

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра радиотехники и систем управления

ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

Методические указания к лабораторной работе
по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы*

Составители: *A. A. Григорьев*
I. B. Филатов

МОСКВА
МФТИ
2020

УДК 621.396.6(075)

ББК 32.845.8

Д51

Р е ц е н з е н т

Кандидат технических наук *А. Л. Ларин*

Д51 **Длинные линии:** методические указания к лабораторной работе по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы» / сост. А. А. Григорьев, И. В. Филатов. – Москва: МФТИ, 2020. – 32 с.

Исследуются длинные линии. Наблюдаемые в них физические явления требуют привлечения моделей с распределенными параметрами.

В концептуальном плане акцент сделан на использование устоявшихся в микроволновой технике волновых параметров рассеяния – амплитуд бегущих в противоположных направлениях волн, связанных коэффициентом отражения.

Знакомство с этими категориями логически приводит к общепринятому описанию микроволновых систем матрицами рассеяния.

Будет полезно для студентов, изучающих теорию электрических цепей, а также для преподавателей.

УДК 621.396.6(075)

ББК 32.845.8

Содержание

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1. | Введение | 4 |
| 2. | Телеграфные уравнения | 4 |
| 3. | Волновые параметры | 6 |
| 4. | Гармонические волны | 8 |
| 5. | Несколько слов о коэффициенте отражения | 10 |
| 6. | Стоячая волна | 12 |
| 7. | Нагруженная линия | 13 |
| 8. | Подключаем источник | 16 |
| 9. | Переходные процессы в длинной линии | 19 |
| 10. | Емкостная нагрузка | 23 |
| 11. | Матрица рассеяния (S-матрица) | 24 |
| 12. | Задание | 27 |
| 12.1. | Измерение параметров линии | 27 |
| 12.2. | Исследование переходных процессов | 29 |

1. Введение

В простых моделях электрических цепей – моделях с *сосредоточенными параметрами* – переменные состояния (напряжения $U(t)$ и токи $I(t)$) зависят только от времени t . Пространственные координаты игнорируются. Строго говоря, такая модель предполагает, что вся рассматриваемая цепь геометрически сосредоточена в одной точке пространства, так что вести речь о временных задержках, связанных с конечностью скорости распространения электромагнитных полей из одной точки в другую, не имеет смысла.

Модели с сосредоточенными параметрами становятся заведомо неадекватными на коротких временных интервалах, сопоставимых с временами распространения электромагнитного взаимодействия между геометрически удаленными точками цепи. На смену им приходят модели с *распределенными параметрами*, которые учитывают зависимость переменных $U(r, t)$ и $I(r, t)$ также и от пространственной координаты r .

В работе исследуется физическая длинная линия – кусок коаксиального кабеля. Эта система описывается относительно простой одномерной моделью с распределенными параметрами, в которой переменные $U(x, t)$ и $I(x, t)$ зависят от единственной пространственной координаты x , направленной вдоль линии. Та же модель применима для пары параллельных проводников, витой пары, или полосковой линии на печатной плате.

2. Телеграфные уравнения

В обсуждаемой модели свойства длинной линии характеризуются набором из четырех «погонных» (отнесенных к единице длины) параметров: L – индуктивность на метр, R – омическое сопротивление проводников на метр, C – емкость между проводниками на метр и G – проводимость изоляции на метр.

Падение напряжения U на фрагменте линии на рис. 1 от сечения x до сечения $x + dx$ вызвано протеканием тока I через сопротивление $R dx$ и индуктивность $L dx$:

$$-dU(x, t) = U(x, t) - U(x + dx, t) = (L dx) \frac{dI(x, t)}{dt} + (R dx)I(x, t).$$

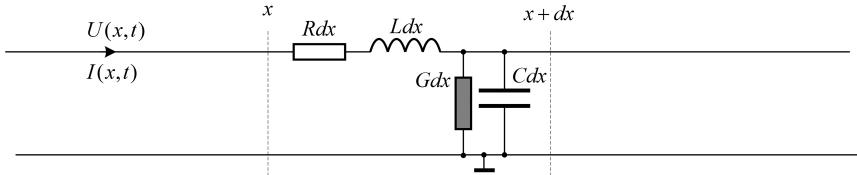


Рис. 1. Фрагмент длинной линии

В свою очередь, падение тока на этом фрагменте вызвано его утечкой через проводимость $G \, dx$ и емкость $C \, dx$:

$$-dI(x, t) = I(x, t) - I(x + dx, t) = (C \, dx) \frac{dU(x, t)}{dt} + (G \, dx)U(x, t).$$

Результатом становятся известные телеграфные уравнения для полей напряжения $U(x, t)$ и тока $I(x, t)$ вдоль линии:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} &= L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + RI(x, t), \\ -\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} &= C \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + GU(x, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Характерные комбинации погонных параметров L, C, R, G дают начало ряду важных обобщенных параметров длинной линии.

Параметр $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (в метрах в секунду) имеет смысл скорости распространения волн вдоль линии. Параметр $w = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (в омах) – это волновое сопротивление линии.

Параметры $\delta_L = \frac{R}{L}$ и $\delta_C = \frac{G}{C}$ (в обратных секундах) характеризуют скорости затухания волн во времени. Наконец, параметры $\beta_L = \frac{\delta_L}{v} = \frac{R}{w}$ и $\beta_C = \frac{\delta_C}{v} = Gw$ (в обратных метрах) – скорости затухания волн в пространстве – вдоль оси x .

Далее будут обсуждаться исключительно длинные линии, удовлетворяющие условию Хевисайда:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad \Rightarrow \quad \beta_L = \beta_C = \beta = \frac{R}{w} = Gw.$$

При выполнении этого условия линия оказывается линией без дисперсии – скорость распространения гармонической волны в ней составляет $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и не зависит от частоты.

При выполнении условия Хевисайда переход к обобщенным параметрам в телеграфных уравнениях (1) приводит их к следующей приятной на вид форме:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = -\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right) w I(x, t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w I(x, t)}{\partial x} = -\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right) U(x, t),$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad w = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \beta = \frac{R}{w} = Gw.$$

3. Волновые параметры

Система из двух уравнений (2), связывающих между собой поля напряжения $U(x, t)$ и тока $I(x, t)$, расщепляется на два независимых уравнения переходом к параметрам

$$A(x, t) = \frac{U(x, t) + w I(x, t)}{2}; \quad B(x, t) = \frac{U(x, t) - w I(x, t)}{2}.$$

Сложение и вычитание левых и правых частей (2) дает пару независимых уравнений

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial x} = -\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right) A(x, t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = +\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right) B(x, t)$$

с почти очевидными решениями:

$$A(x, t) = e^{-\beta x} \tilde{A}(x - vt),$$

$$B(x, t) = e^{+\beta x} \tilde{B}(x + vt),$$

где $\tilde{A}(u)$ и $\tilde{B}(u)$ произвольные дифференцируемые по своему аргументу u функции.

Решения $A(x, t)$ и $B(x, t)$ – это бегущие вдоль линии волны. $A(x, t)$ описывает падающую волну, которая бежит со скоростью v в положительном направлении оси x , затухая по дороге по закону $e^{-\beta x}$. Аналогично $B(x, t)$ – это отраженная волна, которая бежит и затухает в противоположном направлении.

Параметры рассеяния $A(x, t)$ и $B(x, t)$ – это амплитуды падающей и отраженной волн в точке (x, t) пространства-времени.

Пусть в линии присутствует только падающая волна $A(x, t)$, то есть $B(x, t) = \frac{U(x, t) - wI(x, t)}{2} = 0$. Из равенства нулю амплитуды отраженной волны $B(x, t)$ вытекает:

$$U(x, t) = wI(x, t).$$

А это означает, что поля напряжения и тока в падающей волне $A(x, t)$ связаны через волновое сопротивление законом Ома, а сама амплитуда этой волны – это одновременно и напряжение в ней, и произведение тока на волновое сопротивление:

$$A(x, t) = \frac{U(x, t) + wI(x, t)}{2} = U(x, t) = wI(x, t).$$

При наличии только отраженной волны, когда $A(x, t) = \frac{U(x, t) + wI(x, t)}{2} = 0$, аналогичные связи отличаются только знаком:

$$U(x, t) = -wI(x, t),$$

$$B(x, t) = \frac{U(x, t) - wI(x, t)}{2} = U(x, t) = -wI(x, t).$$

В обоих типах волн направление тока совпадает с направлением распространения.

