCoords.
            squaredNorm());
if (norm < 1e-12) {
            cerr << "Warning: Vertice "
                 << i << " troppo
                vicino all'origine. Non
                 proiettato." << endl;
            continue; // Salta la
                proiezione per questo
                vertice
        }
        meshTriangulated.
            Cell0DsCoordinates.col(i) =
             vertexCoords / norm;}
}
```

Duale



(p q b c) = (5 3 4 0)

Cammino minimo

Prendendo in input una 6-tupla di numeri interi $(p, q, b, c, id\_vertice\_1, id\_vertice\_2)$ abbiamo trovato un cammino minimo che unisce i vertici contrassegnati da $id\_vertice\_1$ e $id\_vertice\_2$. Per farlo abbiamo scritto il file **CamminoMinimo.cpp**:

- la funzione **calculateDistanceById** calcola la distanza euclidea fra due vertici della mesh dato il loro ID;
- nella struttura **ShortestPathResult** viene salvato il numero di lati del cammino e la lunghezza totale del cammino;
- la funzione **calculateAdjacencyMatrix** crea la matrice di adiacenza dei vertici della mesh;

```cpp
double calculateDistanceById(const
    PolyhedralMesh& mesh, unsigned int
    id1, unsigned int id2) {

    VectorXd p1 = mesh.
        Cell0DsCoordinates.col(id1);
    VectorXd p2 = mesh.
        Cell0DsCoordinates.col(id2);

    return (p1 - p2).norm(); // Calcola
         la norma (distanza euclidea)
}
```

```cpp
// Funzione per calcolare la matrice di
     adiacenza
 for (unsigned int i = 0; i < mesh.
     Cell1DsId.size(); ++i) {
    unsigned int v1 = mesh.
        Cell1DsExtrema(i, 0);
    unsigned int v2 = mesh.
        Cell2DsExtrema(i, 1);

    adjMatrix(v1, v2) = 1;
    adjMatrix(v2, v1) = 1;
}
```

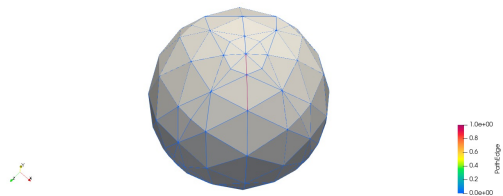
- La funzione **findShortestPathDijkstra** implementa l'algoritmo per trovare il cammino più breve fra due vertici. Vengono visitati i vertici vicini ed aggiornate le distanze ed i predecessori quando viene trovato un cammino più corto.

```
// Variabili Dijkstra
vector<double> dist(numVertices,
    numeric_limits<double>::infinity())

vector<unsigned int> predVertex(
    numVertices, -1)

vector<unsigned int> predEdge(
    numVertices, -1)

vector<bool> visited(numVertices,false)

using QueueElem = pair<double, unsigned
     int>;
    priority_queue<QueueElem, vector<
        QueueElem>, greater<>> pq;
```

Cammino minimo

```
appuser@THIS_IS_PCS_DOCKER:~/Data/ProgettoPCS2025/Debug$ ./polyhedra 3 4 3 3 10 18
Modalità: Generazione mesh e calcolo cammino minimo.
Hai inserito: p=3, q=4, b=3, c=3
Cammino minimo da vertice ID: 10 a vertice ID: 18

