

# Лабораторная работа 2.4.1

## Скин-эффект

Выполнил Жданов Елисей Б01-205

### 1 Цель работы:

Исследовать явление проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр

### 2 Оборудование:

Генератор сигналов АКИП–3420

Соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас

Медный экран в виде полого цилиндра

Измерительная катушка

Амперметр

Вольтметр

Двухканальный осциллограф GOS–620

RLC-метр

### 3 Теоретическая справка

В работе изучается скин-эффект в длинном тонкостенном медном цилиндре, помещённом внутрь соленоида.

Теоретически такая задача сложнее, чем рассмотренный в п.3.1 (см. Лабораторный практикум по общей физике: электричество и магнетизм, раздел 7) скин-эффект в полубесконечном пространстве: здесь требуется совместное решение уравнений скин-эффекта (уравнения диффузии поля) (л7.22), (л7.23)\* в стенке цилиндра и квазистационарных уравнений поля в его полости.

Пусть цилиндр достаточно длинный, так что в нём можно пренебречь краевыми эффектами. В этом приближении магнитное поле  $H$  всюду направлено по оси системы

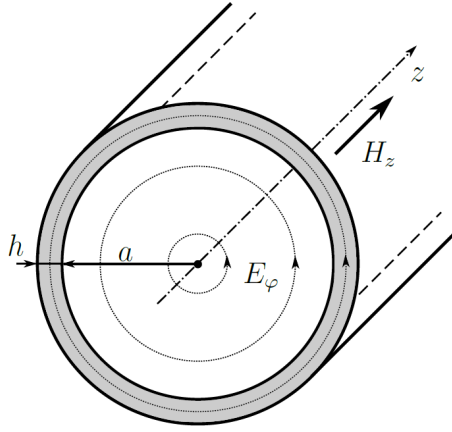


Рис. 1. Электрическое и магнитное в тонкостенном цилиндре

(ось  $z$ ), а вихревое электрическое поле  $E$  будет всюду перпендикулярно радиусу, то есть линии поля образуют соосные окружности (рис. 1). Все величины будем считать колеблющимися по гармоническому закону с некоторой частотой  $\omega$ , задаваемой частотой колебания тока в соленоиде. Тогда для ненулевых компонент поля можно записать

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, \quad E_\varphi = E(r)e^{i\omega t},$$

где  $H(r)$  и  $E(r)$  комплексные амплитуды колебаний соответствующих полей, зависящие только от расстояния  $r$  до оси системы. Заметим, что на границе тонкостенного цилиндра должны быть непрерывны касательные к поверхности компоненты как  $E$ , так и  $B$ , поэтому функции  $E(r)$  и  $H(r)$  непрерывны во всей исследуемой области.

Пусть длинный полый цилиндр имеет радиус  $a$  и толщину стенки  $h \ll a$ . Последнее условие позволяет для описания поля внутри стенки ограничиться одномерным приближением. При этом для полного решения задачи необходимо вычислить и распределение поля внутри цилиндра.

Поскольку внутри цилиндра ток отсутствует, магнитное поле там является однородным (аналогично полю внутри пустого соленоида):  $H_z(r, t) = H_1 e^{i\omega t}$ , где  $H_1 = \text{const}$  амплитуда поля на внутренней поверхности цилиндра. Для нахождения вихревого электрического поля воспользуемся законом электромагнитной индукции (л7.3) в интегральной форме:

$$E_\varphi \cdot 2\pi r = -\mu_0 \pi r^2 \cdot \frac{dH_z}{dt} \quad \rightarrow \quad E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 r \cdot i\omega H_1.$$

Отсюда получим связь амплитуд колебаний электрического и магнитного полей на внутренней ( $r = a$ ) границе цилиндра:

$$E_1 = -\frac{1}{2} i\omega a \mu_0 H_1$$

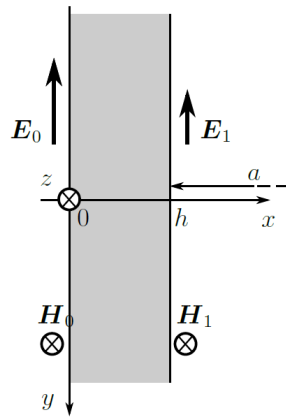


Рис. 2. Поле в стенке цилиндра

Соотношение (1) используем далее как дополнительное граничное условие для задачи о распределении поля внутри стенки. Поле внутри тонкой стенки цилиндра (экрана) описывается уравнением скин-эффекта (л7.25) (уравнением диффузии поля) в плоской геометрии (рис. 2). Поместим начало отсчёта на внешнюю поверхность цилиндра и направим ось  $x$  к оси системы, и аналогично (л7.26) запишем дифференциальное уравнение для комплексной амплитуды магнитного поля:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega\sigma\mu_0 H$$

(для медного цилиндра можно положить  $\mu \approx 1$ ). Граничные условия для (2) зададим в виде

$$H(0) = H_0, \quad H(h) = H_1.$$

Здесь  $H_0$  — амплитуда колебаний магнитного поля на внешней границе цилиндра. Её значение определяется только током в облиндра мотке соленоида, и совпадает с полем внутри соленоида в отсутствие цилиндра. Величина  $H_1$  также поддаётся непосредственному измерению это амплитуда колебаний однородного поля внутри цилиндра. Поля  $H_0$  и  $H_1$  не являются независимыми они связаны через решение уравнений поля вне проводника, т. е. внутри «экрана». Эта связь выражена соотношением (1).

Решение (2) ищем в виде

$$H(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},$$

где  $A, B$  определяемые из граничных условий константы,

$$\alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{1+i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4}$$

- один из корней уравнения (л7.28),  $\delta$  глубина скин-слоя

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0}}.$$

Заметим, что это решение немного отличается от (л7.29) : ранее мы использовали только один корень уравнения (л7.28), однако здесь мы имеем дело уже не с полупространством, а с конечной областью в виде плоского слоя  $h$ , поэтому решение должно содержать оба корня. Первое условие (3) даёт  $A + B = H_0$ , что позволяет исключить  $A$  из (4):

$$H(x) = H_0 e^{-\alpha x} + 2B \operatorname{sh} \alpha x.$$

Выразим электрическое поле из закона Ампера (л7.21). В одномерном случае

$$E(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{dH}{dx} = \frac{\alpha}{\sigma} (-H_0 e^{-\alpha x} + 2B \operatorname{ch} \alpha x).$$

