Лабораторная работа 3.7.3
Длинные линии
Выполнил Жданов Елисей Б01-205

1 Цель работы:

Ознакомится и проверить на практике теорию распространения электрических сигналов вдоль длинной линии; измерить амплитудо- и фазово-частотные характеристики коаксиальной линии; определить погонные характеристики такой линии; на примере модели длинной линии изучить вопрос распределения амплитуды колебаний сигнала по длине линии.

2 Оборудование:

Осциллограф АКТАКОМ ADS-6142H; генератора АКИП 3420/1; бухта с коаксиальным кабелем pk 50-4-11; схематический блок "модель длинной линии"; магазин сопротивления Р33, соединительные провода

3 Теоретическая справка

Рассмотрим элемент dx длинного коаксиального кабеля. Этот элемент представляет собой изолированный коаксиальный проводящий (медный) цилиндр некоторого радиуса r_2, на оси которого расположен сплошной тонкий проводник (медный) круглого сечения с радиусом r_1. Пространство между этнми проводниками заполнена средой, обладающей диэлектрнческой проницаемостью ε и магнитной воспринмчнвостью μ. Как нзвестно, такой элемент обладает ннduктнвностью

$$dL = 2\mu \ln\left(r_2/r_1\right) dx.$$

Удельная (погонная) индуктнвность еднницы длнны такого кабеля:

$$L_x = \frac{dL}{dx} = 2\mu \ln\left(r_2/r_1\right).$$

Два проводника, образуюшнх этот элемент dx коакснального кабеля, должны обладать взанмной ёмкостью. Можно показать, что ёмкость элемента dx коаксиального кабеля опредеяется выражением:

$$dC = \frac{\varepsilon}{2\ln(r_2/r_1)}dx,$$

а его удельная (погонная) ёмкость единицы длнны равна:

$$C_x = \frac{dC}{dx} = \frac{\varepsilon}{2\ln(r_2/r_1)}.$$

Когда по такому кабелю передаётся сигнал, в его центральной жнле и внешней оболочке возникают взаимно противоположные токи $I(x)$, а также электрическое напряженне $U(x)$ между внешним и внутренним проводннкамн. При высоких тастотах v сигналов, распространяющихся в кабеле (когда днннa кабеля $l > V/\nu$, где V - характерная скорость распространения сигнала в кабеле, эта скорость, как правило, порядка скорости света) $I(x)$ и $U(x)$ вообще говоря зависят от коордннаты x.

Изменение напряжения на концах элемента dx вызваны возникновением ЭДС индукцин и паденнем напряжения в результате омнческого сопротивления проводников:

$$U(x+dx) - U(x) = -\frac{L_x dx}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t} - R_x dx I,$$

где погонное сопротивленне

$$R_x = \frac{dR}{dx} = \frac{1}{\sigma \cdot S}$$

здесь σ - удельная проводнмость материала проводников, S - площадь их поперечного сечения.

Измененне силы тока вызвано тем, что некоторая часть электрического заряда q как бы "перетекает на "обкладкн"конденсатора, роль которьх играют проводннки коакснального кабеля:

$$I(x+dx) - I(x) = -\frac{\partial q}{\partial t},$$

где $q = C_x dx U$ Представим уравнения (5) и (7) в внде системы, опнсывающей распространение сигнала вдоль длинной лннни:

$$\begin{cases} U(x) = U(x+dx) + \frac{L_x dx}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t} + R_x dx I, \\ I(x) = I(x+dx) + \frac{\partial q}{\partial t}. \end{cases}$$

Эту систему уравнений называют телеграфными уравнениями. Разделим оба уравнения на длнну элемента dx и, воспользовавшнсь определеннем дифференциалов, перепишем (8) следующим образом

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} = -C_x \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{L_x}{c^2}\frac{\partial I}{\partial t} - R_x I \end{cases}$$

Из (9) выразим перекрёстные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = -C_x \frac{\partial^2 U}{\partial^2 t}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{L_x}{c^2} \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} - R_x \frac{\partial I}{\partial x} \end{cases}.$$

Из (9) и (10) получаем волновое уравнение для напряжения $U(x)$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{L_x C_x}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + R_x C_x \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Илн в каноническом виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - V_\phi^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

где введены следующие обозначения для фазовой скорости:

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{L_x C_x}},$$

и декремента затухания: $\gamma = R_x C_x V_\phi^2$. (14)

Подставляя (2) и (4) в выражение для фазовой скорости (13), легко видеть, что, эта скорость нмеет тот же вид, как и скорость распространения обычнвх электромагнитных волн в некоторой среде с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной воспрнимчивостью μ :

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{ql}}$$

Решение (12) удобно искать в виде:

$$U(x,t) = U_0 e^{-iater} e^{(-\alpha+ik)x}.$$

Из первого уравнения системы (9) легко установить характер изменения силы тока в длинной линии:

$$I(x,t) = U_0 \frac{C_x \omega}{k + i\alpha} e^{-iat} e^{(-\alpha+ik)x}$$

Из (16) и (17) видно, что отношение силы тока и напряжения в длинной линии не зависят от времени и координаты. Это отношение называют волновым сопротивлением (импедансом):

$$Z(\omega,k) = \frac{U(x,t)}{I(x,t)} = \frac{k + i\alpha}{C_x \omega}.$$

В пределе малых затуханий $\alpha \ll \omega$

$$Z(\omega,k) \approx \frac{k}{C_x \omega} = \frac{1}{C_x V_\phi} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L_x}{C_x}}.$$

Если в конце такую длинную лнннюю замкнуть на сопротивление

$$R_0 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L_x}{C_x}},$$

то бегущая вдоль длинной линни волна "будет воспринимать"нагрузку как бесконечное продолжение этой длинной линии. Другими словами, когда длинная линия подключена k нагрузке с сопротивлением R_0, отражённой волны не возникает. Во всех остальных случаях, когда $R \neq R_0$ (в том числе и в частных случаях незамкнутого конца, когда $R \rightarrow \infty$ и короткозамкнутой линни, когда $R = 0$) возникает отражённая волна, описываемая выражением (сравни с (13)): $U(x,t) = U_0 e^{-iet} e^{-(\alpha+ik)x}$, которое также удовлетворяет решенню системы (9). Подставляя (16) в (12) получаем характеристическое уравнение:

$$-\omega^2 - V_\phi^2(-\alpha + ik)^2 - i\omega\gamma = 0.$$

Или, разделяя действительную и мнимую части, приходим к системе:

$$\begin{cases} \omega^2 = V_\phi^2\left(k^2 - \alpha^2\right) \\ 2\alpha k V_\phi^2 = \omega\gamma \end{cases}$$

Из (22) следует (в пределе малых затуханий $\alpha \lll$):

$$\alpha = \frac{\omega}{V_\phi}\sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\gamma/\omega)^2} - 1}{2}} \approx \frac{\omega}{V_\phi}\sqrt{\frac{\gamma^2}{4\omega^2}} = \frac{\gamma}{2V_\phi} = R_x C_x \frac{V_\phi}{2},$$

$$k = \frac{\omega}{V_\phi}.$$

Таким образом, амплитуда напряжения на нагрузке (в конце длинной линин) будет иметь вид:

$$U_\mu(t) = U_0 e^{-al} e^{ild} e^{-tat}.$$

При этом амплитуда колебаннй на согласованной нагрузке (в конце длинной линии) имеет вид:

$$U_n = U_0 e^{-ad}$$

и набег фазы сигнала на выходе (в конце длинной линии) относительно входного сигнала (вначале длнннной линии) будет иметь вид:

$$\Delta\varphi = kl.$$

Так как модуль волнового вектора k прямо пропорционален частоте сигнала ω (см. выражение (24)) следует понимать, что разность фазы $\Delta\varphi$ монотонно увеличивается с увеличеннем ω.