В общем случае в линии могут параллельно существовать как падающая волна $A(x, t)$, так и отраженная $B(x, t)$. Напряжение на линии оказывается тогда суммой напряжений в падающей и отраженной волнах:

$$U(x, t) = A(x, t) + B(x, t),$$

а ток – разностью токов в них:

$$I(x, t) = \frac{A(x, t) - B(x, t)}{w}.$$

Переход к параметрам рассеяния позволяет однозначно разделить наблюдаемое на линии напряжение $U(x, t)$ на части $A(x, t)$ и $B(x, t)$, имеющие смысл напряжений в падающей и отраженной волнах.

В присутствии обеих волн простая связь между напряжением и током в линии теряется:

$$R(x, t) = \frac{U(x, t)}{I(x, t)} = w \frac{A(x, t) + B(x, t)}{A(x, t) - B(x, t)} = w \frac{1 + \rho(x, t)}{1 - \rho(x, t)}.$$

Параметр

$$\rho(x, t) = \frac{B(x, t)}{A(x, t)} = \frac{R(x, t) - w}{R(x, t) + w},$$

определяющий отношение амплитуд отраженной и падающей волн в точке (x, t) – это коэффициент отражения.

Замечательно, что мгновенная мощность в линии

$$P(x, t) = U(x, t)I(x, t) = \frac{A^2(x, t)}{w} - \frac{B^2(x, t)}{w} = \frac{A^2(x, t)}{w}(1 - \rho^2)$$

оказывается разностью мощностей $\frac{A^2(x, t)}{w}$ и $\frac{B^2(x, t)}{w}$, независимо переносимых падающей и отраженной волнами в противоположных направлениях.

4. Гармонические волны

Будем рассматривать гармонические волны, колеблющиеся во времени по закону $e^{j\omega t}$ с частотой ω . Для этого положим

$$A(x, t) = a(x)e^{j\omega t}, \quad B(x, t) = b(x)e^{j\omega t}.$$

Здесь $a(x) = |a|e^{j\varphi_a}$ и $b(x) = |b|e^{j\varphi_b}$ – это комплексные амплитуды волн. Их модули $|a|$, $|b|$ определяют амплитуды гармонических колебаний в точке x , а аргументы φ_a , φ_b – фазы этих колебаний.

Подставив это в (3), придем к уравнениям для комплексных амплитуд волн:

$$\frac{da(x)}{dx} = -\gamma a(x), \quad \frac{db(x)}{dx} = +\gamma b(x),$$

где

$$\gamma = j\frac{\omega}{v} + \beta = jk + \beta \quad - \quad \text{комплексная постоянная распространения.}$$

Их общие решения имеют вид

$$a(x) = a(0)e^{-\gamma x} = a(0)e^{-jkx}e^{-\beta x}, \quad b(x) = b(0)e^{+\gamma x} = b(0)e^{+jkx}e^{+\beta x}$$

с произвольными постоянными $a(0)$, $b(0)$.

Гармонические во времени волны оказываются также и гармоническими в пространстве. Амплитуда волны a совершает гармонические колебания вдоль оси x по закону e^{-jkx} и затухает как $e^{-\beta x}$. С волной b все то же самое, только в противоположном направлении.

Параметр $k = \frac{\omega}{v}$ (в обратных метрах) известен как *волновое число – пространственная частота*. Амплитуда волны совершает в пространстве одно полное колебание на длине λ , такой, что $k\lambda = 2\pi$. Так что длина волны связана с волновым числом как

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f}, \quad \text{где } \omega = 2\pi f.$$

Таким образом, в линии существуют падающая a и отраженная b гармонические волны, комплексные амплитуды которых изменяются вдоль линии по универсальному закону $e^{-\gamma x}$, если под x понимать величину перемещения вдоль оси x в направлении распространения волны.

Комплексная амплитуда напряжения оказывается при этом равной сумме амплитуд волн

$$u(x) = a(x) + b(x),$$

а комплексная амплитуда тока – разностью

$$i(x) = \frac{a(x) - b(x)}{w}.$$

Ситуацию в сечении x линии можно описывать как классически – комплексными амплитудами напряжения u , тока i и их отношением – импедансом $Z = \frac{u}{i}$, так и волновыми параметрами (параметрами рассеяния) – амплитудами бегущих волн a , b и коэффициентом отражения $\varrho = \frac{b}{a}$. Переходы от одного описания к другому – это просто линейные преобразования между пространствами (u, i) и (a, b) :

$$a = \frac{u + wi}{2}, \quad b = \frac{u - wi}{2}, \quad \varrho = \frac{b}{a} = \frac{Z - w}{Z + w};$$

$$u = a + b, \quad iw = a - b, \quad Z = \frac{u}{i} = w \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho}.$$

Описание параметрами рассеяния удобно тем, что оно выделяет бегущие волны как самостоятельные физические феномены. При работе с напряжениям-токами все перемешивается.

К тому же, через параметры рассеяния просто выражается передающаяся по линии активная мощность P . Как известно, эта мощность может быть найдена через комплексные амплитуды напряжения и тока как $P = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(ui^*)$, где $*$ – знак комплексного сопряжения. Но

$$wui^* = (a+b)(a^*-b^*) = |a|^2 - |b|^2 + ba^* - ab^* = |a|^2 - |b|^2 + [ba^* - (ba^*)^*].$$

Последнее слагаемое в квадратных скобках чисто мнимо – разность между числом ba^* и его комплексным сопряжением. Поэтому:

$$P = \frac{\operatorname{Re}(ui^*)}{2} = \frac{|a|^2}{2w} - \frac{|b|^2}{2w} = \frac{|a|^2}{2w}(1 - |\rho|^2).$$

Таким образом, $P_a = \frac{|a|^2}{2w}$ – это активная мощность, переносимая падающей волной, $P_b = \frac{|b|^2}{2w}$ – мощность в отраженной волне, а $|\rho|^2$ – коэффициент отражения мощности.

В микроволновой технике выражена тенденция к переходу от измерения напряжений и токов к измерению мощностей. Для обозначения параметра $\tilde{a} = a/\sqrt{w}$ используют термин *амплитуда падающей мощности*. Соответственно, параметр $\tilde{b} = b/\sqrt{w}$ называют *амплитудой отраженной мощности*. Обе эти амплитуды комплексны, а физический смысл мощностей имеют квадраты их модулей: $P_a = |\tilde{a}|^2/2$, $P_b = |\tilde{b}|^2/2$.

5. Несколько слов о коэффициенте отражения

При работе с волновыми параметрами безразмерный коэффициент отражения $\rho = \frac{Z-w}{Z+w}$ подменяет собой импеданс Z .

Как видно из рис. 2, закон преобразования импедансов в коэффициенты отражения далеко не прост. Прежде всего, при этом преобразовании вся правая Z -полуплоскость отображается на внутренность единичного круга, причем точка $Z = w$ переходит в центр этого круга $\rho = 0$. Мнимая ось Z -плоскости – область реактивных импедансов отображается на границу круга

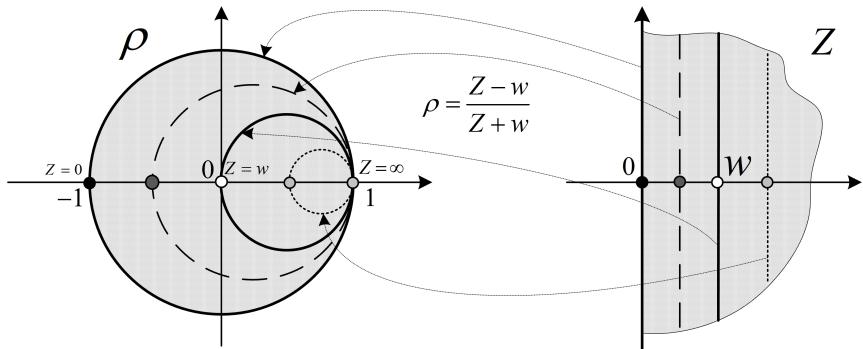


Рис. 2. Плоскости коэффициентов отражения и импедансов

– единичную окружность. Нулевому импедансу отвечает точка $\rho = -1$ на ней, бесконечному – точка $\rho = +1$. Вообще, всякая вертикальная прямая в Z -плоскости переходит в круг, проходящий через точку $\rho = +1$ – образ бесконечности. Выделен круг, проходящий также и через точку 0. Это образ прямой $\text{Re}(Z) = w$. Прямые с $\text{Re}(Z) < w$ отображаются на большие круги, содержащие выделенный круг внутри, прямые $\text{Re}(Z) > w$ – на малые круги внутри выделенного круга.