Далее положим  $x = h$ , воспользуемся условием (1), и, исключив константу  $B$ , получим после преобразований связь между  $H_0$  и  $H_1$  :

$$H_1 = \frac{H_0}{\operatorname{ch} \alpha h + \frac{1}{2} \alpha a \operatorname{sh}(\alpha h)}.$$

Рассмотрим предельные случаи (7). 1. При малых частотах толщина скин-слоя превосходит толщину цилиндра  $\delta \gg h$ . Тогда  $|\alpha h| \ll 1$ , поэтому  $\operatorname{ch} \alpha h \approx 1$ ,  $\operatorname{sh} \alpha h \approx \alpha h$  и

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i \frac{ah}{\delta^2}}$$

Заметим, что величина  $ah/\delta^2$  в общем случае не мала, поскольку при  $h \ll a$  возможна ситуация  $h \ll \delta \ll a$ . Отношение модулей амплитуд здесь будет равно

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}}.$$

При этом колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол  $\psi$ , определяемый равенством

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{ah}{\delta^2}.$$

2. При достаточно больших частотах толщина скин-слоя станет меньше толщины стенки:  $\delta \ll h$ . Тогда  $|\alpha h| \gg 1$  и  $|\alpha a| \gg 1$ , а также  $\operatorname{sh}(\alpha h) \approx \operatorname{ch}(\alpha h) \approx \frac{1}{2} e^{\alpha h}$ . Выражение

(7) с учётом (5) переходит в

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{\alpha a} e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}} e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta})}.$$

Как видно из формулы (11), в этом пределе поле внутри цилиндра по модулю в  $\frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-h/\delta}$  раз меньше, чем снаружи, и, кроме того, запаздывает по фазе на

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}}.$$

На рис. 3 схематично изображено распределение магнитного поля от координаты в двух рассмотренных предельных случаях.

## 4 Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки для исследования скин-эффекта в полом цилиндре изображена на рис. 4.

Переменное магнитное поле создается с помощью соленоида 1, намотанного на цилиндрический каркас 2 из поливинилхлорида, который подключается к генератору сигналов (ЗГ) АКИП-3420 (канал А). Внутри каркаса расположен медный экран 3 в виде полого цилиндра (актуальные параметры экрана указаны на установке).

Действующее значение переменного тока в цепи соленоида измеряется цифровым амперметром «А». Действующее значение переменного напряжения на измерительной катушке 4 измеряется цифровым вольтметром «V». В качестве амперметра и вольтметра используются два мультиметра GDM-8245.

Для измерения сдвига фаз между током в цепи соленоида и напряжением на измерительной катушке используется двухканальный осциллограф GOS-620 (ΘO). На канал «Y» осциллографа подается напряжение с измерительной катушки, а на канал «X» — напряжение с резистора R, которое пропорционально току в цепи соленоида. Схема экспериментальной установки для нахождения проводимости  $\sigma$  по изменению индуктивности катушки L изображена на рис. 5. RLC-метр, измеряющий индуктивность, подключается к катушке 1 через клеммы 5 и 6 на панели установки. Другие приборы при этом должны быть отсоединены от цепи, т.к. RLC-метр измеряет индуктивность активным образом.

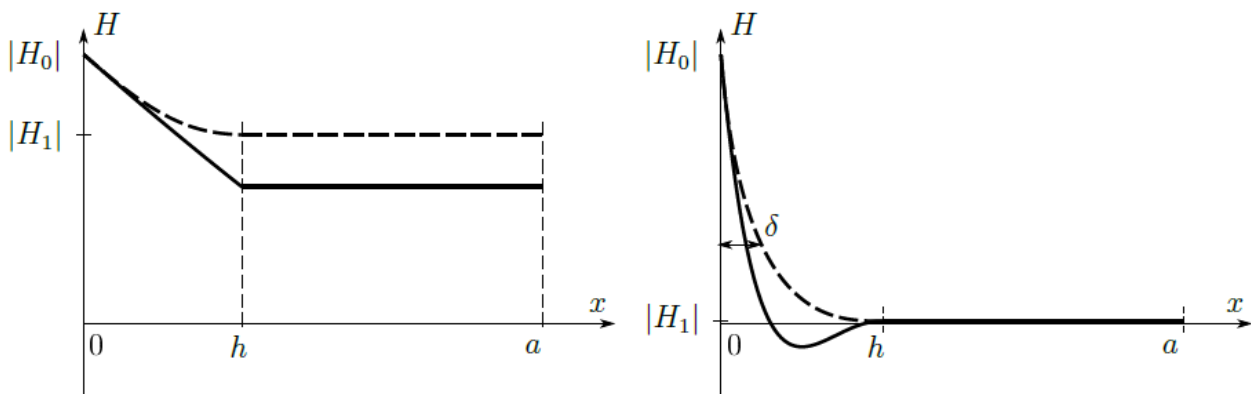


Рис. 3. Распределение амплитуды колебаний магнитного поля (пунктир) и его мгновенного значения при некотором  $t$  (сплошная) в зависимости от расстояния до внешней стенки цилиндра. Слева случай низких частот ( $\delta \gg h$ ), справа — скин-эффект при высоких частотах ( $\delta \ll h$ )