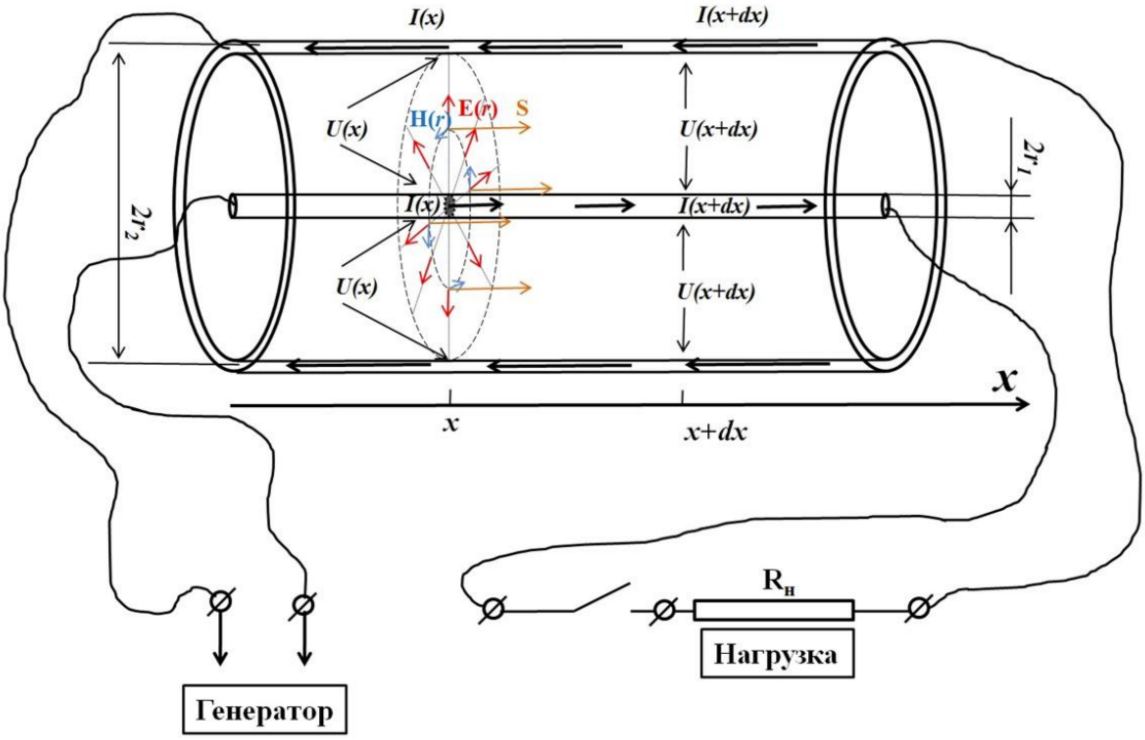
Из (26) и (27) легко экспериментально определить декремент затухания α и волновое число k для различных ω :

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{l}\ln\left(\frac{U_0}{U_n}\right),$$

$$k(\omega) = \frac{\Delta\varphi}{l}.$$

Важно! Обратите внимание, что все выражения здесь приведены в СГС.

4 Экспериментальная установка



Соберем данную установку.

5 Измерения, Обработка

5.1 Часть I. Оценка фазовой и групповой скорости

1) Согласованная нагрузка имеет сопротивление 50 Ом

2) С увеличением частоты амплитуда на выходе падает, меняется сдвиг фазы.

На входе амплитуда не меняется.

3) Резонансы наблюдаются на частотах

	ν, МГц
ν_1	3.97
ν_2	7.96
ν_3	11.96
ν_4	15.97
ν_5	19.98
ν_6	23.99
ν_7	28.00

4) Разброс значений от среднего значения 4 МГц не превышает десятка кГц. Таким образом дисперсия отсутствует(не превышает 1%)

Фазовая скорость по теоретической формуле

$$v_\phi = \frac{2\pi\Delta\nu}{\frac{2\pi}{k}} = (2 \pm 0.02) \cdot 10^8 \text{м/с}$$

5) Выставим сопротивление нагрузки 1 МОм(обрыв)

6) Качественно:

Меняется амплитуда обоих сигналов

Фаза меняется быстро при амплитуде входного сиглала около нуля на π.

Сумма амплитуд является инвариантом.

7) Резонансы наблюдаются на частотах

	ν, МГц
ν_1	4.0
ν_2	8.0
ν_3	12.0
ν_4	16.0
ν_5	20.0
ν_6	24.0
ν_7	28.1

8) Разброс значений от среднего значения 4 МГц не превышает десятка кГц. Таким образом дисперсия отсутствует(не превышает 1%)

Фазовая скорость по теоретической формуле

$$v_\phi = \frac{2\pi\Delta\nu}{\frac{2\pi}{k}} = (2 \pm 0.02) \cdot 10^8 \text{м/с}$$

5.2 Прямоугольные импульсы (согласованная линия)

1-3) Выставим сопротивление нагрузки 50 Ом(согласованная нагрузка)

4) Качественно:

По одному входному и выходному импульсу покоятся(свойство развертки)

Остальные сжимаются к ним как к аттрактору при повышении частоты

Амплитуды импульсов не меняются.

5) Резонансы наблюдаются на частотах

	ν, МГц
ν_1	4.01
ν_2	8.02
ν_3	12.03
ν_4	16.04
ν_5	20.05

6) Разброс значений от среднего значения 4 МГц не превышает десятка кГц. Таким образом дисперсия отсутствует(не превышает 1%)

Фазовая скорость по теоретической формуле

$$v_\phi = \frac{2\pi\Delta\nu}{\frac{2\pi}{k}} = (2 \pm 0.02) \cdot 10^8 \text{м/с}$$

7) Выставим сопротивление нагрузки 1 МОм(обрыв)

8) От входного импульса образуется гаснущая отраженная волна, сдвинутая на π относительно него.

Амплитуды сигналов суммируются.

