Студент: Егор Елисеев
Группа: M4141
Дата: 31 марта 2021 г.

---

1. (a) $\{\omega \in \{a,b\}^* | |\omega|_a \geq |\omega|_b\}$
   Пусть L - регулярный, тогда выполняется лемма о накачке. Возьмем n из леммы и рассмотрим следующее слово: $\omega = b^n a^{2n}$. Тогда
   $x = b^l,\ 0 \leq l < n,$
   $y = b^m,\ 0 < m \leq n,$
   $z = b^{n-m-l}a^{2n}.$
   Рассмотрим xy^kz при $k > \frac{2n-l}{m}, k = \lceil \frac{2n-l}{m} \rceil + 1$, тогда
   $xy^kz = b^l b^{(\frac{2n-l}{m}+1)\cdot m} b^{n-m-l} a^{2n} = b^{3n-l}a^{2n}$. Так как $l < n$, то букв b больше в слове, чем букв a.

   (b) $\{\omega \in \{a,b\}^* | |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$
   Пусть L - регулярный, тогда выполняется лемма о накачке. Возьмем n из леммы и рассмотрим следующее слово: $\omega = a^n b^{2n}$. Тогда
   $x = a^l,\ 0 \leq l < n,$
   $y = a^m,\ 0 < m \leq n,$
   $z = a^{n-m-l}b^{2n}.$
   Рассмотрим xy^kz при $k = \frac{n+m}{m}$, тогда
   $xy^kz = a^l a^{\frac{n+m}{m}\cdot m} a^{n-m-l} b^{2n} = b^{2n}a^{2n}$. Получим, что количество букв a и b совпадает.

   (c) $\{\alpha\ a\ \beta | \alpha, \beta \in \{a,b\}^*, |\alpha|_b > |\beta|_a\}$
   Пусть L - регулярный, тогда выполняется лемма о накачке. Возьмем n из леммы и рассмотрим следующее слово: $\omega = b^{n+1}ab^na^n$. Тогда
   $x = b^l,\ 0 \leq l < n,$
   $y = b^m,\ 0 < m \leq n,$
   $z = b^{n-m-l}ab^na^n.$
   Рассмотрим xy^kz при $k = 0$, тогда
   $xy^kz = xz = b^l b^{n-m-l} ab^na^n = b^{n-m}ab^na^n$, при любом значении m получим, что $|\alpha|_b \leq |\beta|_a$.

   (d) $\{\omega a^m | 1 \leq |\omega|_b \leq m\}$
   Пусть L - регулярный, тогда выполняется лемма о накачке. Возьмем n из леммы и рассмотрим следующее слово: $\omega = b^{n+1}a^{n+1}$. Тогда
   $x = b^l,\ 0 \leq l < n,$
   $y = b^p,\ 0 < p \leq n,$
   $z = b^{n+1-p-l}a^{n+1}.$
   Рассмотрим xy^kz при $k = 2$, тогда
   $xy^kz = b^l b^{2p} b^{n+1-l-p} a^{n+1} = b^{n+1+p}a^{n+1}$, при любом значении p получим, что $|\omega|_b > m$.

2. (a)