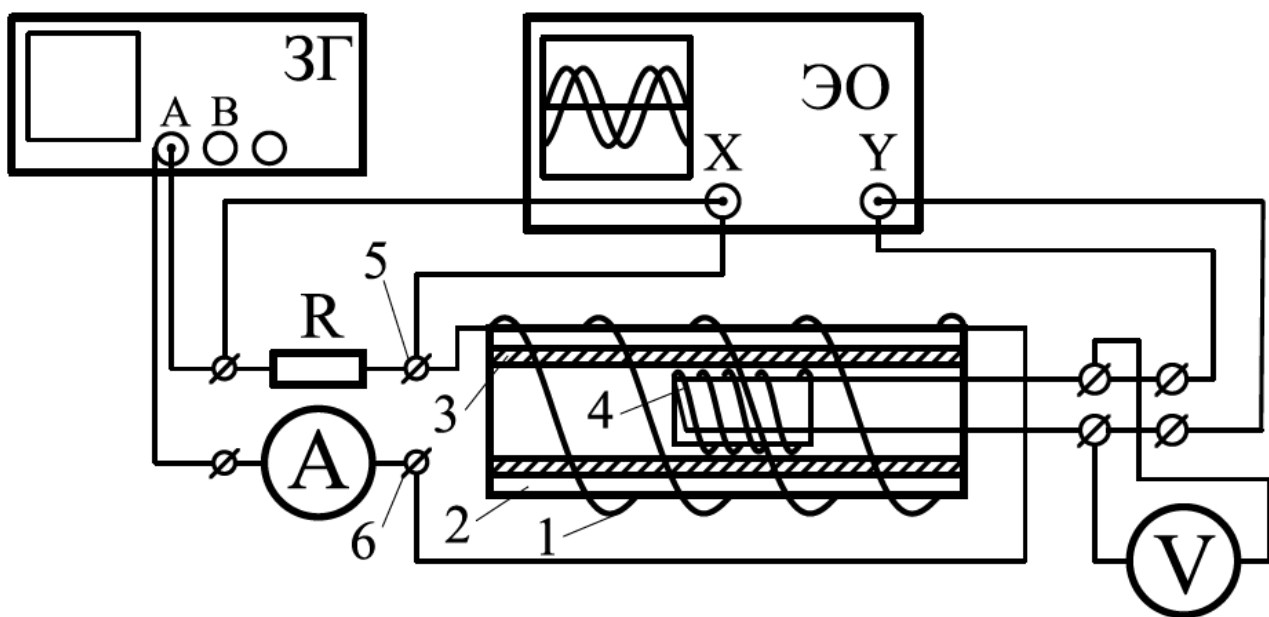


Рис. 4. Экспериментальная установка для изучения скин-эффекта

## 5 Измерение отношения амплитуд магнитного поля внутри и вне экрана

С помощью вольтметра  $V$  измеряется действующее значение ЭДС индукции, которая возникает в измерительной катушке, находящейся в переменном магнитном поле  $H_1 e^{i\omega t}$ . Комплексная амплитуда ЭДС индукции в измерительной катушке равна

$$U = -SN \frac{dB_1(t)}{dt} = -i\omega\mu_0 SN H_1 e^{i\omega t}$$

где  $SN$  - произведение площади витка на число витков измерительной катушки.

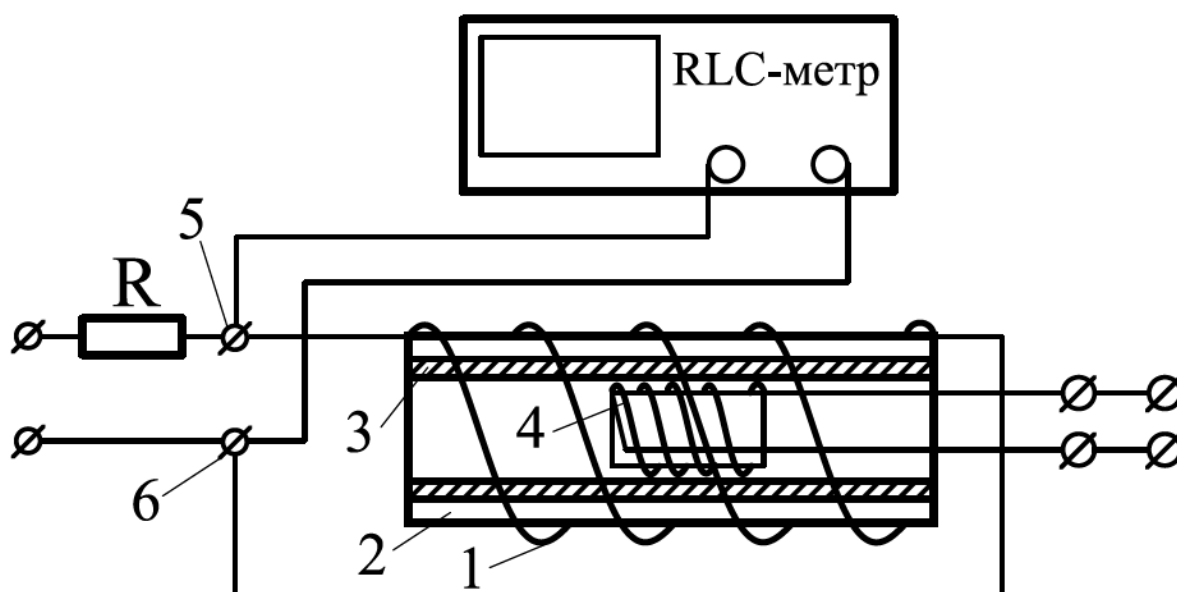


Рис. 5. Схема подключения RLC-метра

Показания вольтметра, измеряющего это напряжение:

$$U = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}} \mu_0 |H_1|.$$

Видно, что модуль амплитуды магнитного поля внутри экрана  $|H_1|$  пропорционален  $U$  и обратно пропорционален частоте сигнала  $\nu = \omega/2\pi$

$$|H_1| \propto \frac{U}{\nu}.$$

При этом поле вне экрана  $|H_0|$  пропорционально току  $I$  в цепи соленоидов, измеряемому амперметром  $A$  :

$$|H_0| \propto I.$$

Следовательно,

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \text{const} \cdot \frac{U}{\nu I}$$

Таким образом, отношение амплитуд магнитных полей снаружи и вне экрана (коэффициент ослабления) может быть измерено по отношению  $U/\nu I$  ири разных частотах. Неизвестная константа в соотношении (13) может быть определена по измерениям при малых частотах  $\nu \rightarrow 0$ , когда согласно (9)  $|H_1|/|H_0| \rightarrow 1$ .

## 6 Определение проводимости материала экрана по фазовому сдвигу

В установке в качестве экрана используется медная труба промышленного производства. Технология изготовления труб оказывает заметное влияние на электропроводимость. Из-за наличия примесей проводимость меди нашей трубы отличается от табличного значения (в меньшую сторону). Для определения  $\sigma$  нашего экрана предлагается использовать экран при низких частотах и зависимость (12) - при высоких частотах.

Из формул (10) и (6) следует линейная зависимость  $\operatorname{tg}(\psi)$  от  $\nu$ , причем аппроксимирующая прямая должна проходить через начало координат.