9) Резонансы наблюдаются на частотах

	ν, МГц
ν_1	4.02
ν_2	8.04
ν_3	12.06
ν_4	16.08
ν_5	20.10

10) Разброс значений от среднего значения 4 МГц не превышает десятка кГц. Таким образом дисперсия отсутствует(не превышает 1%)

Фазовая скорость по теоретической формуле

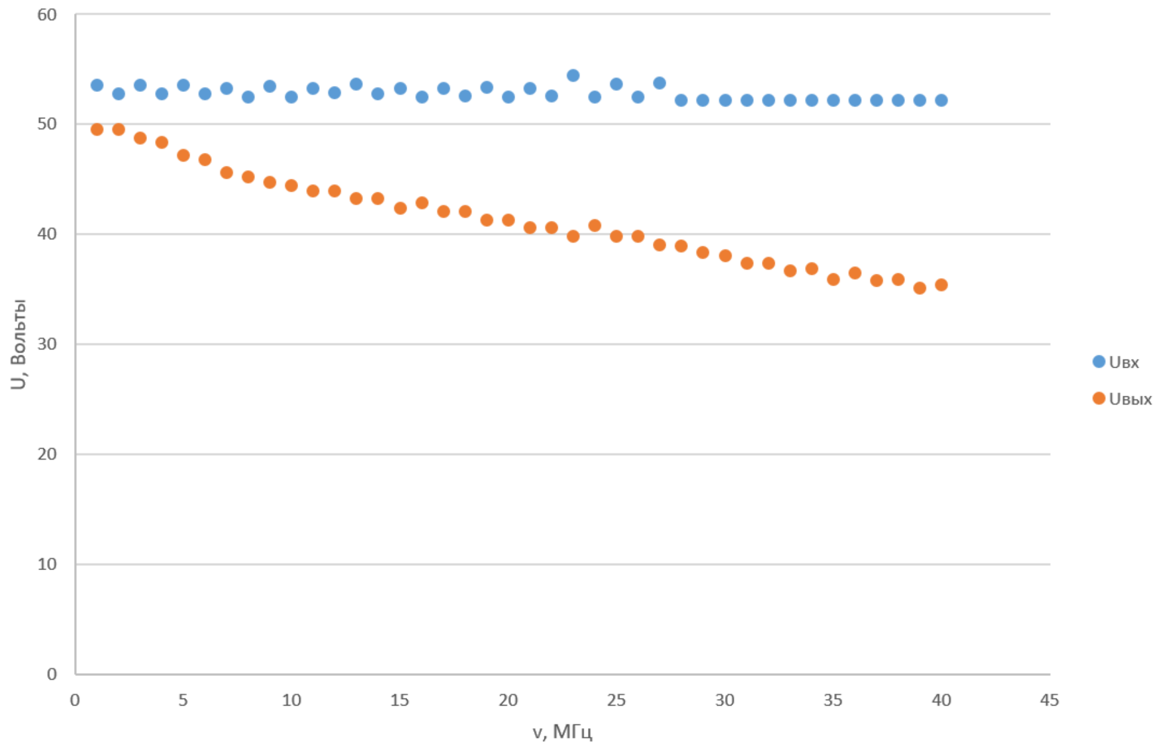
$$v_\phi = \frac{2\pi\Delta\nu}{\frac{2\pi}{k}} = (2 \pm 0.02) \cdot 10^8 \text{м/с}$$

5.3 Часть II. Амплитудно-частотная и фазово-частотная характеристики

1-4) Выставим сопротивление нагрузки 50 Ом(согласованная нагрузка)

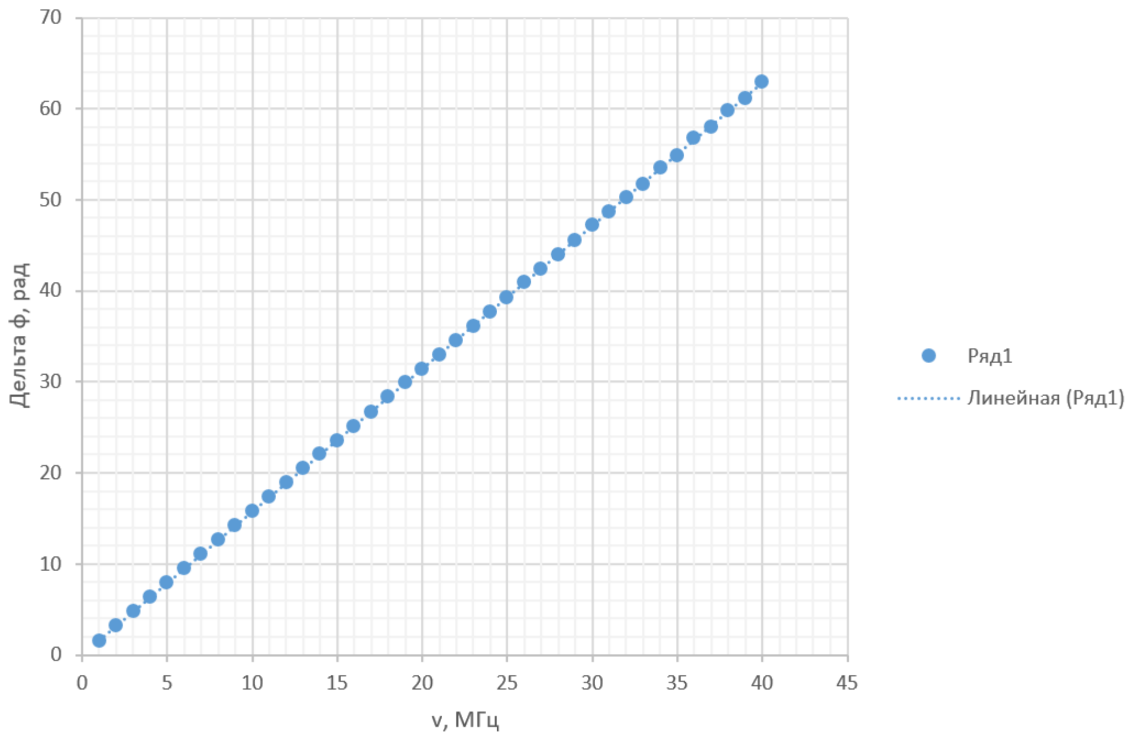
5) Снятые данные приведены в таблицах, построим соотвествующие графики

АЧХ



60
50
40
30
20
10
0
U, Вольты
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
v, МГц
Uвх
Uвых

ФЧХ



70
60
50
40
30
20
10
0
Дельта ф, рад
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
v, МГц
Ряд1
Линейная (Ряд1)

5.4 Обработка. Часть I. Определение параметров коаксиального кабеля.