Пара наблюдений, на которые стоит обратить внимание.

Преобразование $Z' = \frac{w^2}{Z}$ ($Z'Z = w^2$) известно как *конвертирование* импеданса Z в импеданс Z' . Оно интересно тем, что переводит емкостной импеданс $Z = \frac{1}{j\omega C}$ в индуктивный $Z' = j\omega Cw^2 = j\omega L$, $L = Cw^2$. Нетрудно заметить, что конвертирование импеданса эквивалентно изменению знака коэффициента отражения:

$$\rho' = \frac{Z' - w}{Z' + w} = \frac{\frac{w^2}{Z} - w}{\frac{w^2}{Z} + w} = \frac{w - Z}{w + Z} = -\rho.$$

Преобразование *инвертирования* – изменения знака импеданса ($Z' = -Z$) – вызывает обращение коэффициента отражения: $\rho' = \frac{1}{\rho}$.

При смене направления оси x изменяются знаки токов в волнах. Это приводит к тому, что падающая волна a переходит в отраженную b , b – в a , импеданс инвертируется, а коэффициент

отражения ρ переходит в $\frac{1}{\rho}$ со значением вне единичного круга. Так что, если модуль измеренного вами коэффициента отражения превышает единицу, знайте – вы просто перепутали падающую волну с отраженной.

6. Стоячая волна

Когда обе бегущие волны присутствуют в линии одновременно, напряжение на ней

$$|u(x)| = |a(0)e^{-\gamma x} + b(0)e^{+\gamma x}| = |a(0)e^{-\beta x}e^{-jkx} + b(0)e^{+\beta x}e^{+jkx}|$$

осциллирует вдоль линии по замысловатому закону. Это явление стоячей волны – результат наложения падающей и отраженной волн.

Напряжение на линии – это модуль комплексной амплитуды напряжения $u(x)$. Амплитуда же эта является суммой двух комплексных векторов. Первый из них $-a(0)e^{-\beta x}e^{-jkx} = a(x)e^{-jkx}$ – при движении вдоль x укорачивается как $e^{-\beta x}$ и вращается по часовой стрелке, совершая один полный оборот на длине волны. Второй $-b(0)e^{+\beta x}e^{+jkx} = b(x)e^{+jkx}$ – удлиняется и вращается в противоположную сторону. Зависимость напряжения на линии от координаты x повторяет зависимость от x длины суммарного вектора. Она не является строгого гармонической.

Когда направления векторов совпадают, их длины складываются. Наблюдается максимум напряжения с величиной $|a(x)| + |b(x)|$. Это *пучность* стоячей волны. Когда же векторы направлены в противоположные стороны, их длины вычитаются. Наблюдается *узел* стоячей волны – минимум напряжения с уровнем $||a(x)| - |b(x)||$. Расстояние Δl между соседними узлами и пучностью определяется очевидным условием $k\Delta l = \frac{\pi}{2}$ и равно четверти длины волны.

В линии без потерь модули амплитуд волн $a(x)$, $b(x)$ постоянны. Отношение напряжений в пучности и узле составляет при этом $\frac{|a|+|b|}{|a|-|b|} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$. Это коэффициент стоячей волны, измеряя который судят о модуле коэффициента отражения $\rho = \frac{b}{a}$. Если линия согласована по выходу, $\rho = 0$, отраженной волны нет, напряжение вдоль линии неизменно, коэффициент стоячей волны равен 1. Чем хуже с согласованием, тем заметнее различие

между напряжениями в пучностях и узлах и выше значение коэффициента стоячей волны. При $|\rho| = 1$ (короткое замыкание или холостой ход на выходе) коэффициент стоячей волны бесконечен. Напряжения в узлах падают до нуля.

7. Нагруженная линия

Обратимся к рис. 3, на котором показана линия длиной l нагруженная на импеданс Z_l . Пусть a и b – амплитуды падающей и отраженной волн на входе линии, при $x = 0$. На выходе, при $x = l$, эти амплитуды преобразуются в $ae^{-\gamma l}$ и $be^{\gamma l}$ соответственно.

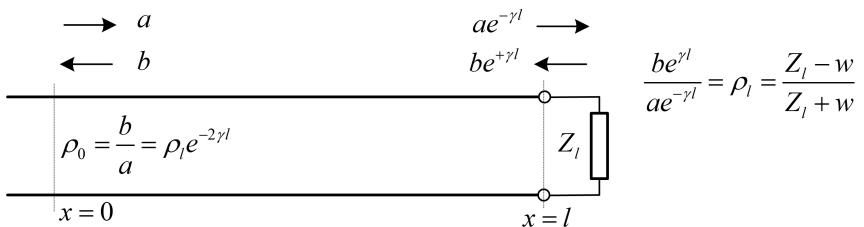


Рис. 3. Нагруженная линия

Подключение нагрузки Z_l накладывает жесткое граничное условие на соотношение между комплексными амплитудами напряжения и тока при $x = l$: $Z_l = \frac{u(l)}{i(l)}$, определяя тем самым значение коэффициента отражения от нагрузки:

$$\rho_l = \frac{Z_l - w}{Z_l + w} = \frac{be^{\gamma l}}{ae^{-\gamma l}}.$$

Для коэффициента отражения на входе, при $x = 0$, это дает

$$\rho_0 = \frac{b}{a} = \rho_l e^{-2\gamma l}.$$

Столь просто выражается зависимость коэффициента отражения от входа нагруженной линии от ее длины l .

Если линия согласована на выходе, то есть $Z_l = w$, то коэффициента отражения ρ_l равен нулю. Вместе с ним равен нулю и

коэффициент отражения ρ_0 . Так что входной импеданс согласованной линии составляет w независимо от ее длины.

Переход на выходе линии от режима короткого замыкания ($Z_l = 0; \rho_l = -1$) к режиму холостого хода ($Z_l = \infty; \rho_l = +1$) сопровождается изменением знака коэффициента отражения. Вместе с ним изменяется и знак коэффициента отражения от входа. Это вызывает конвертирование входного импеданса линии. Так что имеет место следующий общий факт:

$$Z_0|_{Z_l=0} Z_0|_{Z_l=\infty} = w^2.$$

Произведение входного импеданса линии в режиме холостого хода на входной импеданс в режиме короткого замыкания равно квадрату волнового сопротивления. Факт этот используют для экспериментального измерения волнового сопротивления линии путем измерения ее входных импедансов в двух режимах – холостого хода и короткого замыкания на выходе.