Как видно из выражения (12), в области больших частот  $\nu \gg 1/(\pi h^2 \sigma \mu_0)$  зависимость  $(\psi(\sqrt{\nu}) - \pi/4)$  аппроксимируется прямой, проходящей через начало координат. По наклону этих прямых можно вычислить проводимость материала экрана. 8 Процедура измерения разности фаз с помощью осциллографа подробно описана в Приложении Г. Заметим, что на схеме, изображённой на рис. 4 на входной канал У осциллографа подаётся сигнал с измерительной катушки, который индуцирован не только внутри экрана, а его производной по времени, а это означает, что появляется дополнительный сдвиг по фазе будет на  $\pi/2$  больше фазового сдвига между магнитными полями вне и внутри экрана:

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$$

## 7 Влияние скин-эффекта на индуктивность катушки

Из-за скин-эффекта индуктивность соленоида с медным цилиндрическим экраном внутри будет зависеть от частоты тока. На высоких частотах магнитное поле не проникает внутрь соленоида (за экран), поэтому суммарный магнитный поток, индуцирующий катушку, уменьшается, и, соответственно, уменьшается и индуктивность. При низких частотах когда толщина скин-слоя  $\delta$  больше толщины медного экрана  $h$ , магнитное поле проникает внутрь катушки, однако его амплитуда падает (по формуле (9)) и возникает разность фаз между колебаниями поля за экраном и перед ним (по формуле (10)). Из-за чего также изменяется магнитный поток, а следовательно - и индуктивность.

Рассмотрим магнитный поток через катушку как сумму двух магнитных потоков: 1) пронизывающий область за экраном  $\Phi_{\text{in}}$  :

$$\Phi = \Phi_{\text{out}} + \Phi_{\text{in}} = H_0 S_0 + H_1 S_1 = LI,$$



где  $H_0, H_1$  – мгновенные значения магнитного поля внутри и снаружи цилиндра при данном токе  $I$ ;  $S_0, S_1$  – площади внешней и внутренней (по отношению к цилиндрическому экрану) областей соответственно.

Очевидно, что минимальная индуктивность будет в случае, когда  $\Phi_{in} = 0$  (поле есть только во внешней области). При этом  $L_{min}$  не зависит от частоты:

$$L_{min} = \frac{\Phi_{out}}{I}.$$

Выразим поток магнитного поля сквозь внутреннюю область  $\Phi_{in}$  через поток сквозь внешнюю  $\Phi_{out}$  при произвольном переменном токе  $I$ :

$$\Phi_{in} = H_1 S_1 = \frac{H_1 S_1}{H_0 S_0} \Phi_{out} = \frac{\Phi_{out}}{n} \frac{S_1}{S_0}$$

где коэффициент  $n$ , характеризующий ослабление поля за экраном, равен:

$$n = \frac{H_0}{H_1} = \frac{|H_0|}{|H_1|} \frac{1}{\cos \psi},$$

Максимальная индуктивность катушки достигается при максимальном потоке поля во внутренней области (когда  $H_0 = H_1$ ):

$$\Phi_{max} = \Phi_{out} + \Phi_{in\ max} = H_0 (S_0 + S_1) = L_{max} I_m,$$

где поток через внешнюю область равен  $H_0 S_0 = L_{min} I_m$ . Откуда получим отношение площадей областей:

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{L_{max} - L_{min}}{L_{min}}.$$

Суммируя всё вышесказанное

$$L = L_{min} + \frac{L_{max} - L_{min}}{n}.$$

Используя формулы (9, 10, 6) окончательно получаем зависимость индуктивности катушки от частоты:

$$\frac{L_{max} - L}{L - L_{min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2.$$

Данная зависимость может быть аппроксимирована прямой, по углу наклона которой можно найти проводимость материала экрана  $\sigma$

## 8 Измерения, Обработка

Внутренний диаметр катушки составляет 45 мм, толщина - 1.5 мм.

1) Частота  $\nu_h$  составляет

$$\nu_h = \frac{2}{\delta^2 \sigma \mu_0} = 2.25 \text{ кГц}$$

2-5) Запустим установку и произведем изменения во всех указанных диапазонах, сводя все данные в единую электронную таблицу

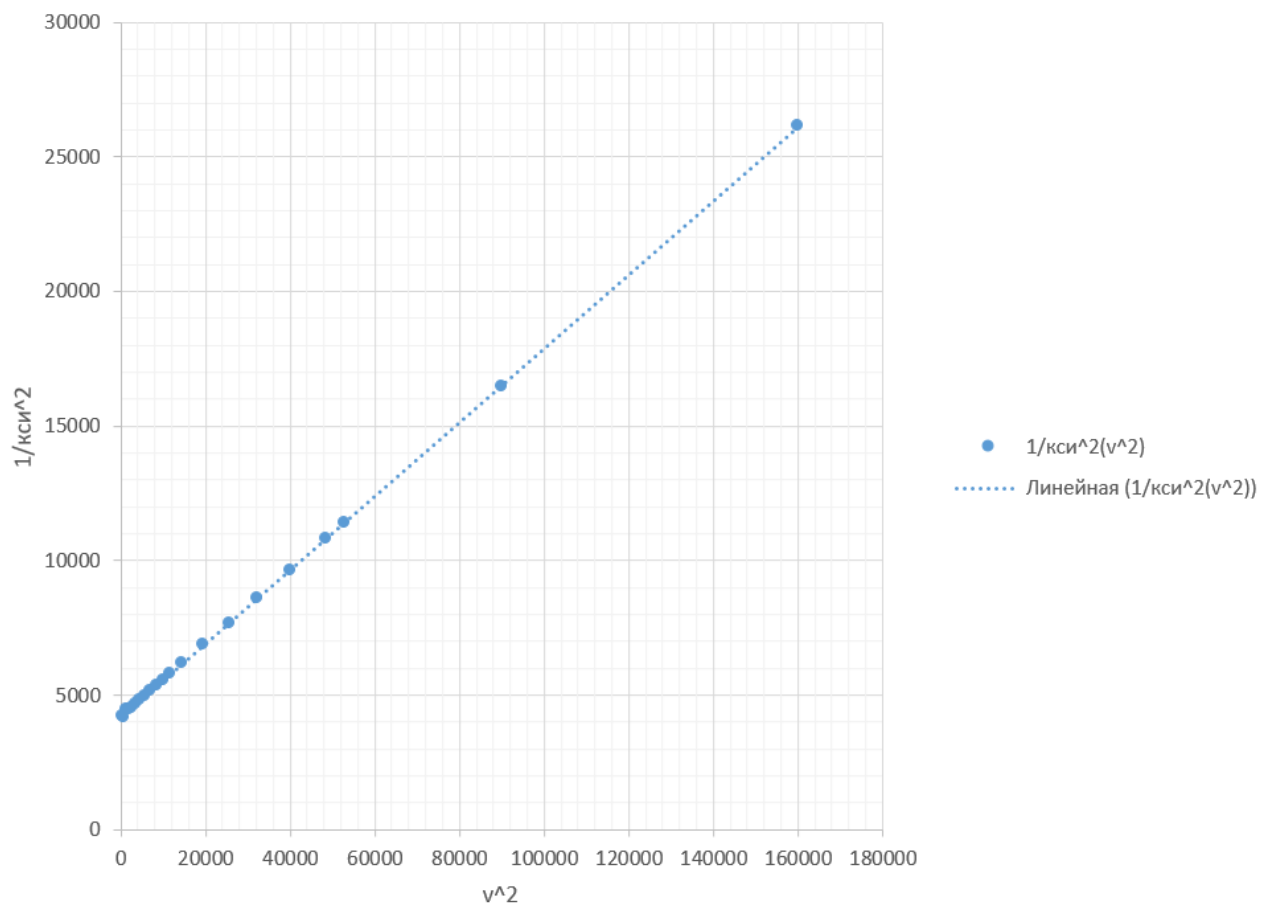
7) В области частот  $\nu \ll \nu_h$   $\alpha h \ll 1$ , и из (7) получаем