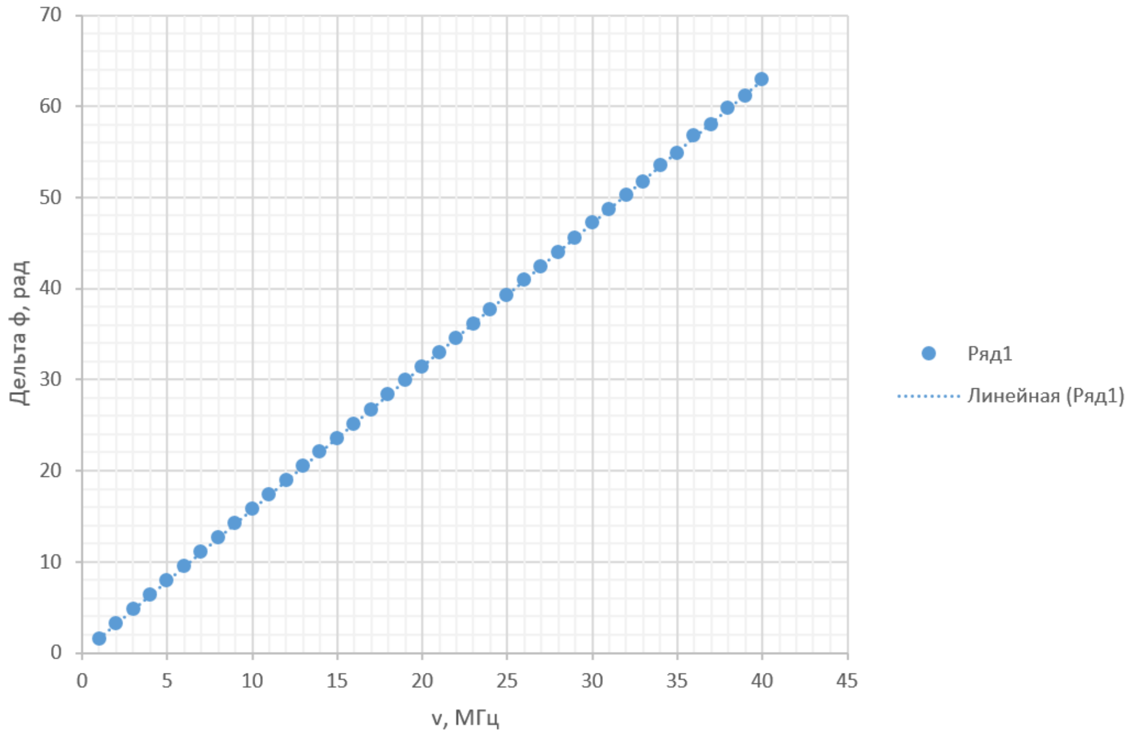
Для определения характеристик коаксиального кабеля первое уравнение системы (22) с учётом (23) удобно переписать следующим образом

$$y_1 = \frac{L_x C_x}{c^2} x_1$$

$$x_1 = \omega^2$$

$$y_1 = k(\omega)^2 - \alpha(\omega)^2$$

Построим график y(x)



Найдем угловые коэффициенты прямых для каждой установки по МНК.

$$a = \frac{< x_i y_i > - < x >< y_i >}{< x_i^2 > - < x_i >^2}$$

$$b =< \nu_i > -a < N_i >$$

Также рассчитаем их погрешности

$$S_a^2 = \frac{< x_i^2 >}{< x_i^2 > - < x_i >^2} \cdot \frac{< b_i - b >^2}{n - 2}$$

$$y_1 = (3.4 \pm 6.3) \cdot 10^{-8} + (2.4996 \pm 0.0022) \cdot 10^{-21} \cdot x_1$$

Тогда

$$L_x C_x = (2.247 \pm 0.002) \text{ [СГС]}$$

Наконец, с учетом $\frac{L_x}{C_x} = 2.5 \cdot 10^{21}$ [СГС], получим

$$L_x = 2.500 \pm 0.001 \text{ см}$$

$$C_x = 0.89877 \pm 0.0004 \text{ см}$$

Магнитная восприимчивость

$$\mu = \frac{L_x}{2ln(r_2/r_1)} = \frac{C}{2ln(11/4)} = 1.2357 \pm 0.005$$

Диэлектрическая проницаемость же

$$\epsilon = 2C_x ln(r_2/r_1) = 1.81839 \pm 0.0008$$

Как видно, значения очень похожи на реальные

5.5 Часть II. Определение удельной проводимости проводников. Метод А

Из (23) и (28) следует:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{l} \ln\left(\frac{U_0}{U_w}\right) = R_x C_x \frac{V_\phi}{2}.$$

Если взять удельную проводимость для меди и подставить в известное выражение для характерной толщины скнн-слоя:

$$\delta = \frac{c}{2\pi\sqrt{\nu\sigma}},$$

то окажется, что даже при минимальной частоте $v = 1$М« 65 мкм, что прнмерно в десять раз меньше раднуса центрального проводника (днаметр центральной жилы равен $d = 1{,}37$mM). Прн больших частотах характерная толшнна скннслоя ещё меньше. Поэтому для упрощення будем предполагать, что весь ток сосредоточен в прнповерхностном слое и потери, связанные с джоулевым нагревом опнсываются следуюшим выраженнем:

$$dN = \sigma E_0^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{z}{\delta}} dz dx L\bigg|_{L=\pi d} = \sigma E_0^2 \cdot dx \cdot \pi d \cdot \frac{\delta}{2}\left(-e^{-2\frac{z}{\delta}}\right)\bigg|_0^\infty \frac{\sigma \cdot \pi d}{dx} \cdot \frac{\delta}{2}(dU)^2 = \frac{(dU)^2}{dR},$$

где

$$dR = \frac{dx}{\sigma \cdot \pi d} \cdot \frac{2}{\delta}$$

Погонное сопротивленне с учётом скин-эффекта можно определить следующнм образом:

$$R_x = \frac{dR}{dx} = \frac{2}{\sigma \cdot \pi d \cdot \delta}.$$

Или, с учётом выражения для характерной толшнны скин-слоя (34), имеем:

$$R_x = \frac{4\sqrt{\nu}}{\sqrt{\sigma} \cdot c \cdot d}.$$

Таким образом, подставляя (38) в (33) приходим к зависимости:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{l} \ln\left(\frac{U_0}{U_\mu}\right) = \frac{4}{\sqrt{\sigma} \cdot d} C_x \frac{V_\phi}{c} \sqrt{v}.$$

Это выражение можно переписать в следующем виде:

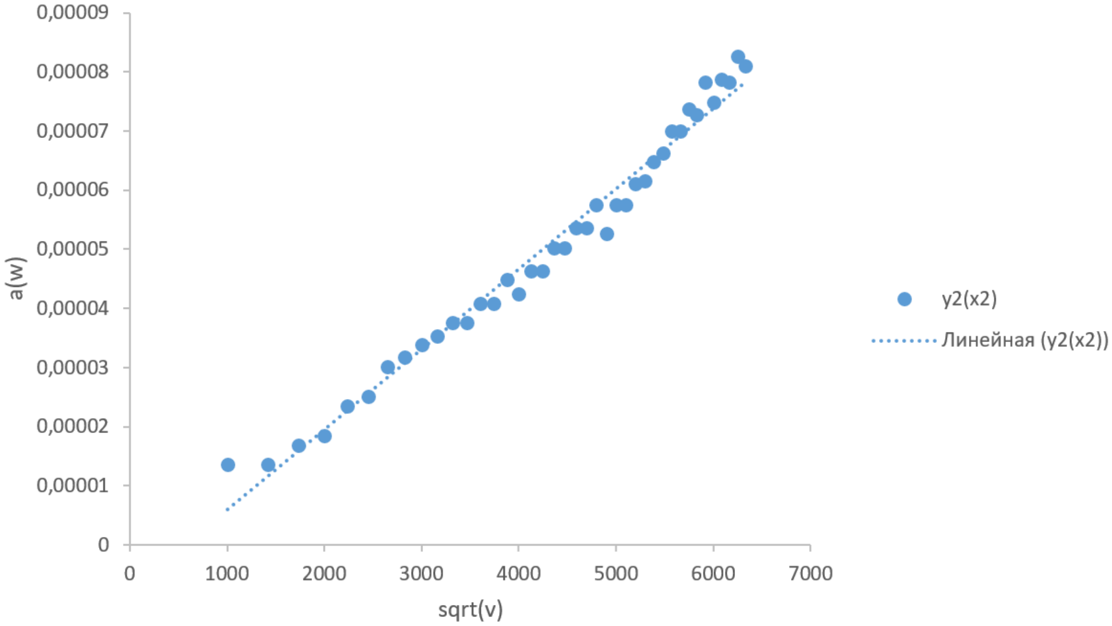
$$y_2 = \frac{4}{\sqrt{\sigma} \cdot d} C_x \frac{V_\phi}{c} x_2,$$

