

# Лабораторная работа 1.2.5

## Исследование прецессии гироскопа

### Выполнил Жданов Елисей Б01-205

#### 1 Цель работы:

- 1) Исследовать вынужденную прецессию гироскопа
- 2) Установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа
- 3) Определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить её со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии

#### 2 Оборудование:

- 1) Гироскоп в кардановом подвесе
- 2) Секундомер
- 3) Набор грузов
- 4) Отдельный ротор гироскопа
- 5) Цилиндр известной массы
- 6) Крутильный маятник
- 7) Штангенциркуль
- 8) Линейка

#### 3 Теория гироскопа:

Момент импульса твердого тела в его главных осях x, y, z равен

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z$$

где  $I_i$  - главные моменты инерции,  $\omega_i$  - компоненты вектора угловой скорости.

Гирископом же называется быстро вращающееся тело, для которого момент импульса вдоль одной из осей много больше 2-х других.

.

Выясним, какие силы надо приложить к гироскопу, чтобы изменить направление его оси. Рассмотрим для примера маховик, вращающийся вокруг оси z, перпендикулярной плоскости маховика, т.е.  $\omega_z = \omega_0$

Пусть ось вращения повернулась в плоскости zx по направлению к оси x на бесконечно малый угол  $d\phi$ . Такой поворот означает добавочное вращение маховика вокруг оси y, так что

$$d\phi = \Omega dt$$

, где  $\Omega$  - угловая скорость такого вращения.

Будем предполагать, что

$$L_\Omega \ll L_{\omega_0}$$

Это значит, что изменением величины момента импульса маховика можно пренебречь, поскольку он всего-лишь повернется в плоскости zx. Таким образом

$$|d\vec{L}| = L d\phi = L \Omega dt$$

Поскольку это изменение направлено вдоль оси x, его удобно представить в виде векторного произведения

$$|d\vec{L}| = \vec{\Omega} \times \vec{L} dt$$

Тогда деля на dt

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

Под действием момента внешних сил  $\vec{M}$  ось гироскопа медленно вращается вокруг оси y с угловой скоростью  $\Omega$ . Такое движение называется регулярной прецессией

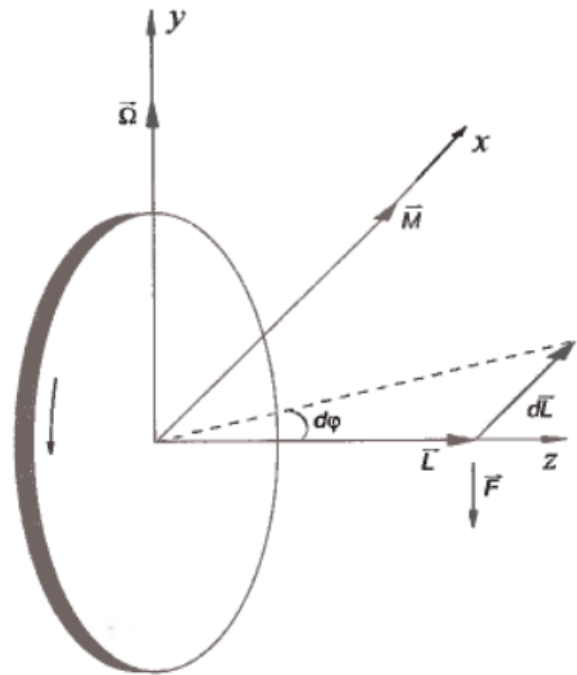


Рис. 1

гироскопа. В частности, создающей момент внешней силой может оказаться сила тяжести, если центр масс гироскопа не совпадает с точкой подвеса. Для гироскопа массой  $m_{\Gamma}$ , у которого ось собственного вращения наклонена на угол  $\alpha$  от вертикали, скорость прецессии, происходящей вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести, равна

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_{\Gamma} g l_{\text{ц}}}{I_z \omega_0}$$

$l_{\text{ц}}$  - расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа, т.е. скорость прецессии не зависит от  $\alpha$ .

Для изучения релаксационной прецессии уравновешенного гироскопа к его оси подвешивают дополнительные грузы. Это смещает общий центр масс и создает момент сил тяжести, вызывающий прецессию. Скорость прецессии в этом случае равна

$$\Omega = \frac{m g l}{I_z \omega_0}$$

где  $m$  - масса груза,  $l$  - расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа.