$$(c\xi)^2 \approx \frac{1}{1 + A\nu^2}$$

или, эквивалентно

$$\frac{1}{\xi^2} = B\nu^2 + c^2 \text{ где } B = \pi a h \sigma \mu_0 c$$

$$\frac{1}{\xi^2}(\nu^2)$$



Найдем угловые коэффициенты прямых для каждой установки по МНК.

$$a = \frac{\langle x_i y_i \rangle - \langle x \rangle \langle y_i \rangle}{\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2}$$

$$b = \langle v_i \rangle - a \langle N_i \rangle$$

Также рассчитаем их погрешности

$$S_a^2 = \frac{\langle x_i^2 \rangle}{\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2} \cdot \frac{\langle b_i - b \rangle^2}{n - 2}$$

$$y = (a \pm S_a) + (b \pm S_b) \cdot x = (4183 \pm 11) + (0.13708 \pm 0.00023) \cdot x$$

Зависимость линейная

Коэффициент пропорциональности

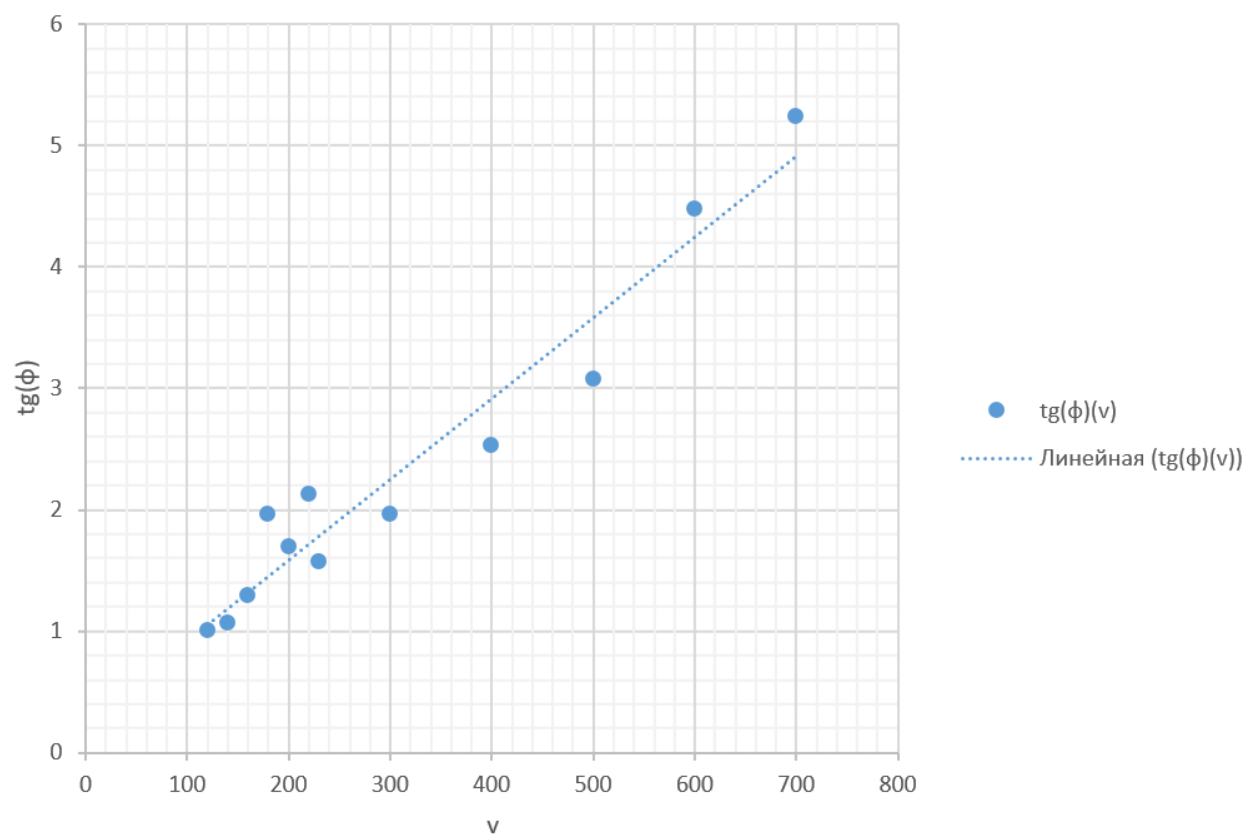
$$\xi_0[|H_1/H_0| = 1] = \frac{1}{\sqrt{a}} = 0.1546 \pm 0.0002$$