где

$$x_2 = \sqrt{v},$$

$$y_2 = \alpha(\omega).$$

Построим график $a(\omega)$ от ν



Найдем угловые коэффициенты прямых для каждой установки по МНК.

$$a = \frac{< x_i y_i > - < x >< y_i >}{< x_i^2 > - < x_i >^2}$$

$$b =< \nu_i > -a < N_i >$$

Также рассчитаем их погрешности

$$S_a^2 = \frac{< x_i^2 >}{< x_i^2 > - < x_i >^2} \cdot \frac{< b_i - b >^2}{n - 2}$$

$$y_1 = (-7.6 \pm 1.4) \cdot 10^{-6} + (1.358 \pm 0.031) \cdot 10^{-8} \cdot x$$

По наклону прямой на графике, можно определить удельную проводимость σ

$$\sigma = \left(\frac{4C_x V_\phi}{c \cdot d \cdot (\Delta y_2/\Delta x_2)}\right)^2 = (1.66 \pm 0.08) \cdot 10^{18}\ [\text{СГС}]$$

Значение проводимости близко к табличному значению $(1.54 \cdot 10^{18})$

5.6 Метод Б

Подставив выражение для γ из (14) во второе уравнение системы (22) и сокращая на квадрат скорости V_ϕ^2 легко прнйти к выражению:

$$2\alpha k = \omega R_x C_x.$$

(44) Зная амплитуду колебаний и сдвиг фазы в конце длинной линии относительно входного сигнала экспериментально можно определнть как $\alpha(\omega)$, так и $k(\omega)$ (см., например, выражения (28) и (29)). Таким образом, выражение (44) можно представить в следующем виде:

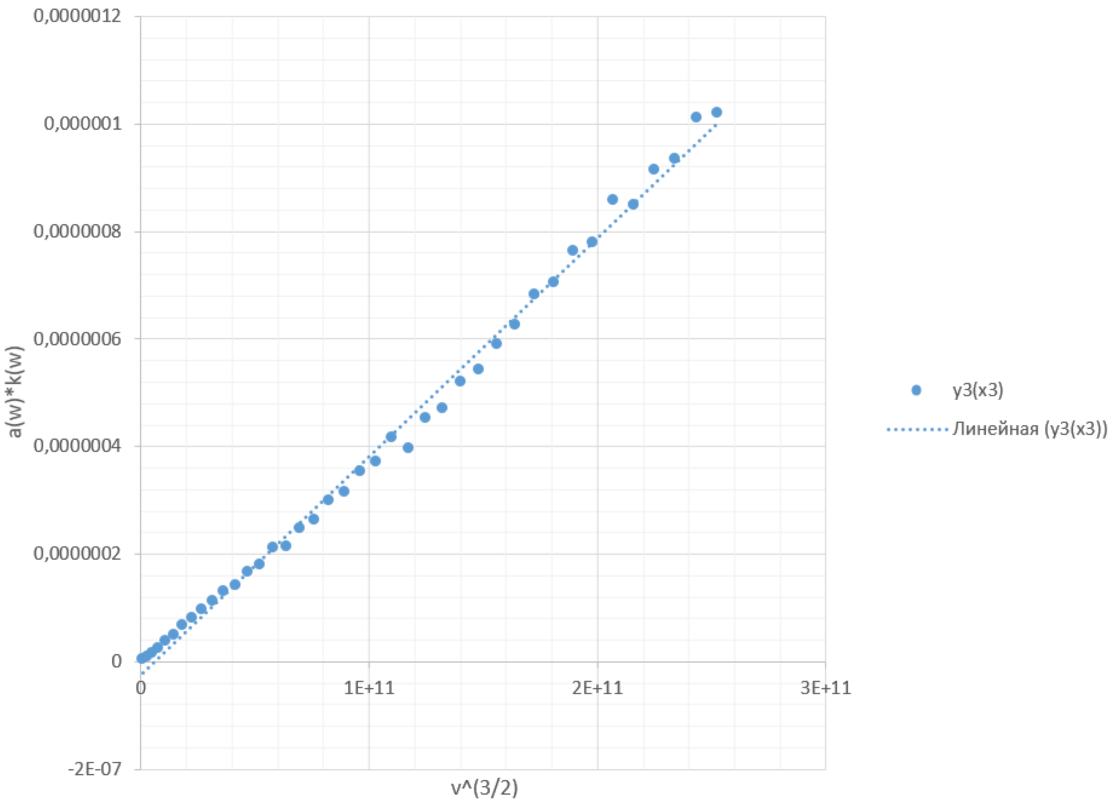
$$y_3 = \frac{4\pi \cdot C_x}{\sqrt{\sigma} \cdot d \cdot c} x_3,$$

где

$$x_3 = v^{3/2},$$

$$y_3 = \alpha(\omega) \cdot k(\omega) = \frac{1}{l} \ln\left(\frac{U_0}{U_n}\right) \cdot \frac{\Delta\varphi}{l}.$$

Построим зависимость y_3 от x_3.