## 4 Описание установки:

В данной работе исследуется регулярная прецессия уравновешенного гироскопа.

Уравновешенный гироскоп, закрепленный в кольцах карданова подвеса, показан на рис. 2. Наружное кольцо подвеса А может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси  $aa$ . Внутреннее кольцо Б связано с кольцом А горизонтальной осью  $bb$ . В кольце Б закреплен гироскоп, ось вращения которого  $vv$  перпендикулярна оси  $bb$ . Центр масс гироскопа находится на пересечении всех трех осей и при любом повороте колец сохраняет свое положение в пространстве. Получается, что гироскоп как-бы подвешен за центр масс.

Экспериментальная установка для исследования прецессии гироскопа показана на рис.3. Ротором гироскопа является ротор высокооборотного электромотора М, питающегося током частотой 400 Гц. Статор скреплен с кольцом Б. Мотор с кольцом Б может вращаться в кольце А вокруг горизонтальной оси  $bb$ , которое может вращаться вокруг вертикальной оси  $aa$ . Ротор электромотора представляет собой массивный стальной цилиндр с прожилками меди, образующими беличье колесо. Обозначенный на рис. 3. буквой С рычаг направлен по оси симметрии ротора. На рычаг подвешивают грузы Г. Подвешивая различные грузы, можно менять силу  $F$ , момент которой определяется расстоянием  $l$  от точки подвеса до горизонтальной оси кольца А (до центра масс гироскопа), указанным на самой установке.

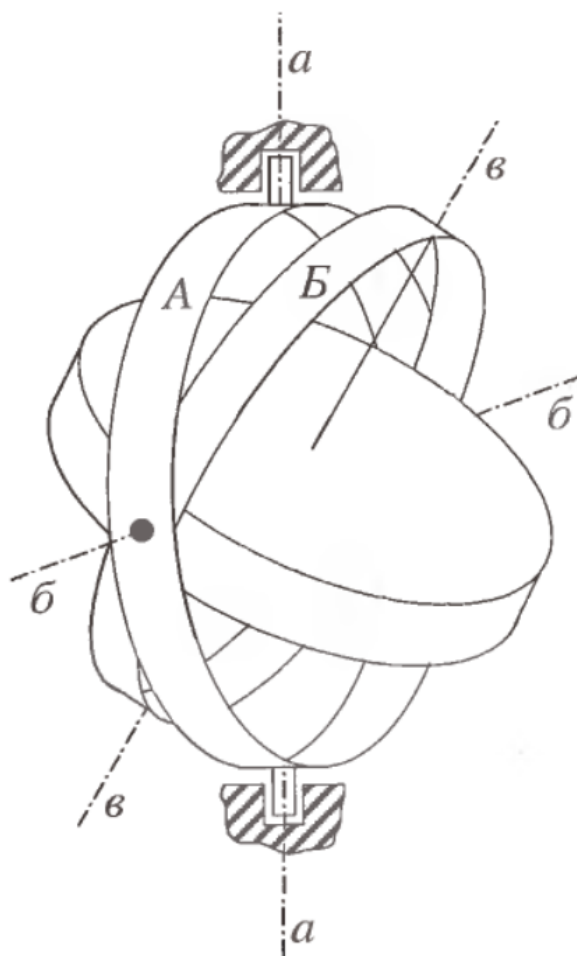


Рис. 2

Выше при выводе формул для прецессии предполагалось, что действующие на гироскоп силы лежат в плоскости  $zy$ , в которой лежат вектора угловых скоростей собственного вращения и прецессии. В этом случае момент сил меняет лишь направление момента импульса гироскопа, но не его величину. Силы трения не лежат в плоскости осей вращения. Они приводят к изменению момента импульса и по направлению, и по величине. Для ротора гироскопа действие сил трения скомпенсировано действием электромотора.

Для осей карданова подвеса компенсации нет. В результате ось гироскопа будет опускаться в направлении действия груза.