Проводимость

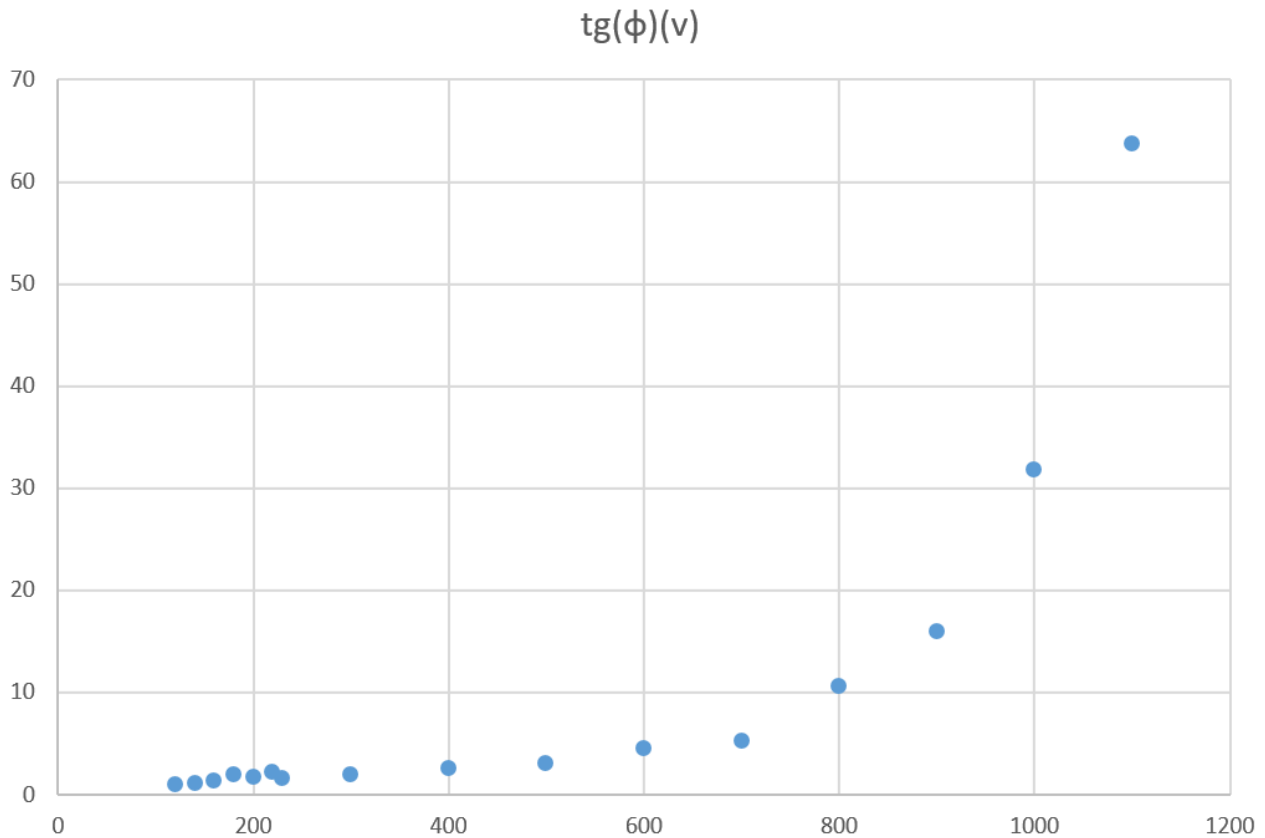
$$\sigma = \frac{B}{\pi a h \mu_0 c} = (51.70 \pm 0.16) \cdot 10^6 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

8) Зависимость фазового сдвига от частоты

а) Линейная часть



б) Нелинейная часть



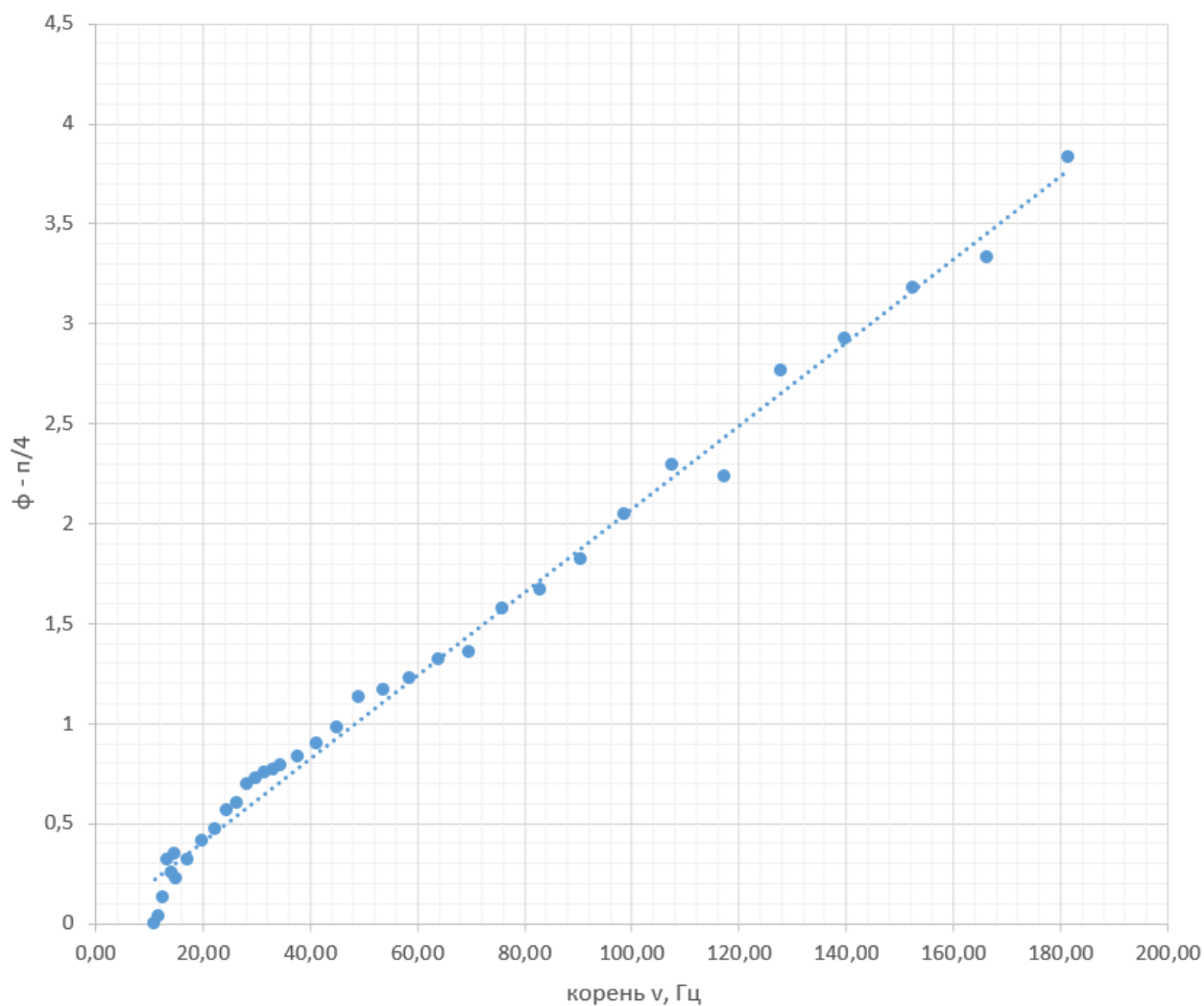
Линеаризация для первого графика

$$y = (a \pm S_a) + (b \pm S_b) \cdot x = (0.25 \pm 0.19) + (0.00666 \pm 0.00053) \cdot x$$

Тогда поскольку  $\tan(\psi) = k \cdot \nu$ ,  $k = \pi a h \sigma \mu_0$ , то проводимость

$$\sigma = \frac{b}{\pi a h \mu_0} = (50 \pm 4) \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

9) График зависимости  $\psi - \pi/4(\sqrt{\nu})$  для высоких частот



Зависимость, начиная с частоты  $\nu \approx \nu_h$  - линейная.