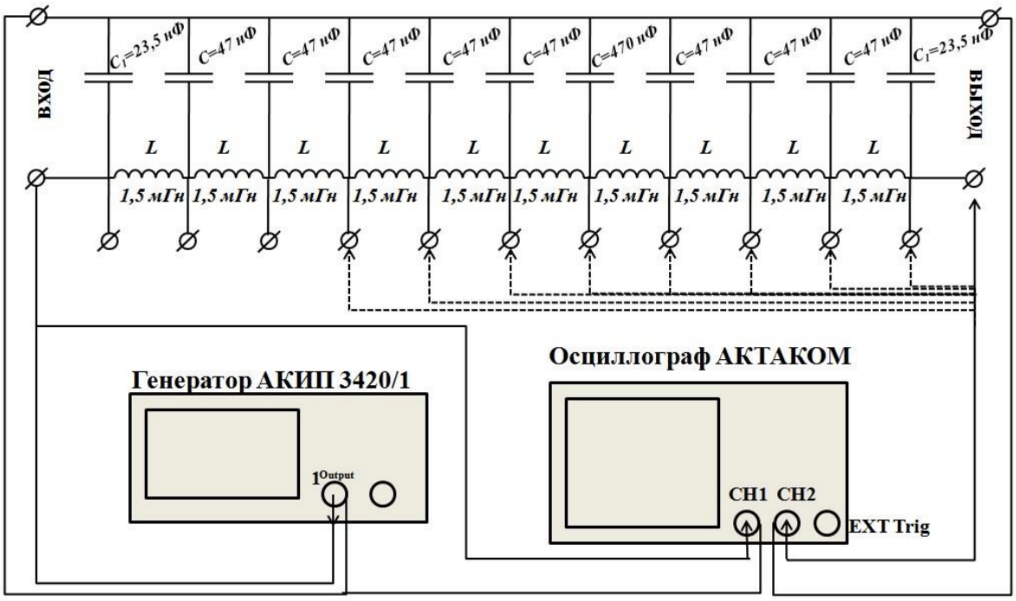
$$y_3 = (-2.57 \pm 0.6) \cdot 10^{-8} + (4.058 \pm 0.046) \cdot 10^{-18} \cdot x$$

По наклону, полученной прямой определим удельную проводнмость σ

$$\sigma = \left(\frac{4\pi \cdot C_x}{d \cdot c\,(\Delta y_3/\Delta x_3)}\right)^2 = 1.84 \pm 0.04 \cdot 10^{18} \text{ [СГС]}$$

5.7 Длинная линия. Модель

1) Соберем схему как на рисунке



Придельная частота распространения сигнала для установки

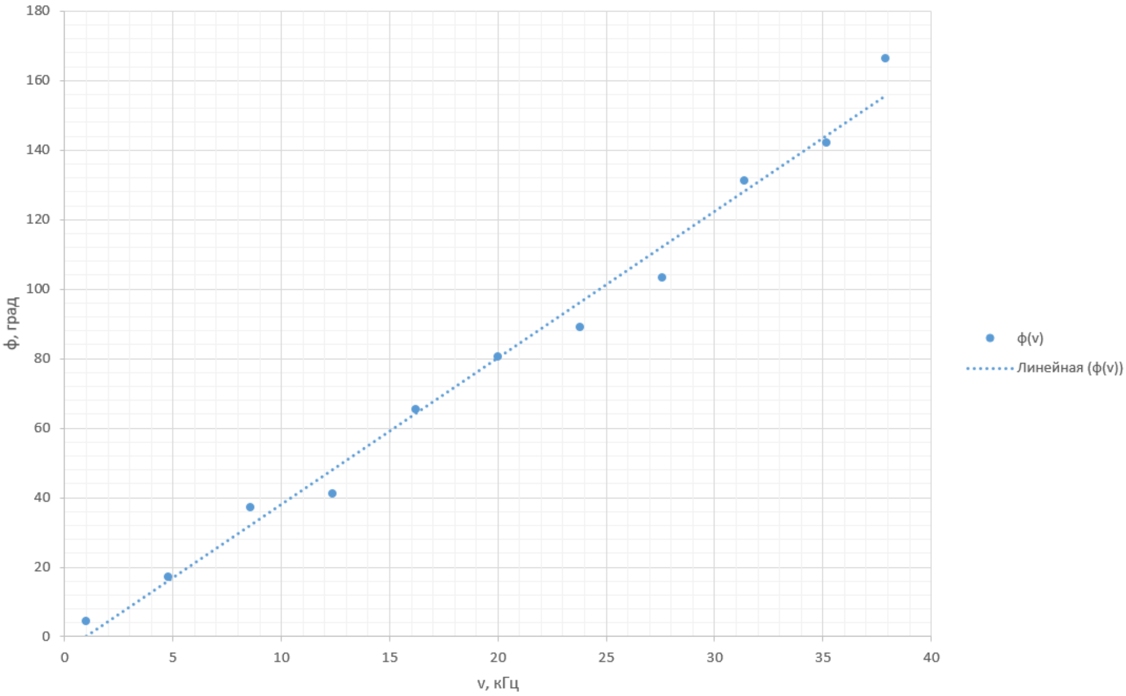
$$\nu_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} = 37.9 \text{ кГц}$$

Согласованная нагрузка для цепи

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 178.6 \text{ Ом}$$

2) Убедимся, что согласующее сопротивление подходящее

3, 7) Замерим сдвиг фаз в зависимости от частоты и построим график $\phi(\nu)$.



Линейная зависимость полностью согласуется с теорией

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\nu l}{v_\phi}$$

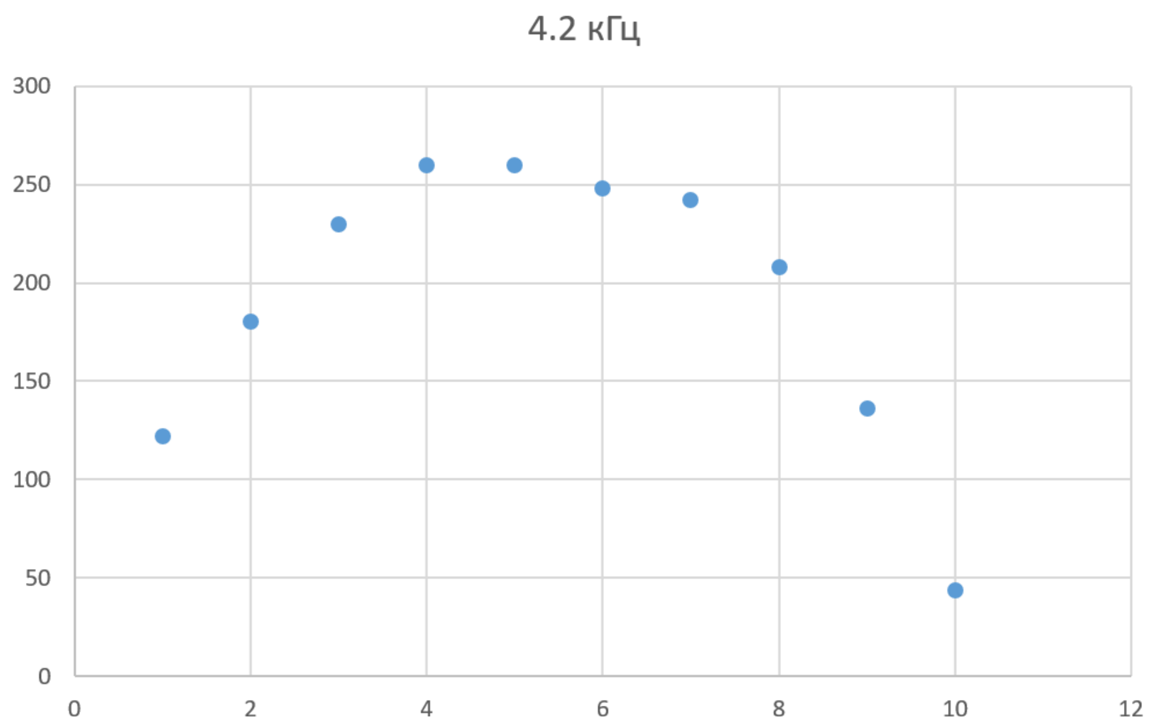
4) Таблица резонансных частот при согласованной нагрузке

