Année 2010

Exercices de mathématiques

Énoncés : V. Gritsenko
Corrections : J.-F. Barraud

Anneaux et idéaux

Exercice 1. Donner la définition d'un corps. Les opérations binaires $+$ et $\cdot$, sont-elles équivalentes dans la définition ?

Exercice 2. Trouver toutes les solutions des équations :

1. $ax + b = c \;\; (a, b, c \in K,\ K$ est un corps) ;
2. $2x \equiv 3 \mod 10$ et $2x \equiv 6 \mod 10$ dans l'anneau $\mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soit A un anneau. Démontrer que :

1. $\forall a \in A \;\; 0_A \cdot a = 0_A$;
2. $(-1_A) \cdot a = -a$;
3. $|A| \geq 2 \iff 1_A \neq 0_A$ dans A.

Exercice 4.

1. Si $x \cdot y$ est inversible dans un anneau A, alors x et y sont inversibles.
2. Dans un anneau, un élément inversible n'est pas diviseur de zéro et un diviseur de zéro n'est pas inversible.

1. Si $xy \in A^\times$, soit $z \in A, (xy)z = 1$. Alors $x(yz) = 1$ et $(zx)y = 1$ donc x et y sont inversibles.
2. Soit $x \in A^\times$, et $y \in A, xy = 0$. Alors $x^{-1}xy = y = 0$. Donc x n'est pas diviseur de 0.

Exercice 5. Démontrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 6. Lesquels de ces sous-ensembles donnés de $\mathbb{C}$ sont des anneaux ? Lesquels sont des corps ?

1. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} 10^{-n}\mathbb{Z}$;
2. $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1, p \nmid n\}$ (p est un nombre premier fixé) ;
3. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}, \quad \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$;
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{-1}, \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$.

Exercice 7. Les éléments inversibles d'un anneau A forment le groupe multiplicatif $(A^\times, \cdot)$.

1. Trouver $A^\times$ pour les anneaux 1. et 2. de l'exercice 6.
2. Trouver le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$ en utilisant la norme complexe.
3. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ est infini.

Exercice 8. Un élément a d'un anneau A s'appelle nilpotent, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$. Trouver tous les éléments inversibles, les diviseurs de zéro, les nilpotents des anneaux suivants :

1. $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$;
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
3. Démontrer que, pour tout nilpotent x de A, l'élément $1+x$ est inversible.

Exercice 9. Soit I un idéal d'un anneau A. On note par $(a) = a \cdot A$ l'idéal principal engendré par a. Montrer que :

1. $I = A$ si et seulement si I contient une unité ;
2. $(a) = A$ ssi a est inversible ;
3. Un anneau A est un corps ssi (0) est le seul idéal propre de A.

Exercice 10. Montrer que les éléments nilpotents d'un anneau forment un idéal.

Exercice 11 (Sommes et produits d'idéaux)**.**

1. Soient I, J deux idéaux d'un anneau A. Montrer que
$$I \cap J, \qquad I + J = \{x + y \,|\, x \in I, y \in J\}$$
sont des idéaux de A.
2. Montrer que $I + J$ est le plus petit idéal de A contenant I et J.
3. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$, $I = (n) = n\mathbb{Z}$, $J = (m) = m\mathbb{Z}$. Trouver $I \cap J$ et $I + J$.
4. Montrer que
$$I \cdot J = \{x_1y_1 + x_2y_2 + \dots x_ny_n \,|\, n \in \mathbb{N},\ x_k \in I,\ y_k \in J \text{ pour } \ 1 \le k \le n\}$$
est un idéal. Il s'appelle *produit des idéaux* I et J.
5. On considère les idéaux $I = (x_1, \dots x_n) = Ax_1 + \dots + Ax_n$ et $J = (y_1, \dots y_m) = Ay_1 + \dots + Ay_m$. Décrire les idéaux $I + J$, $I \cdot J$, I^2 en fonction de x_k, y_l.

Exercice 12 (Idéaux étrangers)**.**

1. Montrer que $I \cdot J \subset I \cap J$ et $(I + J) \cdot (I \cap J) \subset I \cdot J$
2. On dit que deux idéaux I et J de A sont *étrangers* si $I + J = A$. Montrer que $I \cap J = I \cdot J$ si I, J sont étrangers.

Indications 5. Voir la solution de l'exercice **??**, deuxième question.

Correction 1. Cours... Non, les rôles des deux opérations ne sont pas interchangeables, puisque l'une est distributive sur l'autre.

Correction 2.

1. une seule solution $x = a^{-1}(c - b)$
2. pas de solution, et deux solutions. Attention, dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, on ne peut pas inverser 2. Ecrire $2x = 3+10k$ pour obtenir que $2|3$, et $2x = 6+10k$ pour simplifier par 2... dans $\mathbb{R}$.

Correction 3.

1. Ecrire $(0 + a)a = a.a$ d'une part (0 est neutre pour $+$) et $(0 + a).a = 0.a + a.a$ (distributivité).
2. $(-1).a + a = (-1 + 1).a = 0.a = 0$ (distributivité, puis question précédente)
3. Si $|A| = 1$, $1 = 0$. Si $1 = 0$, $\forall a \in A, a = 1.a = 0.a = 0$, donc $A = \{0\}$.

Correction 5. Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Soit $\phi_a : A \to A, x \mapsto ax$. Si $\phi_a(x) = \phi_a(y)$, alors $ax = ay$, donc $a^{-1}ax = a^{-1}ay$ et $x = y$. ϕ_a est donc injective de A dans A. Comme A est fini, elle est donc aussi surjective : $\exists x \in A, \phi_a(x) = 1$.

Correction 6. Ce sont tous des anneaux. Montrer que A est stable par addition, par passage à l'opposé, contient 0, est stable par multiplication et contient 1. Le reste (associativité et distributivité) est automatique puisqu'il s'agit des restrictions des opérations usuelles sur $\mathbb{C}$)

1. A est l'ensemble des nombres dont le développement décimal s'arrête ("nombre fini de chiffres après la virgule").

   Stabilité par addition : Soit $x = 10^{-n}a$ et $y = 10^{-m}b$. Supposons par exemple que $n \geq m$. Alors $x + y = 10^{-n}(a + 10^{n-m}b)$ et $a + 10^{n-m}b \in \mathbb{Z}$ donc $x + y \in A$. Les autres vérifications sont analogues.

   Ce n'est pas un corps : 3 n'est pas inversible, puisque si $3 \cdot 10^{-n}a = 1$, alors $3a = 10^n$ donc $3|10^n$ ce qui est impossible. Un élément est inversible ssi il est de la forme $10^{-n}2^\alpha 5^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.
2. Stabilité par addition : Soit $x = \frac{a}{b} \in A$ et $y = \frac{c}{d} \in A$, avec $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(c, d) = \mathrm{pgcd}(p, b) = \mathrm{pgcd}(p, d) = 1$. Alors $x + y = \frac{ad+bc}{bd}$.

   Ce n'est pas un corps : p n'est pas inversible. Un élément est inversible ssi ce n'est pas un multiple de p.
3. N'est pas un corps : 2 n'est pas inversible. Les seuls éléments inversibles sont $1, -1, i, -i$. En effet, si $z \in A^\times$, alors $|z| \geq 1$ et $|z^{-1}| \geq 1$. Donc $|z| = 1$ et $z \in \{\pm 1, \pm i\}$. Réciproquement, ces éléments sont bien tous inversibles.