Сама же зависимость входного импеданса от длины линии оказывается совсем не простой:

$$Z_0 = w \frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} = w \frac{1 + \rho_l e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_l e^{-2\gamma l}} = w \frac{e^{+\gamma l} + \rho_l e^{-\gamma l}}{e^{+\gamma l} - \rho_l e^{-\gamma l}}.$$

Для линии без потерь ($\beta = 0, \gamma = jk$) отсюда получаются следующие выражения для входных импедансов линии в режимах короткого замыкания ($\rho_l = -1$) и холостого хода ($\rho_l = 1$):

$$Z_0|_{Z_l=0} = jw \operatorname{tg} kl, \quad Z_0|_{Z_l=\infty} = -jw \operatorname{ctg} kl.$$

Важное прикладное значение имеют четвертьволновые отрезки длинных линий с $kl = \frac{\pi}{2}$, $l = \frac{\lambda}{4}$. Такая линия преобразует коэффициент отражения от нагрузки ρ_l в коэффициент

$$\rho_0 = \rho_l e^{-2\gamma l} = \rho_l e^{-2jkl} e^{-2\beta l} = -\rho_l e^{-\beta\lambda/2}.$$

Четвертьволновая линия без потерь инвертирует знак коэффициента отражения: $\rho_0 = -\rho_l$. А это дает эффект конвертирования импедансов. Так что для четвертьволнового отрезка без потерь произведение входного импеданса на импеданс нагрузки есть квадрат волнового сопротивления:

$$Z_0 Z_l = w^2.$$

Основное применение этого явления – согласование сопротивлений. Чтобы согласовать источник с сопротивлением R_s с нагрузкой R_l следует соединить их четвертьволновым отрезком с $w = \sqrt{R_s R_l}$. Входное сопротивление $R_0 = \frac{w^2}{R_l}$ нагруженной на R_l линии как раз совпадет с сопротивлением источника R_s .

В режиме короткого замыкания на выходе входной импеданс четвертьволнового отрезка без потерь $Z_0|_{Z_l=0} = jw \operatorname{tg} kl|_{kl=\pi/2}$ формально бесконечен. При наличии потерь он ведет себя подобно резонатору – параллельному колебательному контуру с добротностью Q и резонансным сопротивлением R_0 , обладающему импедансом

$$Z(j\omega) = \frac{R_0}{1 + j2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}.$$

В самом деле, пусть ω_0 – частота, на которой линия является четвертьволновой, то есть $\frac{\omega_0 l}{v} = \frac{\pi}{2}$ или $\omega_0 = \frac{\pi v}{2l}$, а $\Delta\omega$ – отклонение от нее. Тогда

$$\gamma l = (jk + \beta)l = j\frac{\omega}{v}l + \beta l = j\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{v}l + \beta l = j\frac{\pi}{2} + j\frac{\Delta\omega}{v}l + \beta l = j\frac{\pi}{2} + \delta.$$

Малый комплексный параметр δ приводится к виду:

$$\delta = \beta l + j\frac{\Delta\omega}{v}l = \beta l + j\frac{\pi}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \beta l \left(1 + 2j\frac{\pi}{4} \frac{1}{\beta l} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) = \frac{Rl}{w} \left(1 + 2jQ \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right),$$

где $Q = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\beta l} = \frac{\pi}{4} \frac{w}{Rl}$ – добротность эквивалентного резонатора.

В режиме короткого замыкания ($\rho_l = -1$) для входного импеданса получается

$$Z_0 = w \frac{e^{+\gamma l} + \rho_l e^{-\gamma l}}{e^{+\gamma l} - \rho_l e^{-\gamma l}} = w \frac{e^{j\frac{\pi}{2} + \delta} - e^{-j\frac{\pi}{2} - \delta}}{e^{j\frac{\pi}{2} + \delta} + e^{-j\frac{\pi}{2} - \delta}} = w \frac{e^\delta + e^{-\delta}}{e^\delta - e^{-\delta}} = \frac{w}{\operatorname{th} \delta}.$$

При малых δ , при $\operatorname{th} \delta \simeq \delta$, это составляет примерно

$$Z_0 \simeq \frac{w}{\delta} = \frac{\frac{w^2}{Rl}}{1 + 2jQ \frac{\Delta\omega}{\omega_0}}, \quad Q = \frac{\pi}{4} \frac{w}{Rl}.$$

Так что в окрестности частоты резонанса $\omega_0 = \frac{\pi v}{2l}$ короткозамкнутый четвертьволновой отрезок ведет себя как резонатор с вещественным резонансным сопротивлением $R_0 = \frac{w^2}{Rl}$ и добротностью $Q = \frac{\pi}{4} \frac{w}{Rl}$.

8. Подключаем источник

Обсуждение подключения источника сигнала к нагрузке через длинную линию полезно начать с элементарной задачи об источнике e со внутренним сопротивлением R_s , подключенном к нагрузке R_l напрямую, то есть – через воображаемую длинную линию нулевой длины, рис. 4. Волновое сопротивление w этой линии можно выбрать как угодно.

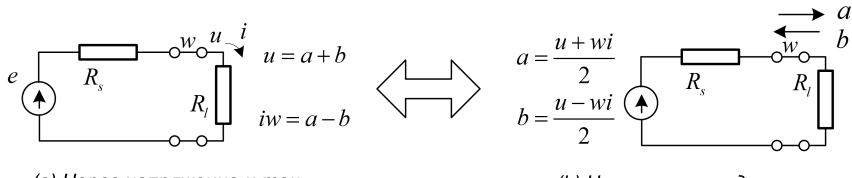


Рис. 4. Сопряжение источника с нагрузкой

Если подойти к этой задаче с привычными представлениями о напряжении на нагрузке u и потребляемом ею токе i , то окажется, что нагрузка и источник накладывают на значения u , i два ограничения:

$$u = iR_l, \quad u = e - iR_s,$$

которые и определяют эти значения однозначно: $u = e \frac{R_s}{R_s + R_l}$, $i = \frac{e}{R_s + R_l}$.

Поучительно рассмотреть ту же задачу в терминах волновых параметров – параметров рассеяния. Итак, источник создает падающую волну $a = \frac{u+wi}{2}$, а нагрузка порождает отраженную волну $b = \frac{u-wi}{2}$.

Замены $u = a + b$, $iw = a - b$ переводят накладываемые источником и нагрузкой ограничения в следующие ограничения на амплитуды бегущих волн:

$$u = iR_l \quad \Rightarrow \quad b = \rho_l a, \quad \rho_l = \frac{R_l - w}{R_l + w};$$

$$u = e - iR_s \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{2}(1 - \rho_s) = a - \rho_s b, \quad \rho_s = \frac{R_s - w}{R_s + w}. \quad (4)$$

Нагрузка определяет соотношение между амплитудами волн через коэффициент отражения ρ_l . Если она согласована ($R_l = w$, $\rho_l = 0$), то отраженной волны нет – $b = 0$. Согласованная нагрузка не накладывает никакого ограничения на падающую волну a , поглощая всю ее без остатка.

Согласованный источник ($R_s = w$, $\rho_s = 0$) вполне определяет амплитуду $a = \frac{e}{2}$ падающей волны. Мощность в ней $P = \frac{|a|^2}{2w} = \frac{|e|^2}{8w} = \frac{|e|^2}{8R_s}$ – это предельная мощность, которую только способен отдать источник с комплексной амплитудой напряжения e и внутренним сопротивлением R_s . Дальнейшее зависит от нагрузки. Согласованная нагрузка поглотит всю эту мощность без остатка. Несогласованная – вернет часть мощности в отраженной волне.

Наложенные нагрузкой и источником ограничения однозначно определяют амплитуды волн. Подставив $b = \rho_l a$ в (4), найдем

$$\frac{e}{2}(1 - \rho_s) = a(1 - \rho_s \rho_l).$$

Откуда

$$a = \frac{e}{2} \frac{(1 - \rho_s)}{(1 - \rho_s \rho_l)}, \quad b = \rho_l a = \frac{e}{2} \frac{(1 - \rho_s) \rho_l}{(1 - \rho_s \rho_l)}. \quad (5)$$

Для напряжения u получается

$$u = a + b = \frac{e}{2} \frac{(1 - \rho_s)(1 + \rho_l)}{(1 - \rho_s \rho_l)} = e \frac{R_s}{R_s + R_l},$$

а для тока

$$i = \frac{a - b}{w} = \frac{e}{2w} \frac{(1 - \rho_s)(1 - \rho_l)}{(1 - \rho_s \rho_l)} = e \frac{1}{R_s + R_l}.$$

Каждый может проверить, что значения напряжения и тока от волнового сопротивления w на самом деле не зависят.