Изменение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Момент инерции ротора относительно оси симметрии  $I_0$  измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний  $T_0$  определяется

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции  $I_{\text{ц}}$ . Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}$$

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну из обмоток используют для раскрутки гироскопа, а вторую - для измерения чиста оборотов ротора. Ротор всегда немного немагнитен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную ЭДС индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой - переменное напряжение с генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

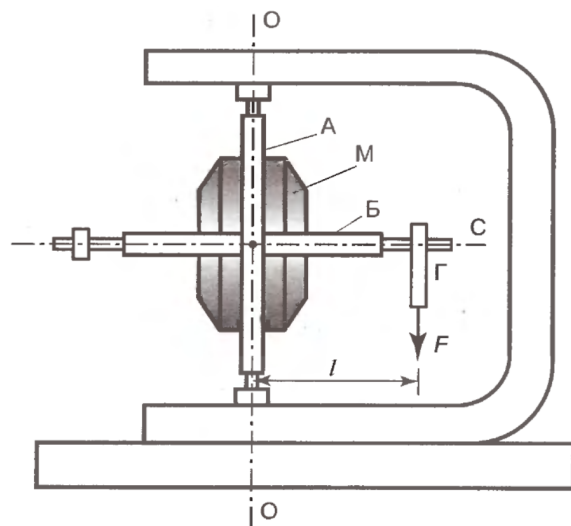


Рис. 3

## 5 Измерения и обработка:

1 - 2) Подключим гироскоп к питанию, заранее установив его в требуемое положение, пока он не раскрутился и это не стало затруднительно.

3) При воздействии силы вниз на горизонтальную ось гироскопа она движется против часовой стрелки. Вектор угловой скорости направлен вверх, момента силы - направо. Значит момент импульса и вектор угловой скорости гироскопа направлен вдоль оси в сторону точки приложения силы. Значит для такой оси вращения происходит против часовой стрелки.

4) Трение в оси карданова подвеса(а) позволит грузу вместе с осью опускаться вниз.

5 - 6) Запишу результаты замеров в таблицу

$m_i, \text{г}$	$n$	$t, \text{с}$			$M, \text{Н}\cdot\text{м}$	$\Omega, \text{с}^{-1}$
		$t_1$	$t_2$	$\bar{t}$		
343	6	178.84	177.94	178.39	0.400	0.211
267	5	189.83	190.94	190.39	0.312	0.165
215	4	193.16	199.19	196.18	0.251	0.128
141	3	216.00	216.41	216.21	0.165	0.087
112	3	274.06	274.03	274.05	0.131	0.069
93	3	326.44	326.44	326.44	0.109	0.058
76	2	270.84	273.31	272.08	0.089	0.046

$m_i$  - масса очередного груза,  $n$  - количество полных оборотов,  $t$  - соответствующее им время.

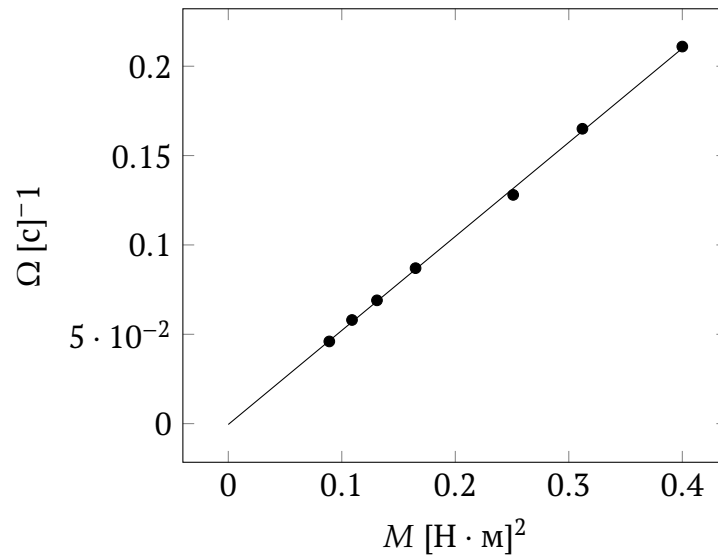
Было принято решение делать 2 замера, поскольку целое количество оборотов для груза всегда совпадало, а время отличалось с точностью до реакции экспериментатора, при этом сильно большую погрешность вносит именно метод замера по целым оборотам.

Усредненный момент силы составит

$$M = mgl$$

Длина  $l$  составляет 119 мм(указано на установке).

Ускорение свободного падения возьму  $g = 9.815 \text{ м/с}^2$ .



Коэффициент наклона

$$k = \frac{1}{I_z \omega_0} = 0.527 \pm 0.005 \text{ [СИ]}$$

7 - 8) Масса пробника - 1.6169 кг, его радиус вычисляется из замера диаметра штангенциркулем и составляет 3.9 см.

Период колебаний пробника найду из длительности 10 подряд идущих колебаний.  
 $T_{\text{ц}} = \frac{40.41}{10} = 4.04 \pm 0.02 \text{ сек.}$

Период колебаний ротора  $T_0 = \frac{64.09}{20} = 3.20 \pm 0.01$

Тогда искомый момент инерции

$$I_0 = \frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} = (7.71 \pm 0.17) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

9) Наконец частота вращения гироскопа вокруг оси z

$$\omega_0 = \frac{1}{I_z k} = (2460 \pm 80) \text{ с}^{-1}$$

10) Скорость опускания рычага для выбранных углов (6° и полный оборот) связана со скоростью вращения

$$\Delta \Omega_{\text{уд}} = \frac{12^\circ}{360^\circ} \Omega_{\text{уд}} = 0.0205 \text{ с}^{-1}$$

Итого момент сил трения

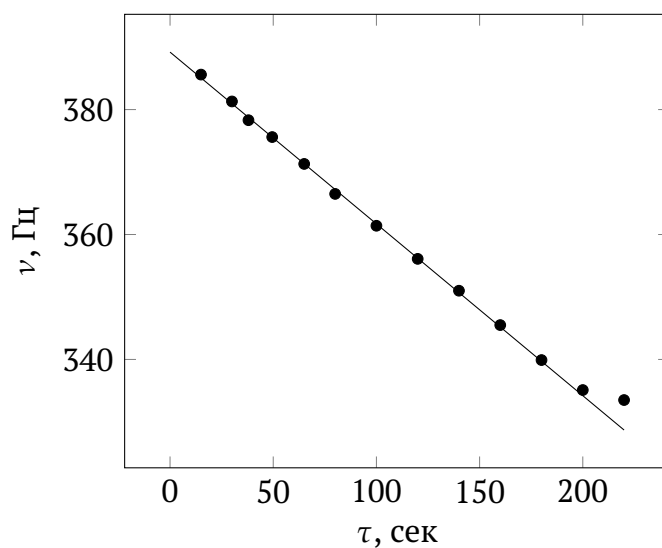
$$m_{\mu} = m_g \frac{12^{\circ}}{360^{\circ}} = 0.039 \text{ м}^2/\text{с}^2$$

Выражение просто следует из разложения движения гироскопа по двум осям. Вдоль каждого направления движение связано с соответствующим моментом сил. Пропорциональным моментам сил будет соответствовать пропорциональная скорость прецессии.

Был произведен расчет для удельной массы(на килограммовый груз)

11) Приведу полученную таблицу с замерами и соответствующий график.

$\tau$ , сек	$\nu$ , Гц
15	385.6
30	381.3
38	378.3
49.5	375.6
65	371.3
80	366.5
100	361.4
120	356.1
140	351.0
160	345.5
180	339.9
200	335.1
220	333.5



В итоге



$$\nu_0 = 389.2 \text{ Гц}$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = (2445.4 \pm 0.6) \text{ с}^{-1}$$

Замечу, что вследствие того, что гироскопу необходимо действительно(бесконечно) большое время, чтобы досчитать своей максимальной частоты вращения, реальная погрешность может быть большей.

## 6 Время делать выводы:

12 - 13, п3 цели) Частоты, замеренные 2-мя различными способами, отличаются буквально на процент, что я считаю отличным результатом. Поэтому формула (5)(книжный индекс) действительно применима с имеющимися приближениями. Более того, принятые теоретические приближения как обычно не сыграли роли в погрешности, поскольку были более веские практические факторы эксперимента, которые не позволяли сравнить приборную и теоретическую погрешности.

Поэтому считаю, что вынужденная прецессия гироскопа исследована исчерпывающе различными способами и цель работы выполнена.