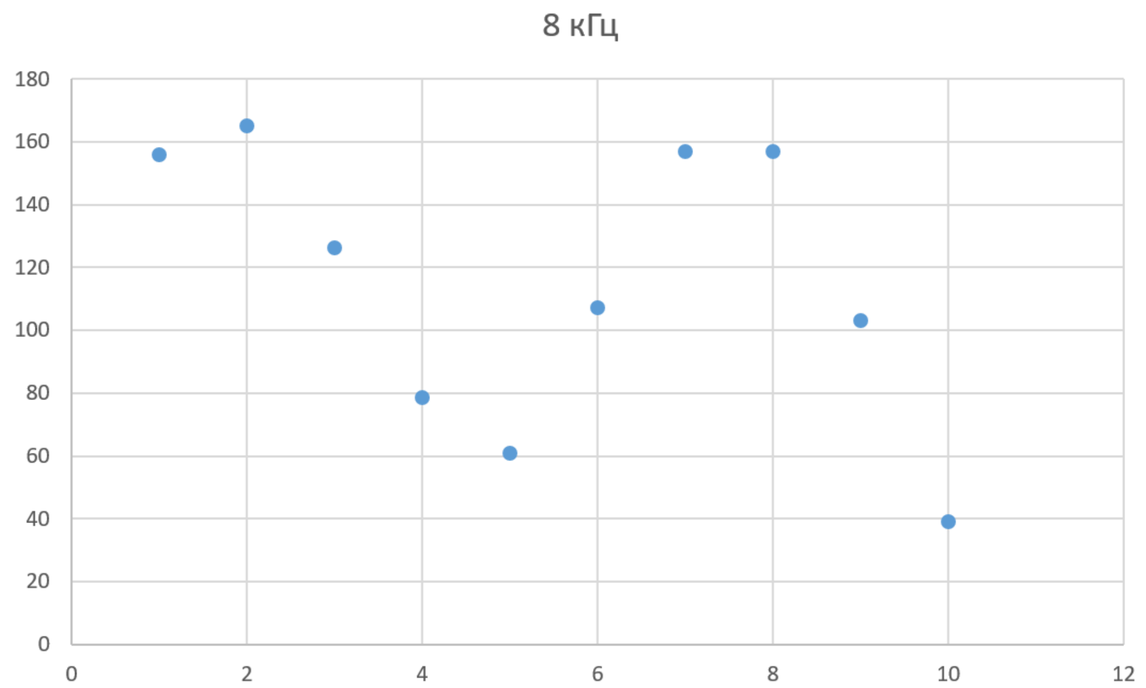
	ν, кГц
ν_1	4.2
ν_2	8.0
ν_3	13.0
ν_4	17.7
ν_5	21.2
ν_6	25.8

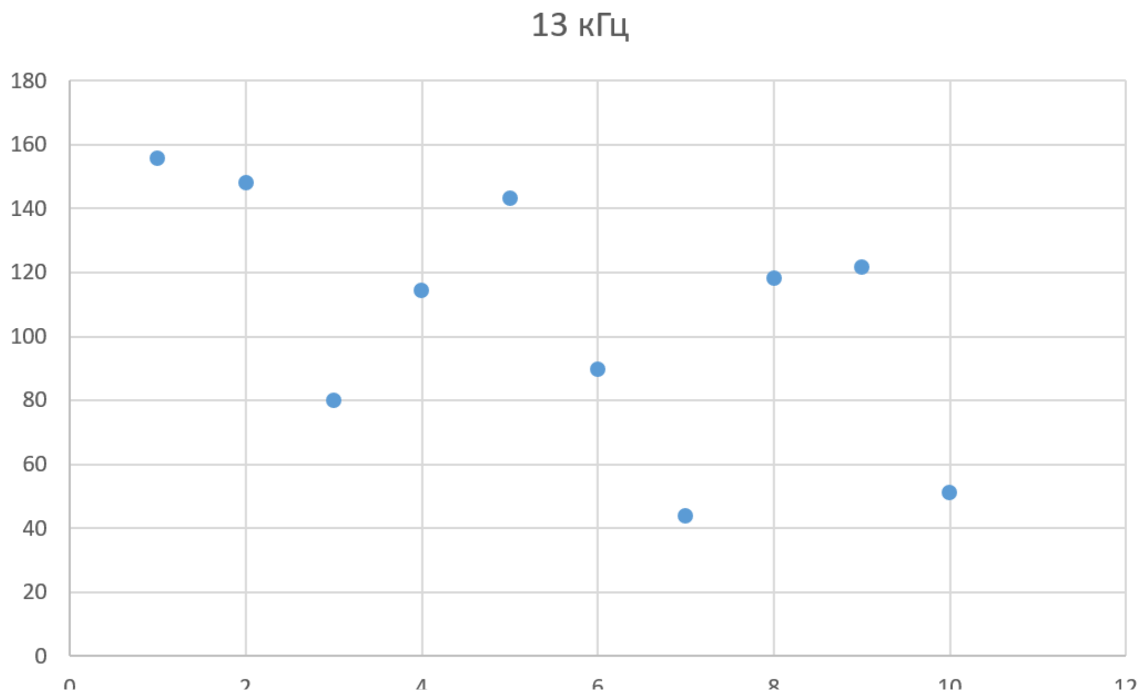
При разрыве цепи же

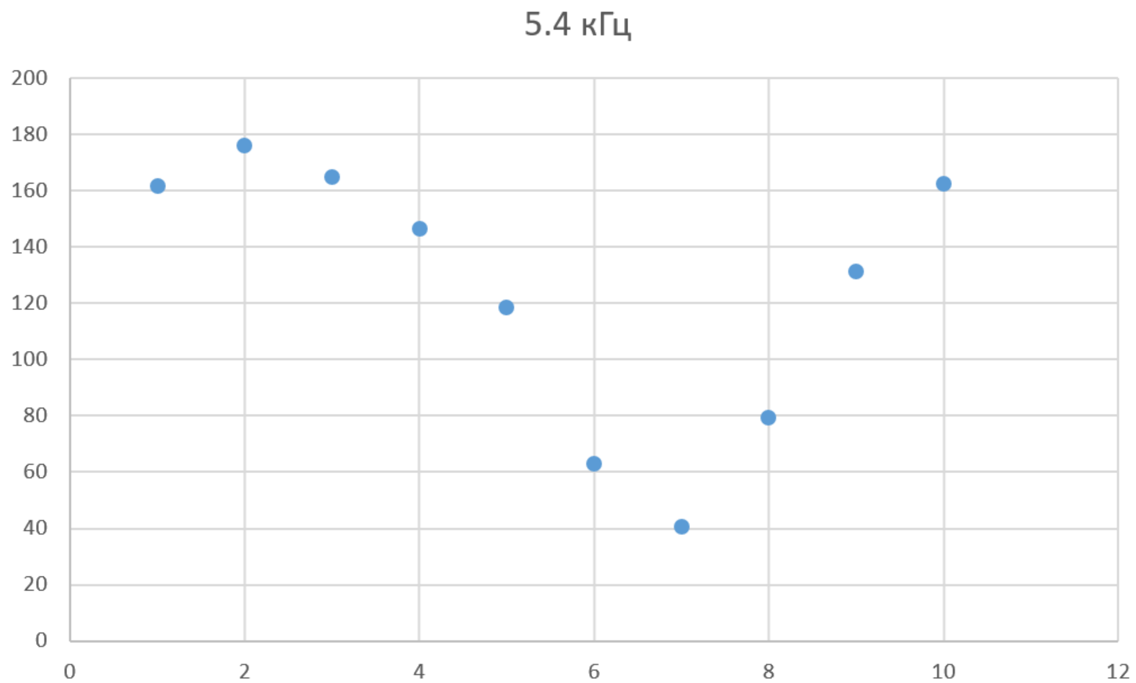
	ν, кГц
ν_1	5.4
ν_2	7.8
ν_3	9.7
ν_4	14.6
ν_5	19.0
ν_6	23.3
ν_7	26.9