Линеаризация дает

$$y = (a \pm S_a) + (b \pm S_b) \cdot x = (0.025 \pm 0.048) + (0.02045 \pm 0.00045) \cdot x$$

По формуле  $\psi - \pi/4 = k\sqrt{\nu}$ ,  $k = h\sqrt{\pi\mu_0\sigma}$

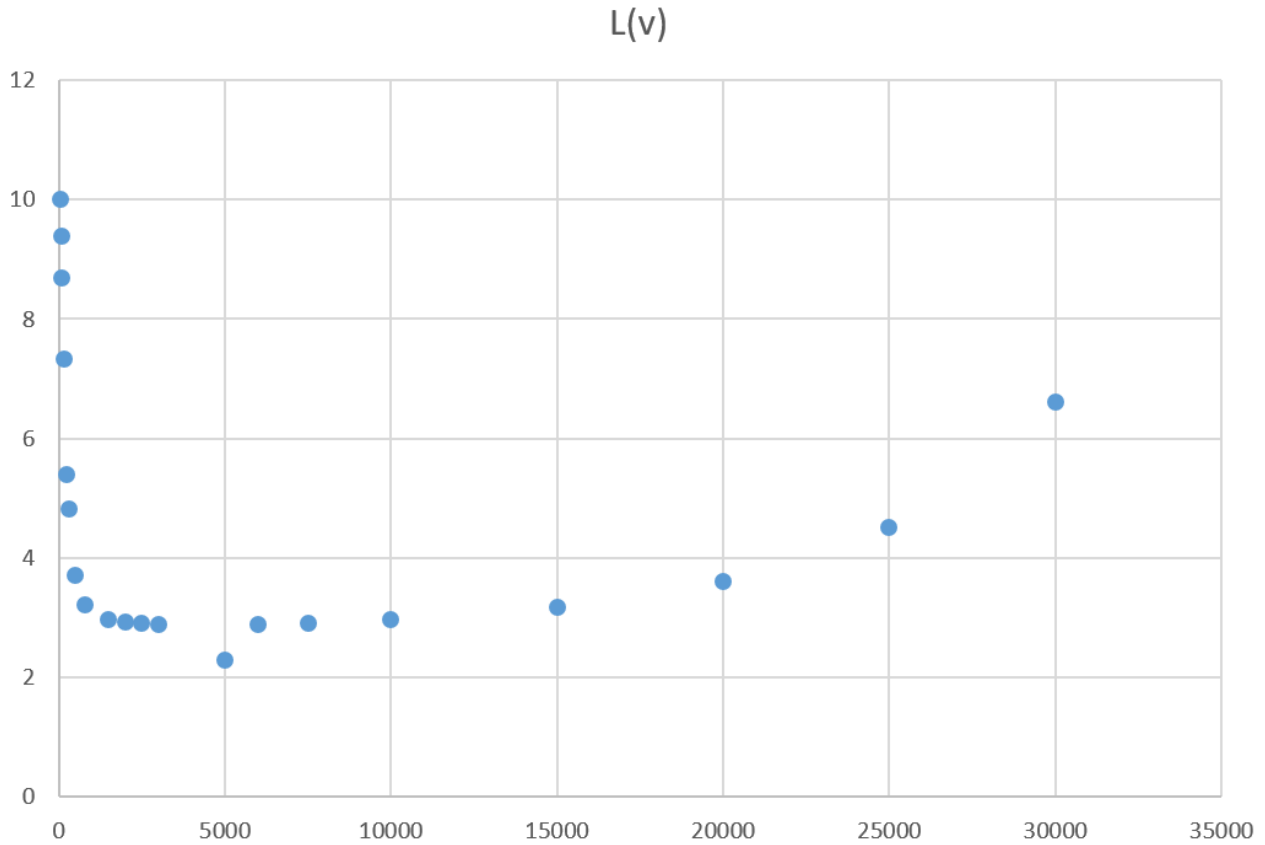
Из графика проводимость

$$\sigma = \frac{b^2}{\pi h^2 \mu_0} = (4.7 \pm 0.2) \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