--- Cammino Minimo ---
Numero di lati nel cammino: 2
Lunghezza totale del cammino: 0.544331
```

Output del cammino minimo



Cammino minimo su paraview

3 4 3 3 da 10 a 18

Triangolazione

Solidi Geodetici di classe II

Per la seconda parte del progetto abbiamo costruito i **solidi geodetici di classe II** per b = c.
Per la nuova triangolazione abbiamo scritto il file **Triangulation2.cpp** in cui:

- la funzione **get_cyclic_normalized** data una sequenza di id degli spigoli la normalizza per farla iniziare dal valore minimo in modo da poter confrontare due facce;
- la funzione **NormalizeFaceEdges** confronta una sequenza con la sua inversa e restituisce quella lessicograficamente minima;
- la funzione **FindNearBarycenter** trova il baricentro di una faccia adiacente ad un dato spigolo usando la mappa **edgeToFacesMap**;

Triangolazione

Solidi Geodetici di classe II

La funzione principale per la triangolazione è **triangulateAndStore2**:

- viene inizializzata la mesh triangolata;
- se uno spigolo è di bordo vengono creati 2 sottotriangoli usando il baricentro e il punto medio dello spigolo;
- se lo spigolo è interno si costruiscono 2 triangoli usando il baricentro della faccia corrente, il baricentro della faccia adiacente e i vertici dello spigolo.

Le facce, gli spigoli e i vertici vengono aggiunti solo se non ancora presenti usando le funzioni **FindAddFace**, **FindAddVertice**, **FindAddEdge2**. La gestione della mesh triangolata viene fatta come nel primo caso.

```
void FindAddFace(const vector<unsigned
    int>& new_face_vertices,
const vector<unsigned int>&
    new_face_edges, PolyhedralMesh&
    meshTriangulated, unsigned int& k3)
    {
vector<unsigned int>
    normalized_new_edges =
    NormalizeFaceEdges(new_face_edges);

bool found = false;
for (unsigned int i = 0; i <
    meshTriangulated.Cell2DsId.size();
    ++i) { vector<unsigned int>
    normalized_existing_edges =
    NormalizeFaceEdges(meshTriangulated
    .Cell2DsEdges[i]);
}
    if (normalized_new_edges ==
        normalized_existing_edges) {
            found = true;
            break;}
}
if (!found){
meshTriangulated.Cell2DsVertices[k3] =
    new_face_vertices;
meshTriangulated.Cell2DsEdges[k3] =
    new_face_edges;
meshTriangulated.Cell2DsId[k3] = k3;
k3++;
}
}
```

Google Test

Nel file **test.hpp** abbiamo verificato il corretto funzionamento di ogni unità logica usando i Google Test all'interno del namespace **PolyhedraTest**:

- **TestTriangulationTetrahedron**: verifica la correttezza della funzione di triangolazione del tetraedo;
- **TestOrderedEdges**: controlla il corretto ordinamento degli spigoli nelle facce;
- **DualTest**: verifica la corretta costruzione del poliedro duale;
- **ShortestPath**: verifica la correttezza del cammino minimo su un tetraedo triangolato.

```
\\ TestNotNullArea
for (size_t i = 0; i < meshTriangulated
    .Cell2DsVertices.size(); ++i) {
const auto& tri = meshTriangulated.
    Cell2DsVertices[i];
ASSERT_EQ(tri.size(), 3);

Vector3d A = meshTriangulated.
    Cell0DsCoordinates.col(tri[0]);
Vector3d B = meshTriangulated.
    Cell0DsCoordinates.col(tri[1]);
Vector3d C = meshTriangulated.
    Cell0DsCoordinates.col(tri[2]);

double area = 0.5 * ((B - A).cross(C -
    A)).norm();
EXPECT_GT(area, eps) << "Triangolo con
    area nulla" << i;
}
```

```
\\ TestNotNullEdges
double eps = numeric_limits<double>::
    epsilon();
for (unsigned int i = 0; i <
    meshTriangulated.Cell1DsExtrema.
    rows(); ++i) {
int vStart = meshTriangulated.
    Cell1DsExtrema(i, 0);
int vEnd = meshTriangulated.
    Cell1DsExtrema(i, 1);
Vector3d startPoint = meshTriangulated.
    Cell0DsCoordinates.col(vStart);
Vector3d endPoint = meshTriangulated.
    Cell0DsCoordinates.col(vEnd);
double length = (endPoint - startPoint)
    .norm();

EXPECT_GT(length, eps)
}
```

ProgettoPCS2025