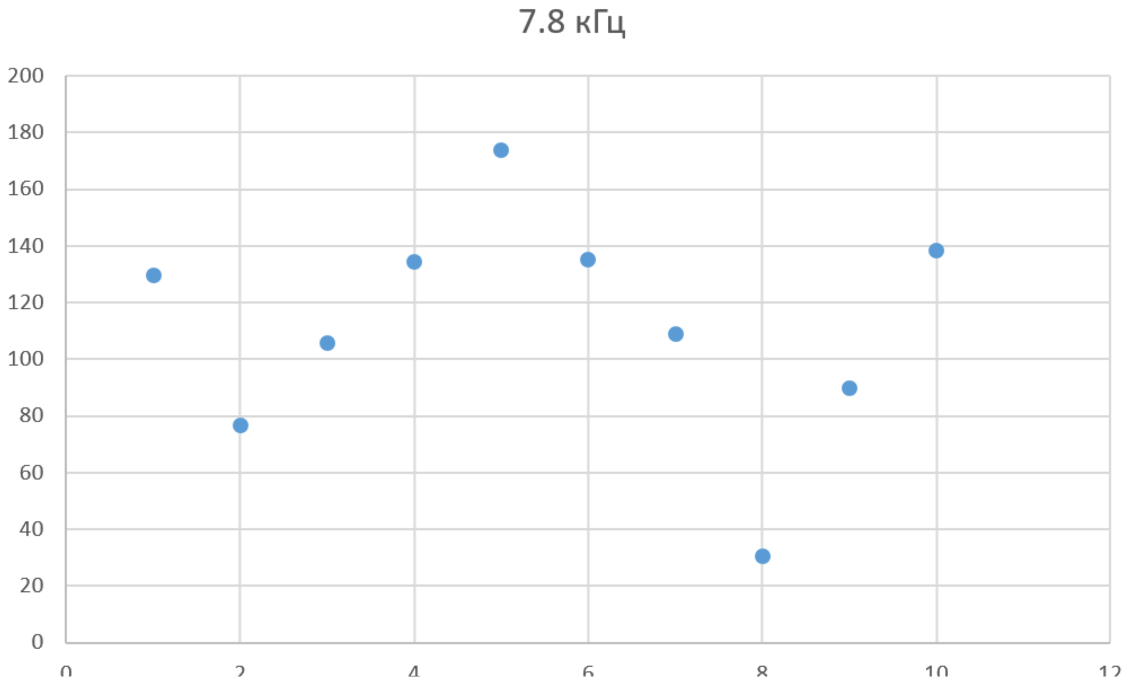
5) Построим соответствующие графики

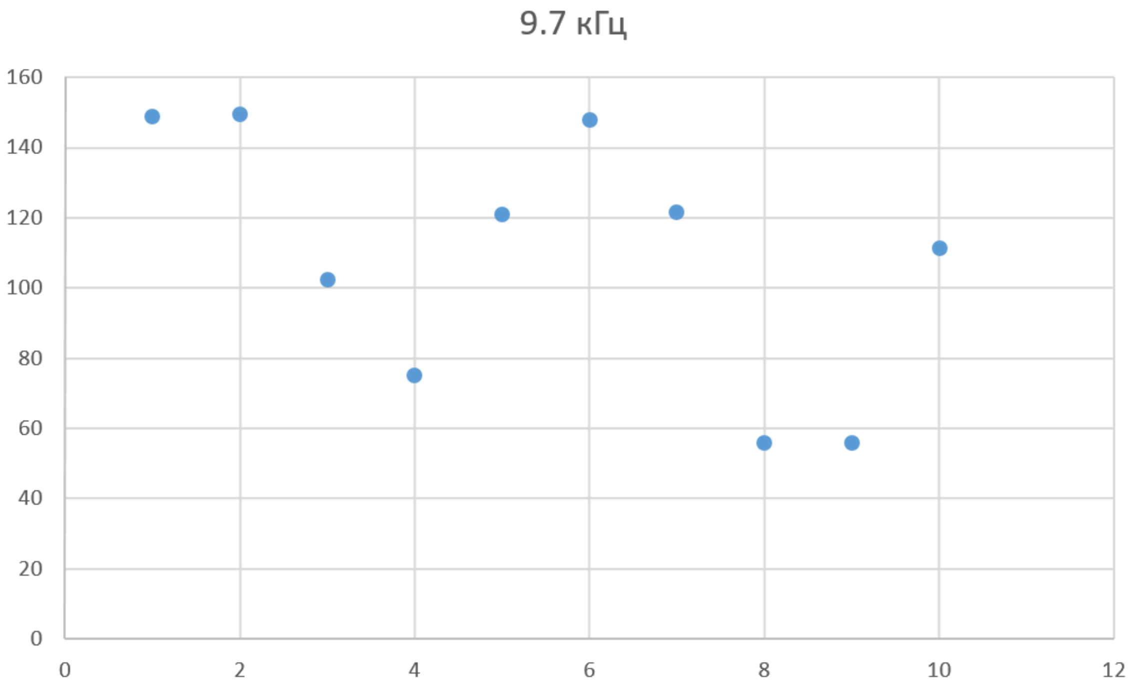

4.2 кГц
300
250
200
150
100
50
0
0
2
4
6
8
10
12


8 кГц
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
12


13 кГц
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
12


5.4 кГц
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
12


7.8 кГц
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
12


9.7 кГц
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
12

На графиках можно наблюдать пространственное распределение амплитуды колебаний точек волны, соответствующее стоячей волне в цепи. Диаграммы обрыва цепи сдвинуты на π по фазе относительно согласованной нагрузки. На графиках хорошо прослеживается синусоидальная форма сигнала.

6 Вывод

Лабораторная работа фактически подтвердила применимость волнового уравнения для систем различного сорта, с достаточно высокой точностью.

7 Ресурсы

Расчет по МНК: метод-наименьших-квадратов.рф