10) Зависимость индуктивности от частоты

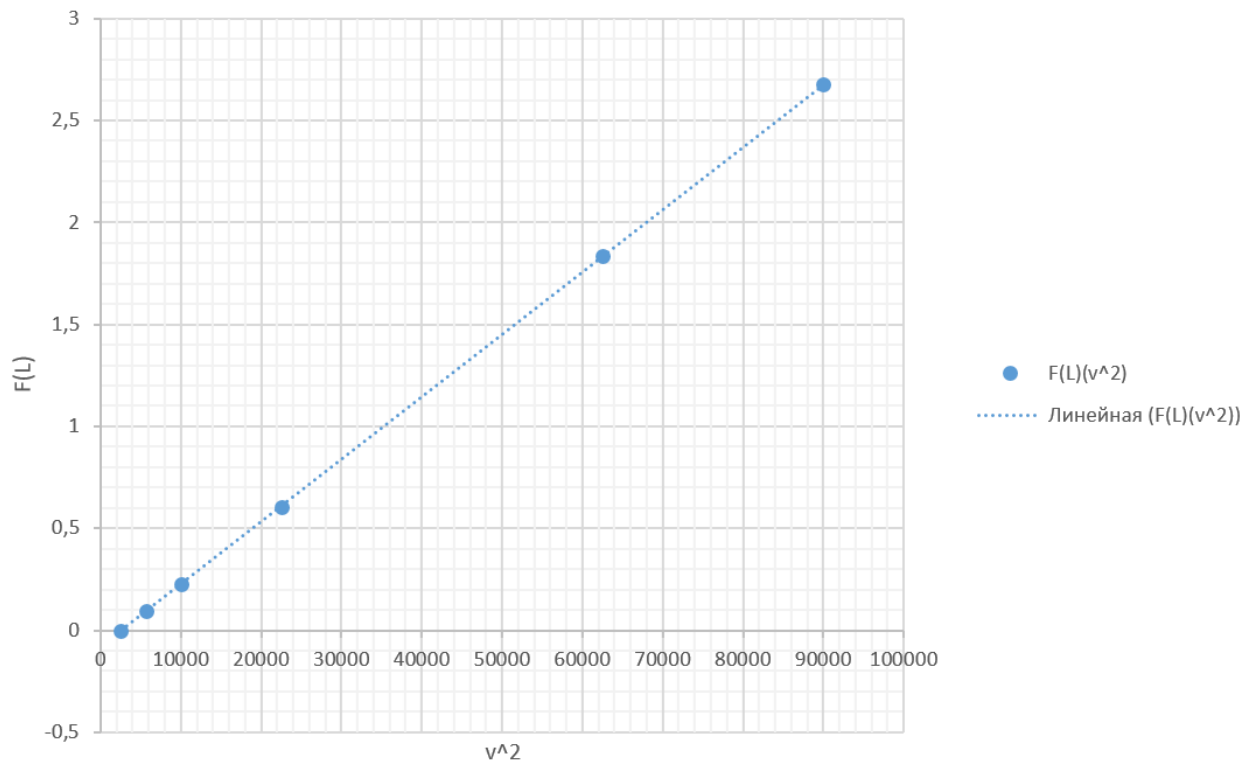
$$\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2.$$

Построим график зависимости  $L(\nu)$



Максимальная индуктивность  $L_{max} = 10.013$  мГн, а минимальная  $L_{min} = 2.895$  мГн.

Построим график зависимости  $\frac{L_{max}-L}{L-L_{min}}(\nu^2)$  при малых частотах



Линеаризация

$$y = (a \pm S_a) + (b \pm S_b) \cdot x = (-0.0785 \pm 0.0015) + (0.000030614 \pm 3.2e - 8) \cdot x$$

Проводимость составляет

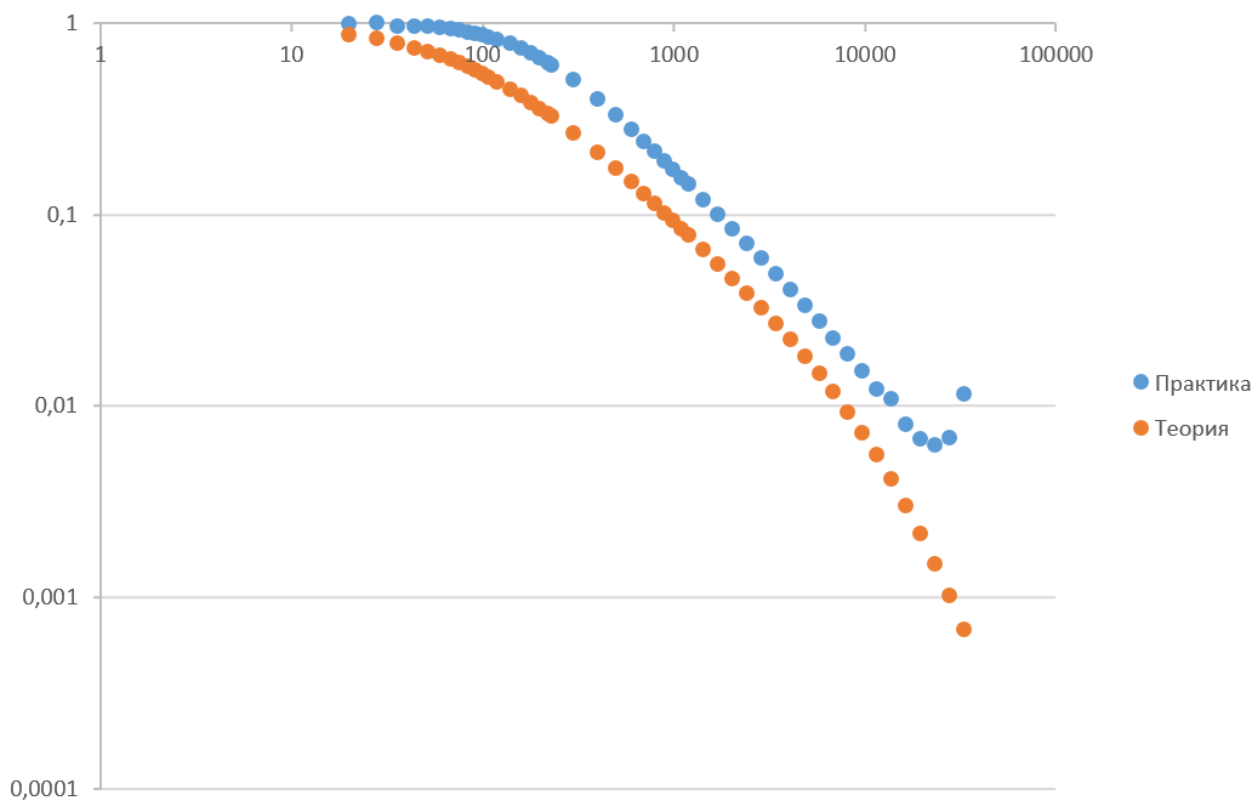
$$\sigma = \frac{\sqrt{b}}{\pi a h \mu_0} = (41.53 \pm 0.02) \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

11) Сведем проводимости в таблицу

Метод измерения	$\sigma, 10^7 \text{См/м}$	$\Delta\sigma, 10^7 \text{См/м}$	$\varepsilon_\sigma$
Отношение амплитуд	5.170	0.016	0.31%
Разности фаз (низкие частоты)	5.0	0.4	8%
Разности фаз (высокие частоты)	4.7	0.2	4.3%
Индуктивность	4.153	0.002	0.0048%

Таблица 1: Сравнение результатов различных методов

Приведу также отношение  $\frac{H_1}{H_0}$



## 9 Вывод

Теоретическая зависимость довольно хорошо совпадает с практической. Отклонения на начале и конце зависимостей друг от друга обусловлены неточностью теорети-



ческой модели, в результате которой качественно поведение при экстремальных частотах отличается.

## **10 Ресурсы**

Расчет по МНК: метод-наименьших-квадратов.рф