Пусть $R_s = w$ – согласованный источник. Тогда $\rho_s = 0$ и

$$u = \frac{e}{2}(1 + \rho_l); \quad i = \frac{e}{2w}(1 - \rho_l); \quad P = \frac{\text{Re}(ui^*)}{2} = \frac{|e|^2}{8w}(1 - |\rho_l|^2).$$

Согласованный источник пытается отдать в нагрузку предельную для него мощность $\frac{|e|^2}{8w}$. Согласованная нагрузка ($\rho_l = 0$)

поглощает всю эту мощность без остатка, несогласованная – возвращает часть мощности обратно. Коэффициент $|\rho_l|^2$ как раз и определяет долю возвращенной мощности.

Включение между нагрузкой и источником линии длинной l попросту преобразует коэффициент ρ_l отражения от нагрузки в коэффициент $\rho_l e^{-2\gamma l}$ отражения от входа нагруженной длинной линии. Так что формула для амплитуды падающей волны на входе линии принимает вид:

$$a(0) = \frac{e}{2} \frac{(1 - \rho_s)}{(1 - \rho_s \rho_l e^{-2\gamma l})}. \quad (6)$$

Амплитуда отраженной волны на входе отличается коэффициентом отражения от входа:

$$b(0) = a(0) \rho_l e^{-2\gamma l}.$$

Знание амплитуд волн на входе вполне определяет их амплитуды в любой точке x : $a(x) = a(0)e^{-\gamma x}$, $b(x) = b(0)e^{+\gamma x}$. В том числе, на выходе:

$$a(l) = a(0)e^{-\gamma l}, \quad b(l) = b(0)e^{+\gamma l}.$$

В свою очередь, амплитуды волн определяют напряжения и токи в линии:

$$u(x) = a(x) + b(x), \quad i(x) = \frac{a(x) - b(x)}{w}.$$

В пределе $\omega \rightarrow 0$ от экспоненты $e^{-\gamma l} = e^{-\beta l} e^{-j\frac{\omega}{v}l}$ остается $e^{-\beta l}$. Формула (6) для амплитуды падающей волны принимает вид:

$$a(0) = \frac{e}{2} \frac{(1 - \rho_s)}{(1 - \rho_s \rho_l e^{-2\beta l})}.$$

Заодно эта формула дает асимптотическое значение амплитуды падающей волны на входе при $t \rightarrow \infty$, когда все переходные процессы в линии завершились. Для линии без потерь ($\beta = 0$) эта формула переходит в (5). На нулевой частоте всякая линия без потерь становится короткой.

9. Переходные процессы в длинной линии

Формула (6) определяет частотно-зависимый комплексный коэффициент передачи от комплексной амплитуды e напряжения источника до комплексной амплитуды $a(0)$ падающей волны на входе линии:

$$\frac{a(0)}{e} = \frac{(1 - \rho_s)}{2} \frac{1}{(1 - \rho_s \rho_l e^{-2\gamma l})}. \quad (7)$$

Воспользовавшись формулой суммы членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

представим (7) рядом

$$\frac{a(0)}{e} = \frac{(1 - \rho_s)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho_s \rho_l e^{-2\gamma l})^n. \quad (8)$$

В результате придем к показанной на рис. 5 структуре линейного фильтра, преобразующего сигнал источника – напряжение $E(t)$ в амплитуду $A(0, t)$ падающей волны на входе линии.

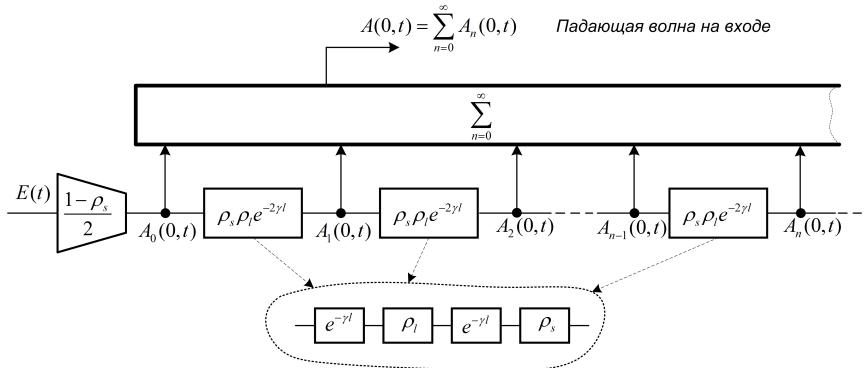


Рис. 5. Эквивалентный фильтр

Все начинается с того, что сигнал источника $E(t)$ преобразуется в первичную падающую волну $A_0(0, t)$ фильтром с ком-

плексным коэффициентом передачи $\frac{1-\rho_s}{2}$. Далее эта волна последовательно проходит через бесконечную цепочку одинаковых блоков с коэффициентами передачи $\rho_s \rho_l e^{-2\gamma l}$, порождая на их выходах парциальные волны $A_n(0, t)$, $n = 1, 2, \dots$. Падающая волна $A(0, t)$ на входе линии – это сумма парциальных волн.

Каждый из одинаковых блоков в цепочке описывает распространение волны от источника до нагрузки (блок $e^{-\gamma l}$), отражение ее там (блок ρ_l), возвращение волны назад, к источнику (блок $e^{-\gamma l}$) и отражение от источника (блок ρ_s).

Амплитуда $A(0, t)$ падающей волны на входе линии стандартным образом определяет амплитуды всех прочих волн: падающей волны на выходе $A(l, t) = e^{-\gamma l} A(0, t)$, отраженной волны на выходе $B(l, t) = \rho_l A(l, t)$ и, наконец, отраженной волны на входе $B(0, t) = e^{-\gamma l} B(l, t)$. В свою очередь, амплитуды волн определяют напряжения и токи: $U(x, t) = A(x, t) + B(x, t)$, $I(x, t)w = A(x, t) - B(x, t)$.

Если сопротивления источника и нагрузки вещественны, то вещественны и оба коэффициента отражения ρ_l , ρ_s . При этом из всех входящих в модель на рис. 5 блоков комплексными оказываются только коэффициенты передачи блоков распространения волн:

$$e^{-\gamma l} = e^{-\beta l} e^{-jkl} = e^{-\beta l} e^{-j\omega \frac{l}{v}} = e^{-\beta l} e^{-j\omega \tau},$$

где $\tau = \frac{l}{v}$ – время распространения волны вдоль линии.

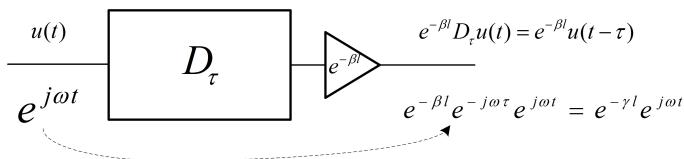


Рис. 6. Модель блока распространения

Как нетрудно понять из рис. 6, блок распространения с комплексным коэффициентом передачи $e^{-\gamma l} = e^{-\beta l} e^{-j\omega \tau}$ – это просто последовательное соединение линии задержки на τ и аттенюатора с коэффициентом ослабления $e^{-\beta l}$. Линия задержки реализует оператор задержки D_τ , действующий на сигналы $u(t)$ по правилу:

$$D_\tau u(t) = u(t - \tau).$$

В случае линии без потерь блок распространения оказывается просто задержкой D_τ .

Для того, чтобы изучить переходный процесс в линии в том или ином режиме, достаточно найти временную форму $A(0, t)$ падающей волны на входе как сумму бесконечного числа парциальных волн. При этом полезно иметь в виду, что сумма эта сходится при $t \rightarrow \infty$ к следующему стационарному уровню амплитуды падающей волны на входе (предельный переход в (7) по $\omega \rightarrow 0$):

$$A(0, \infty) = e \frac{(1 - \rho_s)}{2} \frac{1}{(1 - \rho_s \rho_l e^{-2\beta l})}.$$

Когда временная форма $A(0, t)$ падающей волны на входе известна, остальное достраивается несложно. Падающая волна на выходе – это результат ослабления и задержки:

$$A(l, t) = e^{-\beta l} D_\tau A(0, t).$$

Отраженная волна на выходе – результат отражения:

$$B(l, t) = \rho_l A(l, t).$$

Наконец, отраженная волна на входе – это снова результат ослабления и задержки:

$$B(0, t) = e^{-\beta l} D_\tau B(l, t).$$

Переходы от амплитуд волн к токам и напряжениям стандартны.

Ситуация радикально упрощается, когда один из коэффициентов отражения равен нулю – есть согласование на входе и/или выходе. Многократные переотражения тогда исключаются и выражение для коэффициента передачи упрощается до

$$\frac{a(0)}{e} = \frac{(1 - \rho_s)}{2}.$$

Амплитуда падающей волны на входе устанавливается без задержек.

Наиболее прост в плане переходного процесса случай согласованной нагрузки – $\rho_l = 0$, отражения от нагрузки нет. В этом случае источник порождает первичную волну с амплитудой

$$A(0, t) = \frac{1 - \rho_s}{2} E(t) = \frac{w}{R_s + w} E(t),$$

которая достигает выхода спустя τ как

$$A(l, t) = e^{-\beta l} D_\tau A(0, t)$$

и там не отражается. Это и завершает переходный процесс. Поскольку отраженной волны нет, напряжение на линии совпадает с амплитудой волны $A(x, t)$. Согласованная по выходу линия «работает» как линия задержки на τ , которая, при наличии потерь, к тому же ослабляет сигнал в $e^{-\beta l}$ раз.

Отдаваемая источником мощность составляет

$$P = UI = \frac{A^2}{w} = \frac{E^2}{4w}(1 - \varrho_s)^2 = \frac{E^2}{4R_s}(1 + \varrho_s)(1 - \varrho_s) = \frac{E^2}{4R_s}(1 - \rho_s^2),$$

достигая предельной мощности источника $\frac{E^2}{4R_s}$ только при наличии согласования на входе, когда $\rho_s = 0$. Таким образом, чтобы источник отдавал в нагрузку предельно возможную мощность, нужны согласования как на выходе, так и на входе.

При рассогласованной нагрузке, но наличии согласования на входе ($\rho_s = 0$), в линии происходит всего одно отражение. Источник создает первичную волну $A(0, t) = \frac{E(t)}{2}$ предельной мощности, которая приходит на выход как

$$A(l, t) = e^{-\beta l} D_\tau A(0, t),$$

отражается там, порождая волну

$$B(l, t) = \rho_l e^{-\beta l} D_\tau A(0, t),$$

которая возвращается на вход задержанной на 2τ :

$$B(0, t) = \rho_l e^{-2\beta l} D_\tau^2 A(0, t).$$

Этим все и заканчивается.

В момент 2τ , когда приходит отражение от нагрузки, напряжение на входе линии скачком изменяется с начального уровня $\frac{E}{2}$ до $\frac{E}{2}(1 + e^{-2\beta l}\rho_l)$. Если потеря в линии нет, то при коротком замыкании на выходе ($\rho_l = -1$) напряжение на входе падает до нуля, а при холостом ходе ($\rho_l = 1$) – нарастает до двойного уровня E .

10. Емкостная нагрузка

Если импедансы источника $Z_s(j\omega)$ и/или нагрузки $Z_l(j\omega)$ комплексны, то комплексными становятся также и коэффициенты отражения $\rho_s(j\omega)$, $\rho_l(j\omega)$. При этом, помимо задержек и ослаблений, связанных с распространением волн вдоль линии, возникают трансформации форм волн при их отражениях – прохождениях через блоки с комплексными коэффициентами передачи $\rho_s(j\omega)$, $\rho_l(j\omega)$.

Рассмотрим простой пример согласованной по входу линии с $R_s = w$, нагруженной на емкостную нагрузку C с импедансом $Z_l = \frac{1}{j\omega C}$, рис. 7. Для комплексного коэффициента отражения от емкостной нагрузки найдем:

$$\rho_l(j\omega) = \frac{Z_l - w}{Z_l + w} = \frac{1 - j\omega Cw}{1 + j\omega Cw} = \frac{1}{1 + j\omega Cw} - \frac{j\omega Cw}{1 + j\omega Cw}.$$

В этом легко опознается комплексный коэффициент передачи фазовращателя – схемы на рис. 7b, которая преобразует вход $E(t)$ в разностный выходной сигнал $U_{ab}(t)$.

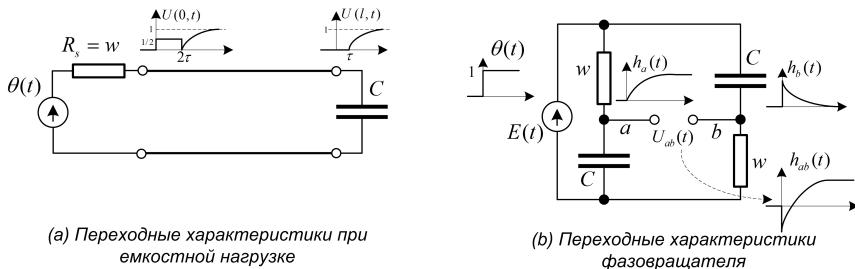


Рис. 7. Работа линии на емкостную нагрузку

Его переходная характеристика $h_{ab}(t)$ – реакция на единичный перепад $\theta(t)$ на входе – это разность между переходной характеристикой $h_a(t) = \theta(t)(1 - e^{-t/Cw})$ интегрирующей цепи с комплексным коэффициентом передачи $\frac{1}{1+j\omega Cw}$ и переходной характеристикой $h_b(t) = \theta(t)e^{-t/Cw}$ дифференцирующей цепи с комплексным коэффициентом передачи $\frac{j\omega Cw}{1+j\omega Cw}$:

$$h_{ab}(t) = \theta(t)(1 - 2e^{-t/Cw}).$$

Она плавно изменяется от уровня $h_{ab}(0) = -1$ до уровня $h_{ab}(\infty) = +1$.

Включение единичного перепада $\theta(t)$ на входе линии создает в ней падающую волну с амплитудой $A(0, t) = \frac{1}{2}\theta(t)$. Спустя время $\tau = \frac{l}{v}$ эта волна достигает выхода линии. Упавшая волна $A(l, t) = D_\tau A(0, t) = \frac{1}{2}\theta(t - \tau)$ отражается от «фазовращателя», порождая отраженную волну

$$B(l, t) = \frac{1}{2}\theta(t - \tau)(1 - 2e^{-(t-\tau)/Cw}).$$

Ее амплитуда изменяется от уровня $B(l, \tau) = -\frac{1}{2}$ до уровня $B(l, \infty) = +\frac{1}{2}$. В момент падения волны, при $t = \tau$, природа решает, что емкость – это короткое замыкание, и отражает то, что упало, с коэффициентом $\rho_l = -1$. Затем, по мере того, как емкость заряжается, природа меняет точку зрения, приходя к тому, что на выходе линии все-таки, скорее, холостой ход. Коэффициент отражения плавно дрейфует к значению $\rho_l = +1$.

Сложение падающей и отраженной волн дает показанные на рис. 7а временные формы для напряжения на выходе линии:

$$U(l, t) = A(l, t) + B(l, t) = \theta(t - \tau)(1 - e^{-(t-\tau)/Cw})$$

и для напряжения на ее входе:

$$U(0, t) = A(0, t) + B(0, t) = \frac{1}{2}\theta(t) + \frac{1}{2}\theta(t - 2\tau)(1 - 2e^{-(t-2\tau)/Cw}).$$

11. Матрица рассеяния (S-матрица)

Четырехполюсник – это система с четырьмя переменными состояния (u_1, u_2, i_1, i_2) , рис. 8. Свойства линейного четырехполюсника удается охарактеризовать парой линейных функций от двух переменных. К примеру, если параметры (u_1, i_2) линейно выразить через (i_1, u_2) , то получится популярное описание четырехполюсника матрицей h -параметров:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

В микроволновой технике почти исключительно используется описание систем матрицами рассеяния – S-матрицами. Чтобы

прийти к этому описанию, нужно волевым образом зафиксировать некоторое значение волнового сопротивления w и перейти на входе и выходе от напряжений и токов к параметрам рассеяния – амплитудам падающих (внутрь четырехполюсника) и отраженных от него волн. Стандартные формулы прямого и обратного переходов даны на рисунке.

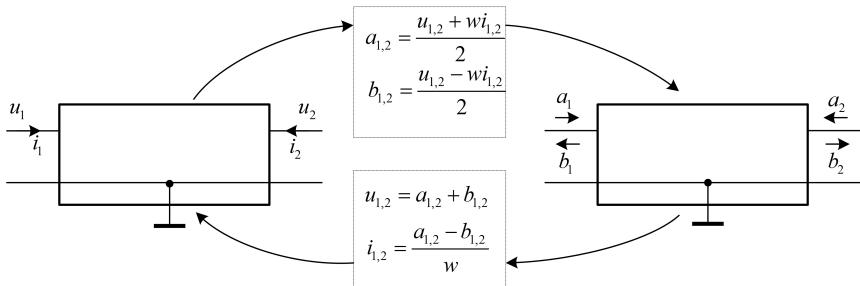


Рис. 8. Четырехполюсник и переход к параметрам рассеяния

Матрица S -параметров линейно выражает амплитуды отраженных волн через амплитуды падающих:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Все четыре S -параметра безразмерны. Параметры S_{11}, S_{22} – это уже знакомые нам коэффициенты отражения, параметры S_{21}, S_{12} – коэффициенты прохождения. Все они определены применительно к конкретному значению волнового сопротивления w , которое с внутренним устройством четырехполюсника непосредственно не связано. Тот же четырехполюсник можно охарактеризовать S -матрицей для иного значения w . Но это уже будет матрица с иным набором значений параметров. Другое дело, что «правильный» выбор w может привести S -матрицу к виду, приятному в том или ином отношении.

Чтобы измерять h -параметры, нужно быть в состоянии устроить режим короткого замыкания по выходу ($u_2 = 0$) и режим холостого хода по входу ($i_1 = 0$). В режиме замыкания по выходу выпадают (умножаются на нуль) параметры h_{12}, h_{22} . Два оставшиеся легко измеряются. В режиме холостого хода по входу выпадают h_{11}, h_{21} и измеряются h_{12}, h_{22} . Проблема в том, что

в диапазоне микроволн режимы холостого хода и короткого замыкания трудно реализуемы технически.

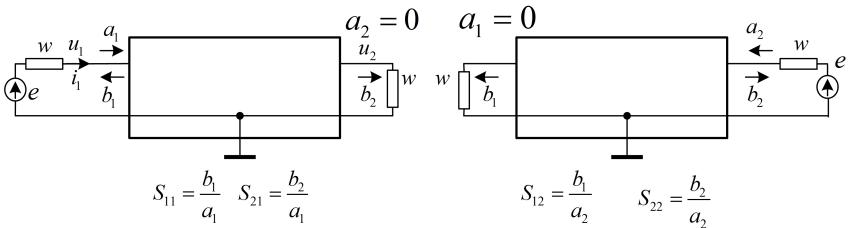


Рис. 9. К измерению S -параметров

Принципиальная особенность S -параметров в том, что их измерения проводятся в режиме согласования, рис. 9. Нагрузим выход на волновое сопротивление w . Тогда коэффициент отражения на выходе, а следовательно, и амплитуда отраженной от нагрузки волны a_2 окажутся нулевыми. Это приведет к выпадению коэффициентов S_{12}, S_{22} . Теперь нужно любым доступным способом подать на вход сигнал и, измерив амплитуды волн a_1, b_1, b_2 , найти коэффициенты S_{11}, S_{21} , как показано на рисунке. Два другие параметра измеряются по той же схеме, но со стороны выхода.

Амплитуда волны b_2 на выходе просто совпадает с напряжением u_2 – нет отраженной волны. Для измерения же амплитуд волн a_1, b_1 на входе, в принципе, потребуется измерить как комплексную амплитуду напряжения u_1 , так и амплитуду тока i_1 . Все упрощается, когда сигнал подается от согласованного источника. Такой источник создает падающую волну с амплитудой $\frac{e}{2}$. Поэтому $a_1 = \frac{e}{2}$ и $b_1 = u_1 - a_1 = u_1 - \frac{e}{2}$. При известной амплитуде источника e удается обойтись измерением комплексных амплитуд напряжений u_1, u_2 на входе и выходе.

В терминах S -матриц, длинная линия – это четырехполюсник (двуухпоровая микроволновая система) с матрицей рассеяния

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & 0 \end{bmatrix}$$

Вид этой матрицы и незамысловатый набор шпаргалочных фор-

мул $w = \sqrt{\frac{L}{C}}$, $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\gamma = jk + \beta$, $k = \frac{\omega}{v}$, $\beta = \frac{R}{w}$ – это все, что нужно держать в памяти по поводу длинной линии. Остальное – простые следствия.

12. Задание

12.1. Измерение параметров линии

1. Измерить длину l кабеля.
2. Собрав на макетной плате схему на рис. 10, измерить модули входных импедансов линии $R_0|_{R_l=0}$ и $R_0|_{R_l=\infty}$ в режимах короткого замыкания ($R_l = 0$) и холостого хода ($R_l = \infty$) на выходе.

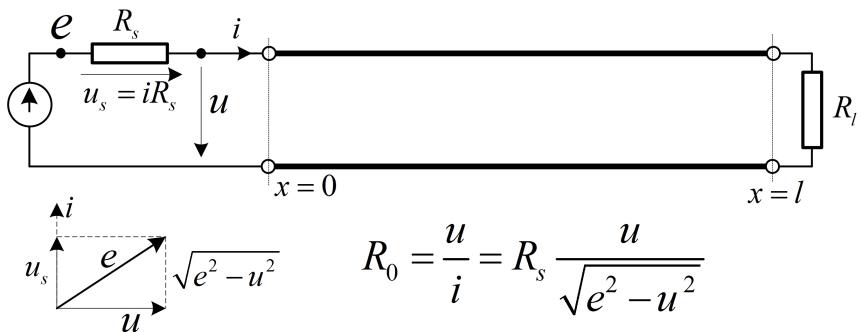


Рис. 10. Схема эксперимента

Указания. Измерения проводить на частоте $f = 1.0\text{-}1.5 \text{ МГц}$ при высоком уровне входного сигнала – порядка 2-3 В. Эффективные значения напряжения источника e и напряжения на входе линии u измерять параллельно двумя каналами осциллографа, используя входы с делением на 10. Имеет смысл предварительно проверить тождественность показаний в каналах i , при необходимости, ввести поправочный коэффициент. Для достижения достаточной точности измерений сопротивление источника R_s подбирать так, чтобы напряжение u на входе линии составляло порядка $e/\sqrt{2}$. В режиме короткого замыкания

ния на выходе потребуется $R_s \sim 30 - 50$ Ом, в режиме холостого хода - $R_s \sim 250 - 400$ Ом.

Для вычисления входного сопротивления линии R_0 по измеренным значениям e и u использовать приведенную на рис. 10 формулу, которая учитывает факт ортогональности напряжений u_s и u на резисторе R_s и входе линии - следствие минимости входного импеданса линии в отсутствие потерь.

3. По результатам измерений $R_0|_{R_l=0}$ и $R_0|_{R_l=\infty}$ оценить волновое сопротивление линии

$$w = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{R_0|_{R_l=0} R_0|_{R_l=\infty}}$$

и скорость распространения волны

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi fl}{\arctg \frac{R_0|_{R_l=0}}{w}} \simeq 2\pi fl \frac{w}{R_0|_{R_l=0}}.$$

Оценить погонные емкость $C = \frac{1}{wv}$ и индуктивность $L = \frac{w}{v}$ линии.

4. Исследуя резонансный пик на частоте $f_0 = \frac{v}{4l}$, на которой коротко замкнутая линия является четверть волновой, измерить эквивалентное сопротивление $R_0 = \frac{w^2}{Rl}$ и ширину Δf двухсторонней полосы пропускания по уровню $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$.

Указания. Пик следует искать при $f_0 = 6-8$ МГц. Сопротивление источника $R_s \simeq 1$ кОм подобрать так, чтобы напряжение и на входе линии составляло порядка $e/2$. При вычислении резонансного сопротивления линии учесть его вещественность: $R_0 = R_s \frac{u}{e-u}$.

5. Вычислить погонное сопротивление линии $R = \frac{w^2}{R_0 l}$ и добротность эквивалентного резонатора

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \left(1 + \frac{R_0}{R_s} \right).$$

Проверить формулу $Q = \frac{\pi}{4} \frac{w}{Rl}$ для добротности. Показать, что при шунтировании резонатора с эквивалентным сопротивлением R_0 сопротивлением R_s его полоса расширяется в $(1 + \frac{R_0}{R_s})$ раз.

6. Отчет о проделанной работе должен содержать результаты вычисления параметров w, v, L, C, R, Rl вместе с первичными экспериментальными данными, достаточными для проверки вычислений.

12.2. Исследование переходных процессов

Исследования проводятся в режиме *Transient* MicroCap – меню *Analisisys/Transient*.

Подготовленная модель (файл **TLine.cir**) содержит длинную линию без потерь с волновым сопротивлением $w = 50$ Ом и временем распространения $\tau = \frac{l}{w} = 10$ нс. Линия питается от источника единичного перепада напряжения $V = 1$ В. Наблюдаются напряжения в узлах e , u на входе и выходе линии (переменные $v(e)$, $v(u)$) и входной/выходной токи $i(s)/i(l)$ через виртуальные резисторы s , l с нулевыми сопротивлениями.

Подготовлен вывод графиков амплитуд падающей волны на входе $A(0, t) = \frac{v(e)+50*i(s)}{2}$ и выходе $A(l, t) = \frac{v(u)+50*i(l)}{2}$ (плот 1), амплитуд отраженной волны на входе $B(0, t) = \frac{v(e)-50*i(s)}{2}$ и выходе $B(l, t) = \frac{v(u)-50*i(l)}{2}$ (плот 2), напряжений на входе и выходе $v(e)$, $v(u)$ (плот 3) и токов на входе и выходе $50*i(s)$, $50*i(l)$ (плот 4). Временной диапазон графиков выбран равным 200 нс (20τ). Установленные по умолчанию диапазоны графиков по вертикали – колонка *Y Range* диалога *Limits* – лучше изменять вручную в формате [Низ,Верх,Шаг сетки], не полагаясь на автоматические установки по *AutoScaleRanges*. Кажущиеся ненужными графики можно отменять, стирая номер в колонке *P* диалога *Limits*.

Для изменения одного из параметров модели удобно использовать варьирование. Заказ на варьирование оформляется в диалоге *Transient/Stepping*. В лист-боксе *Step What* выбираем варьируемый параметр и задаем параметры варьирования в полях [*From*, *To* | *StepValue*]. Чтобы задать фиксированное значение параметра, устанавливаем *From* = *To*. Шаг *Step Value* тогда не имеет значения, но должен быть ненулевым. Годится установка *Step Value* = 1. Варьирование активируется установкой флажка *Step It* в положение *Yes*.

1. Согласованная линия

На схеме установить $R_s = R_l = 50$ Ом, и вывести графики через меню *Analisisys/Transient/Run*. Проанализировать графики амплитуды падающей волны, напряжений и токов. Измерив по графикам установившиеся значения $v(u)$ и $i(l)w$, убедиться в том, что источник отдает в нагрузку предельную мощность

$P = v(u)i(l) = \frac{V^2}{4R_s}$, $V = 1$ В:

$$Pw = v(u)i(l)w = \frac{V^2}{4R_s}w = 0.25.$$

2. Рассогласованный источник

Варьированием установить $R_s = \frac{w}{3}$ [$\rho_s = \frac{R_s-w}{R_s+w} = -\frac{1}{2}$]. (*Transient/Stepping* – [*From, To|StepValue*] = [50/3, 50/3|1]). Пересчитать графики по *Transient/Run*. Измерив установившиеся значения $v(u)$ и $i(l)w$, проверить, что отдаваемая в нагрузку мощность P меньше мощности источника в $(1 - \rho_s^2)$ раз:

$$Pw = v(u)i(l)w = \frac{V^2}{4R_s}w(1 - \rho_s^2) = 0.75\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 0.5625.$$

Повторить все это при $R_s = 3w$ [$\rho_s = \frac{R_s-w}{R_s+w} = +\frac{1}{2}$]. Проверить, что

$$Pw = v(u)i(l)w = \frac{V^2}{4R_s}w(1 - \rho_s^2) = \frac{0.25}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 0.0625.$$

3. Рассогласованная нагрузка

Установить варьированием $R_l = \frac{w}{3}$ [$\rho_l = -\frac{1}{2}$]. Уяснить характер переходных процессов. Измерить установившиеся значения амплитуд волн, напряжений и токов.

Повторить наблюдения при $R_l = 0$ [$\rho_l = -1$], $R_l = 3w$ [$\rho_l = +\frac{1}{2}$], $R_l = 50k \simeq \infty$ [$\rho_l = +1$].

4. Рассогласованные источник и нагрузка

Установить на схеме $R_s = 50/3$ [$\rho_s = -\frac{1}{2}$]. Установив варьированием $R_l = 0$ [$\rho_l = -1$], $\rho_s\rho_l = \frac{1}{2}$, вывести графики. Убедиться в том, что амплитуда падающей волны нарастает как последовательность частичных сумм прогрессии:

$$A = \frac{w}{w + R_s} \left(1 + \rho_s\rho_l + (\rho_s\rho_l)^2 + \dots\right) = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right).$$

Объяснить ход графиков амплитуд волн, напряжений и токов. Измерить установившиеся значения.

Повторить наблюдения при $R_l = 50k \simeq \infty$ [$\rho_l = 1$], $\rho_s \rho_l = -\frac{1}{2}$:

$$A = \frac{w}{w + R_s} \left(1 + \rho_s \rho_l + (\rho_s \rho_l)^2 + \dots \right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \right).$$

Установить на схеме $R_s = 50 * 3$ [$\rho_s = +\frac{1}{2}$] и повторить наблюдения при $R_l = 0$ [$\rho_l = -1$]:

$$A = \frac{w}{w + R_s} \left(1 + \rho_s \rho_l + (\rho_s \rho_l)^2 + \dots \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \right)$$

и $R_l = 50k \simeq \infty$ [$\rho_l = 1$]:

$$A = \frac{w}{w + R_s} \left(1 + \rho_s \rho_l + (\rho_s \rho_l)^2 + \dots \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right).$$

Установить на схеме $R_s = 0$ [$\rho_s = -1$] (предельно сильное рассогласование на источнике) и повторить наблюдения при

$$R_l = 50k, \quad [\rho_l = 1] \quad \Rightarrow \quad A = (1 - 1 + 1 - 1 + \dots),$$

$$R_l = 500, \quad [\rho_l = 0.8] \quad \Rightarrow \quad A = (1 - \rho_l + \rho_l^2 - \rho_l^3 + \dots),$$

$$R_l = 0, \quad [\rho_l = 1] \quad \Rightarrow \quad A = (1 + 1 + 1 + 1 + \dots),$$

$$R_l = 5, \quad [\rho_l = -0.8] \quad \Rightarrow \quad A = (1 + \rho_l + \rho_l^2 + \rho_l^3 + \dots).$$

4. Емкостная нагрузка

Установить на схеме $R_s = 50$ (согласованный источник), $R_l = 50k \simeq \infty$, $C = 100$ пФ. Объяснить формы графиков переходных процессов. Измерить установившиеся значения амплитуд волн, напряжений и токов. Оценить по графикам постоянную времени τ экспоненциального переходного процесса. Проверить, что $\tau = wC$.

Варьированием установить $R_s = 50/3$, проанализировать графики переходных процессов. Измерить установившиеся значения амплитуд волн, напряжений и токов.

Проанализировать графики незатухающего переходного процесса при $R_s = 0$.

Учебное издание

ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

Методические указания к лабораторной работе
по курсу *Радиотехнические цепи и сигналы*

Составители:
Григорьев Александр Алексеевич
Филатов Иван Васильевич

Редактор *H. E. Кобзева*. Корректор *I. A. Волкова*
Компьютерная верстка *H. E. Кобзева*

Подписано в печать 00.01.2020. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.
Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 200 экз. Заказ № 000.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru