

# Радиотехническая работа 18

## Пассивные электрические цепи

### Выполнил Жданов Елисей Б01-205

#### 1 Оборудование:

Макетная плата

Набор резисторов различных сопротивлений

Набор конденсаторов различных емкостей

Набор катушек различной индуктивности

Электронный осциллограф на печатной плате

Электронный генератор сигналов на печатной плате

Программное обеспечение Micro-cap

#### 2 Задание

##### 2.1 Интегрирующие и дифференцирующие звенья

###### 2.1.1 Теория

Два возможных варианта построения делителя напряжения из резистора  $R$  и конденсатора  $C$  приводят к интегрирующей и дифференцирующей цепям на рисунке. Свойства обеих цепей определяются постоянной времени  $\tau = RC$  или характерной частотой  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ,  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ .

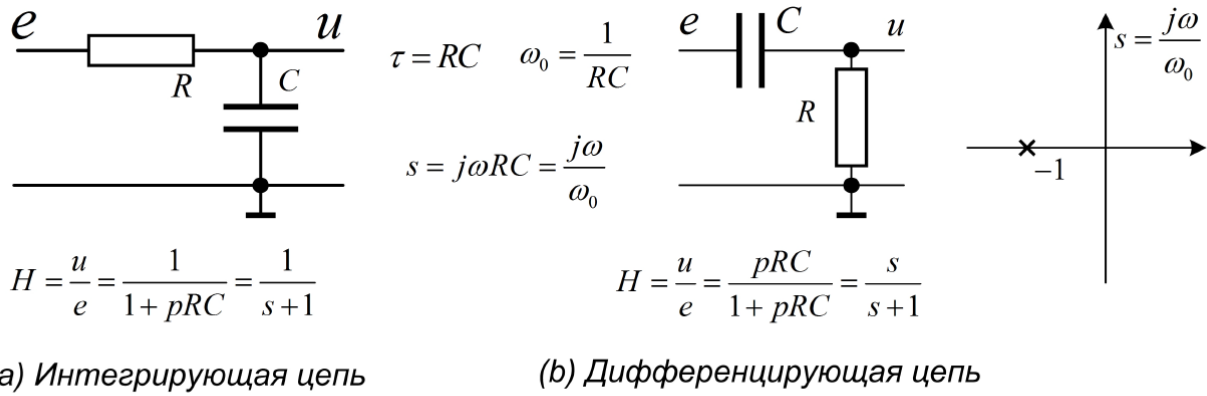


Рис. 11. Звенья первого порядка

Присутствие на входе интегрирующей цепи, рис 11а, гармонического напряжения частоты  $j\omega = p$  с комплексной амплитудой  $e$  вызывает ток с амплитудой  $i = \frac{e}{Z} = \frac{e}{R + \frac{1}{pC}}$ . Его протекание по емкости  $C$  создает выходное напряжение  $u = i \frac{1}{pC}$ . Для передаточной функции  $H(p) = \frac{u}{e}$  получается  $H(p) = \frac{1}{1 + pRC}$  или  $H(s) = \frac{1}{s + 1}$ . Аналогичным образом, для передаточной функции дифференцирующей цепи, рис. 11b, получается  $H(s) = \frac{s}{s + 1}$ . Оба эти четырехполюсника являются системами первого порядка с единственным полюсом в точке  $s = -1$ . Они различаются положениями нулей: нуль дифференцирующей цепи лежит в нуле при  $s = 0$ , а нуль интегрирующей в бесконечности.

Выражение

$$K(j\omega) = H(s)|_{s=j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

для комплексного коэффициента передачи интегрирующей цепи приводит к следующим формулам для ее частотной и фазовой характеристик:

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

Интегрирующая цепь - это фильтр нижних частот (ФНЧ) с полосой пропускания от нуля до граничной частоты  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$  (частоты среза). На границе полосы пропускания, при  $\omega = \omega_0$ ,  $|K(j\omega)|$  снижается с 1 до уровня  $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7 = -3 \text{ dB}$ .

Лаплас-образ  $\frac{H(p)}{p}$ ,  $H(p) = \frac{\omega_0}{p + \omega_0}$ , переходной характеристики интегрирующей цепи  $h_0(t)$  факторизуется в сумму элементарных дробей:

$$L[h_0](p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{1}{p} \frac{\omega_0}{p + \omega_0} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0}.$$

С учетом того, что  $\frac{1}{p} = L[\theta(t)]$ ,  $\frac{1}{p + \omega_0} = L[e^{-\omega_0 t}]$ , это дает следующее выражение для  $h_0(t)$

:

$$h_0(t) = \theta(t) - e^{-\omega_0 t} = \theta(t) \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Формулы для АЧХ, ФЧХ и переходной характеристики дифференцирующей цепи получаются по аналогии:

$$|K(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right);$$

$$h_0(t) = \theta(t)e^{-\omega_0 t} = \theta(t)e^{-t/\tau}.$$

Дифференцирующая цепь - это фильтр верхних частот (ФВЧ) с полосой пропускания от частоты среза  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$  до бесконечности. На границе полосы пропускания, при  $\omega = \omega_0$ ,

модуль коэффициента передачи  $K(j\omega)$  падает до уровня  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3$  dB и обращается в нуль при нулевой частоте.

### 2.1.2 Выполнение

1) Соберем схему, удостоверимся в её работоспособности и подключим питание.

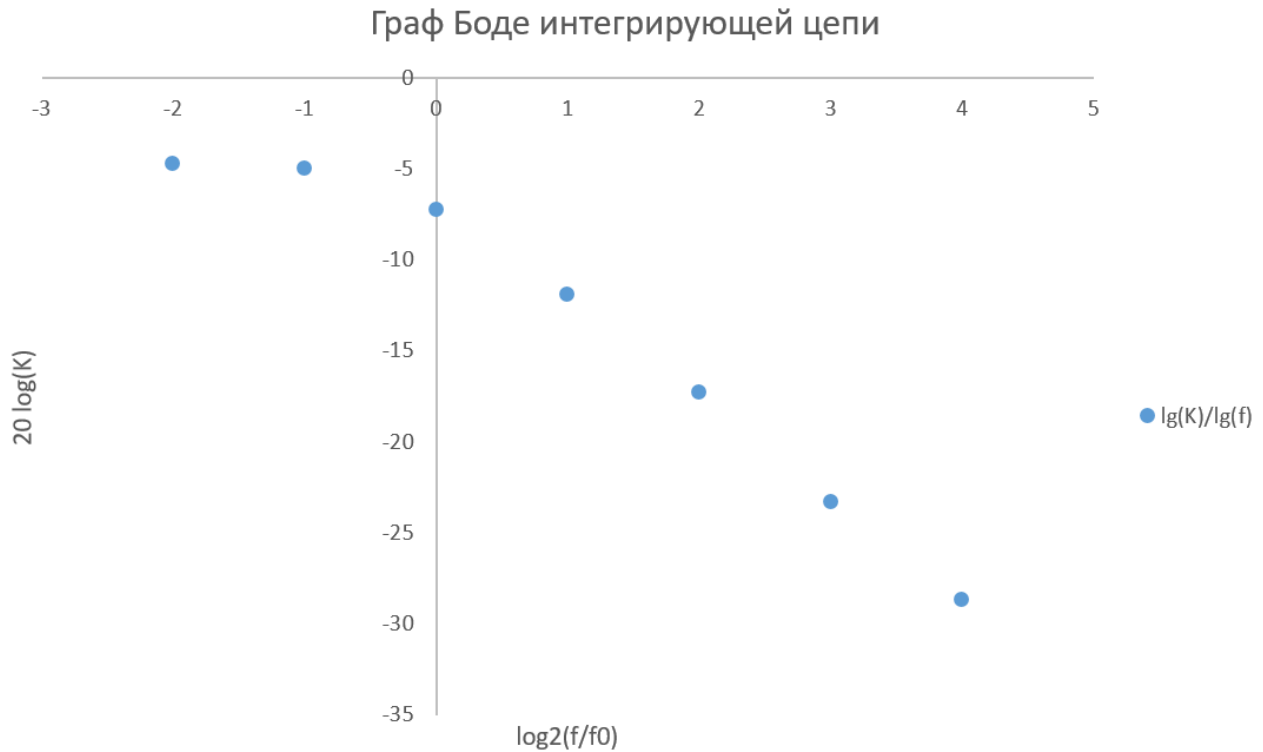
В качестве компонент были выбраны резистор  $R = 94.64$  Ом, емкость  $C = 0.17$  мкФ. Теоретическая постоянная времени состави  $\tau = 0.016$  мс.

2) Верхняя граничная частота теоретически составляет  $f_0 \approx 9.9$ , на практике же верно  $f_0 \approx 10.2$  кГц, что с учетом некоторой погрешности снятия точки совпадает с теорией.

Замеры коэффициента передачи от частоты приведены ниже

$f_0$ , кГц	$K$
2.6	0.58
5.1	0.57
10.2	0.43
20.4	0.25
40.8	0.14
81.6	0.07
163	0.04

## Граф Бode цепи



3) Генератор прямоугольных сигналов показывает время  $\tau = 13$  мкс, что в рамках частоты составляет  $f_0 = 12.2$  кГц.

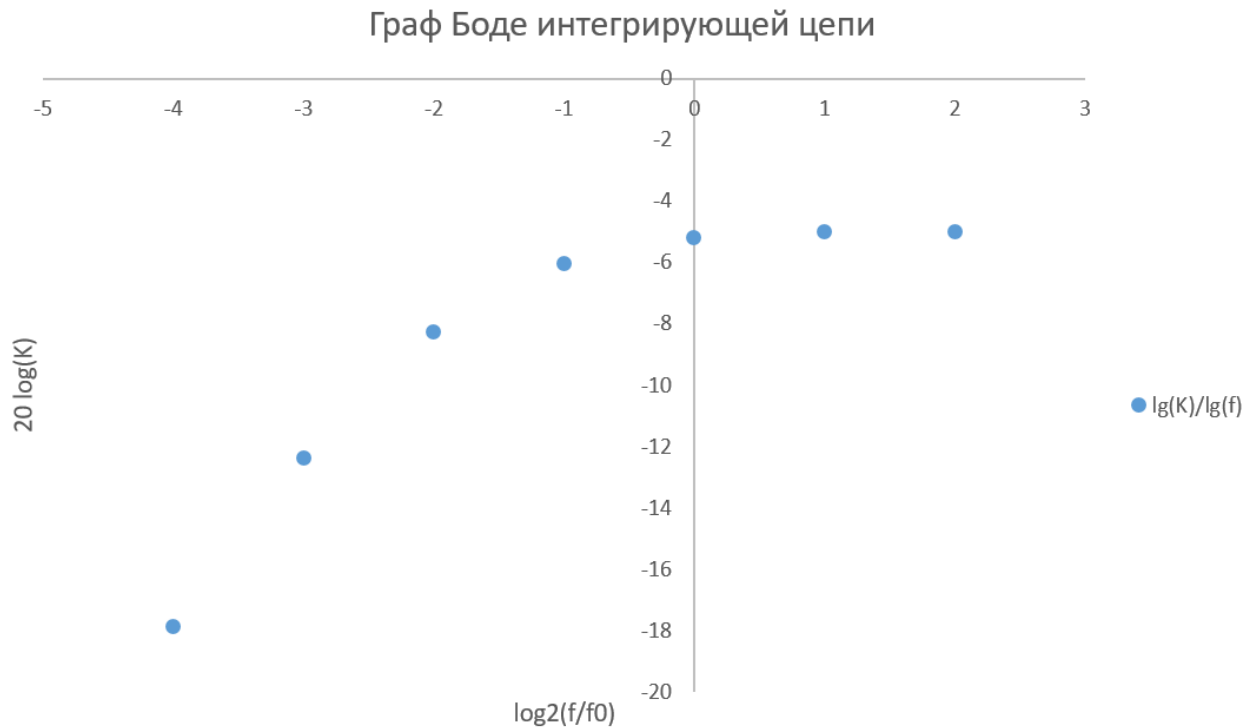
4) Проведем подобные расчеты для интегрирующей цепи

Граничная частота составит  $f_0 = 8.47$ .

Замеры коэффициента передачи от частоты приведены ниже

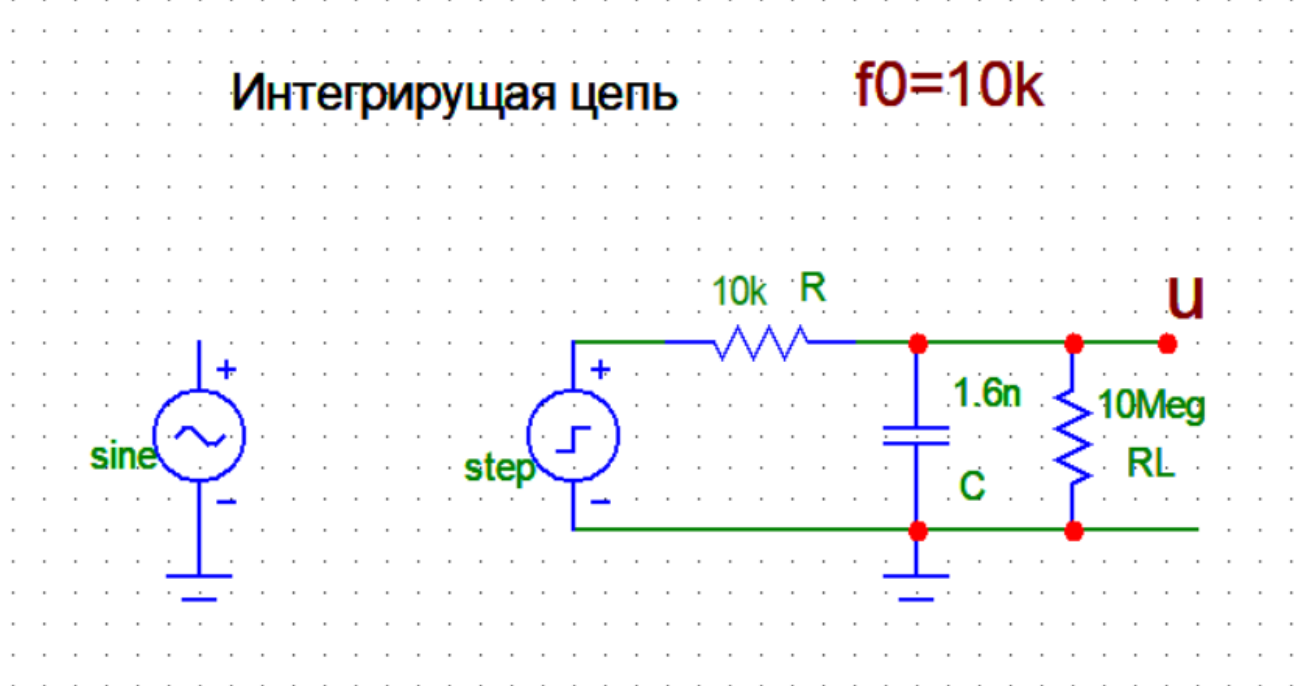
$f_0$ , кГц	$K$
0.53	54.6
1.06	87.5
2.12	0.43
4.24	0.25
8.47	0.14
16.9	0.07
33.9	0.04

## Граф Боде цепи

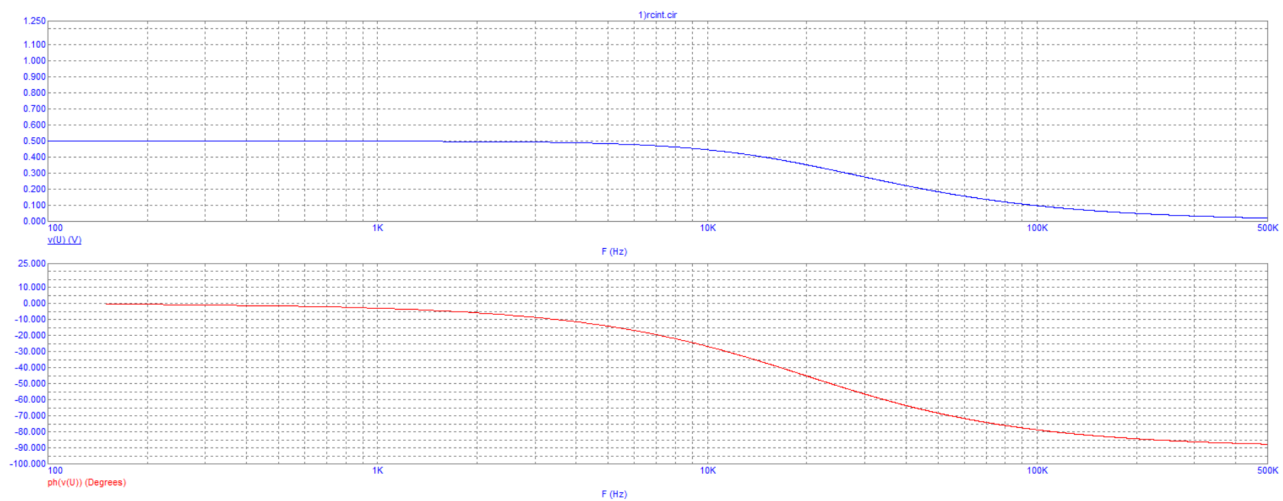


Генератор прямоугольных сигналов показывает время  $\tau = 15$  мкс, что в рамках частоты составляет  $f_0 = 10.6$  кГц.

5) Откроем в MicroCap модель rcint.cir. Изучим графики частотной и фазовой характеристики.

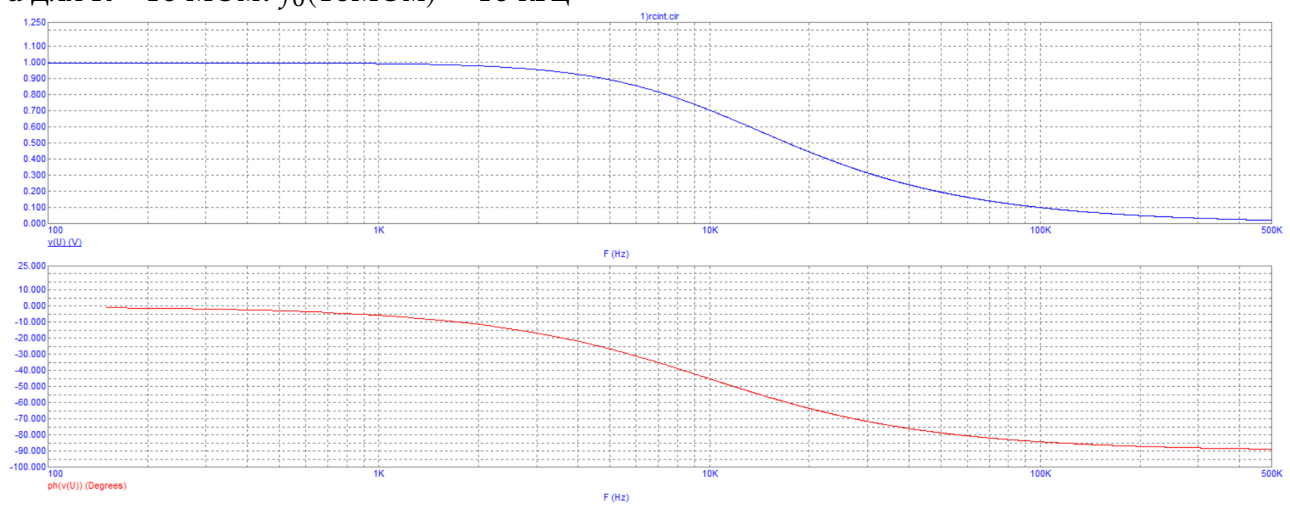


По графику видно, что передаточная функция цепи для  $R = 10$  кОм принимает вид;  
 $f_0(10\text{кОм}) = 20$  кГц

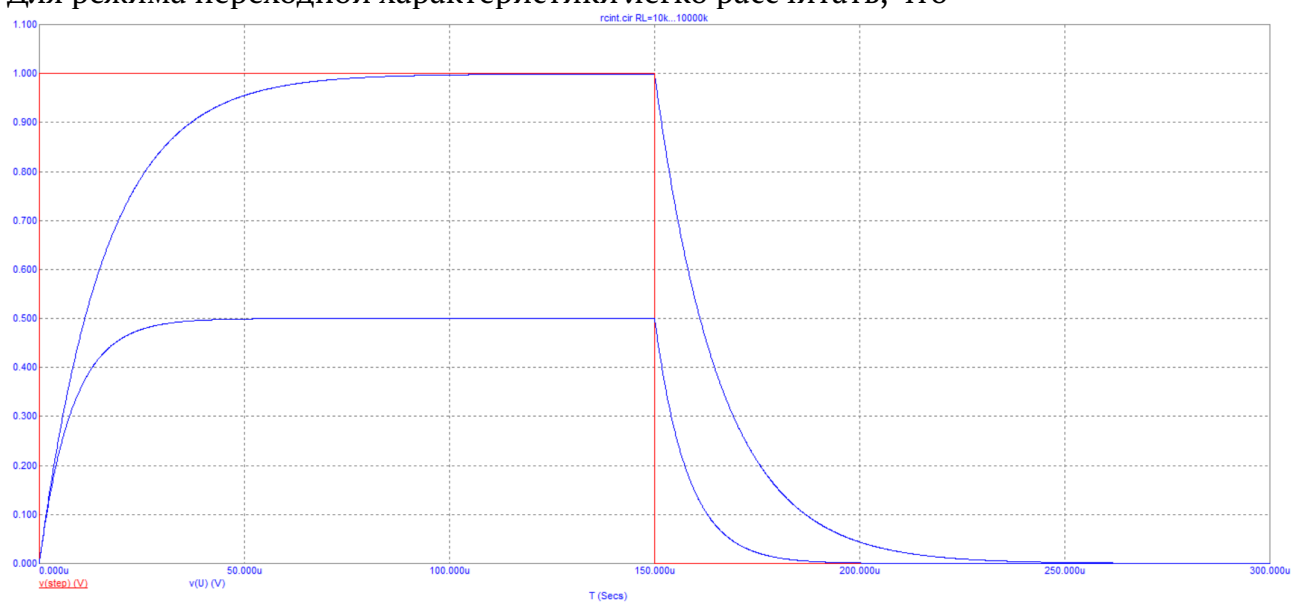


1

а для  $R = 10 \text{ МОм}$ :  $f_0(10\text{МОм}) = 10 \text{ кГц}$



Для режима переходной характеристики легко рассчитать, что



$$R_L = 10 \text{ кОм}: \tau = 8.014 \text{ мкс}$$

$$R_L = 10 \text{ МОм}: \tau = 16.027 \text{ мкс}$$

что почти идеально совпадает с теоретическими значениями

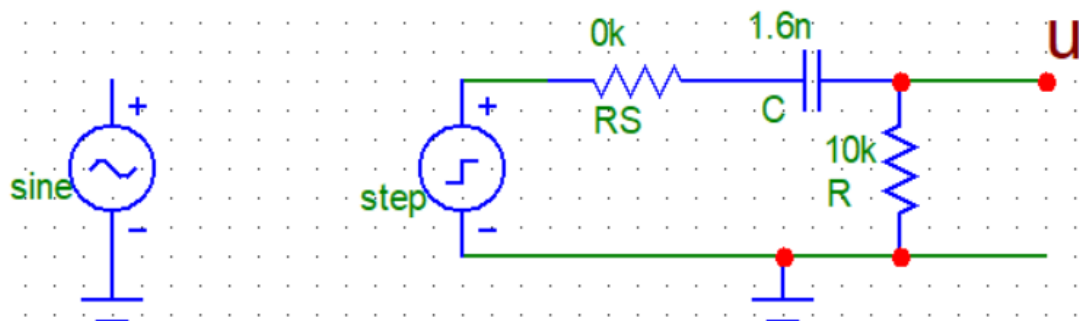
$$R_L = 10 \text{ кОм}: \tau = 8 \text{ мкс}$$

$$R_L = 10 \text{ МОм}: \tau = 15.984 \text{ мкс}$$

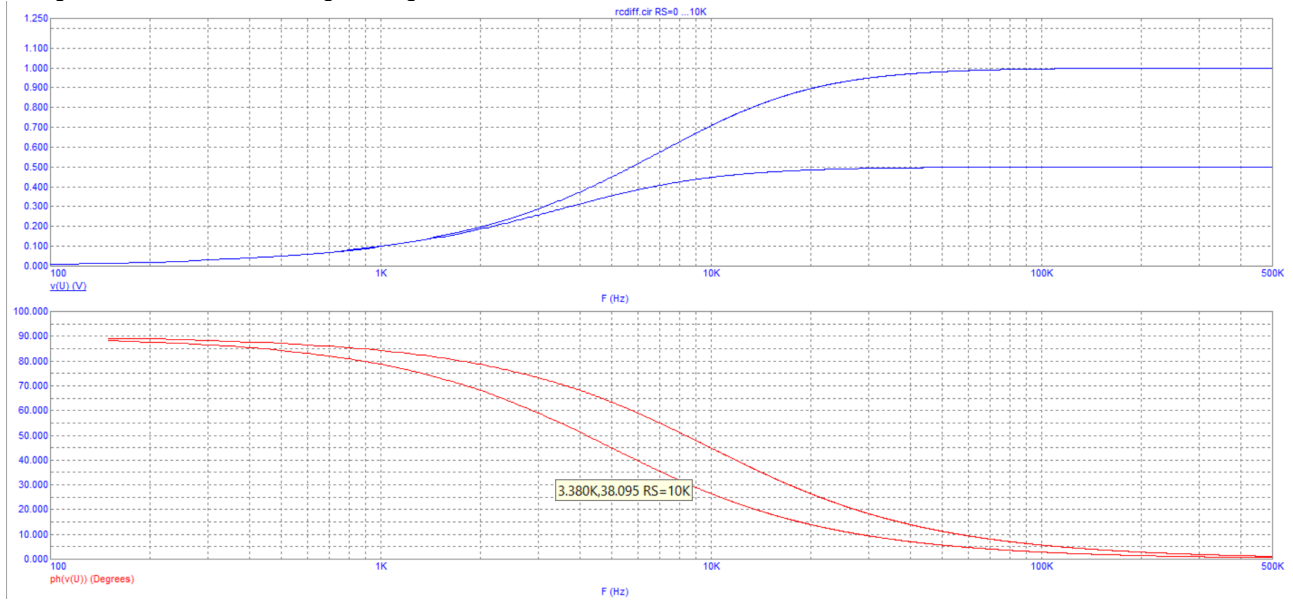
6) Рассмотрим модель rcdiff.cir.

Дифференцирующая цепь

$f_0 = 10 \text{ к}$



## Её фазо-частотная характеристика



## Передаточная функция при этом

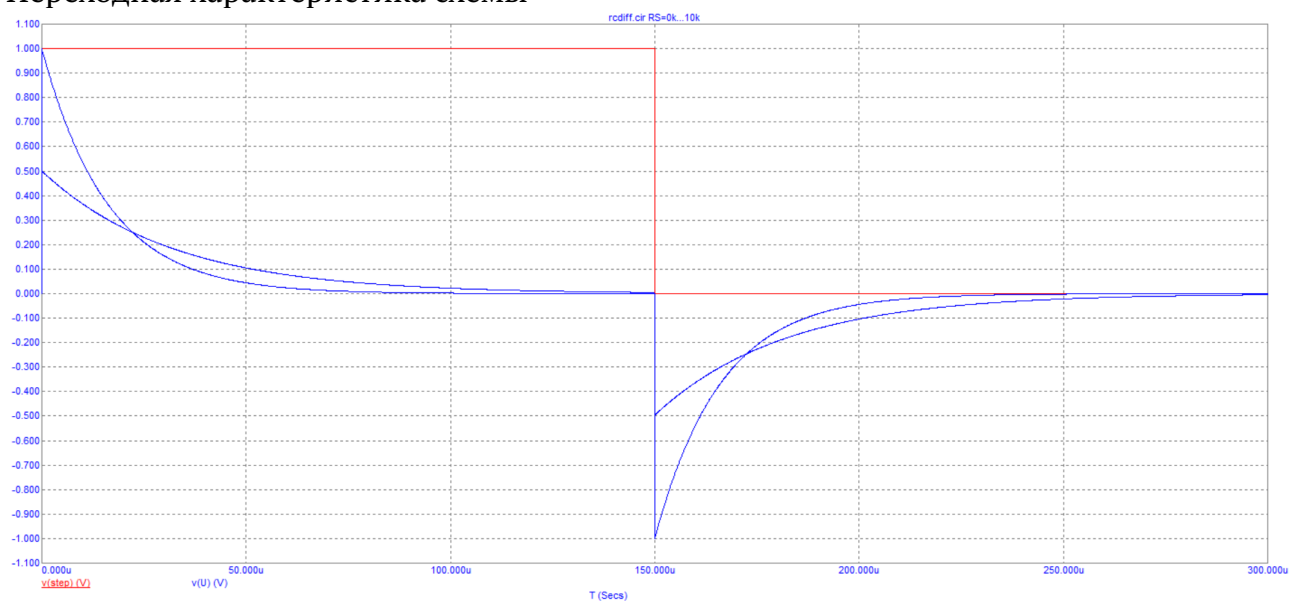
$$H(p) = \frac{K_0 p \tau}{1 + p \tau} ; K_0 = \frac{R}{R + R_S} ; \tau = (R + R_S)C$$

## Верхняя частота же

$$R_S = 0; f_0 = 10 \text{ кГц}$$

$$R_S = 10 \text{ кОм}, f_0 = 5 \text{ кГц}$$

## Переходная характеристика схемы



## Постоянная времени

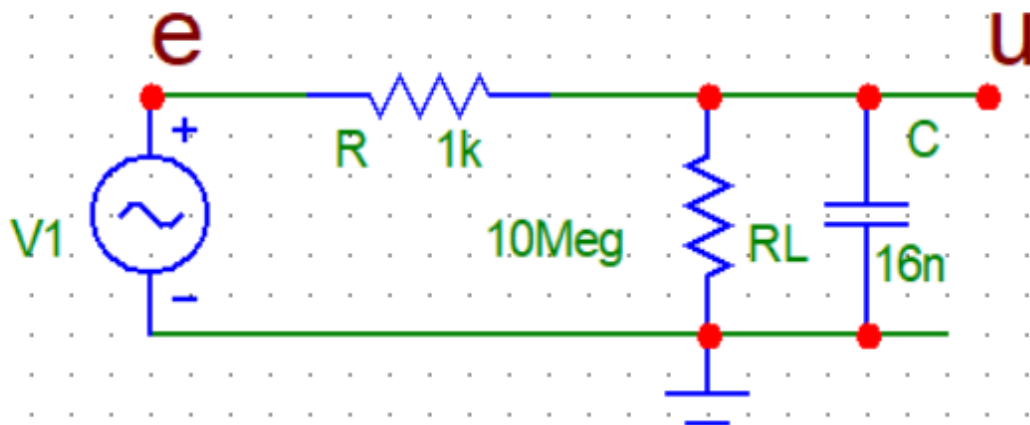


$$R_S = 0; \tau = 16.071 \text{ мкс}$$

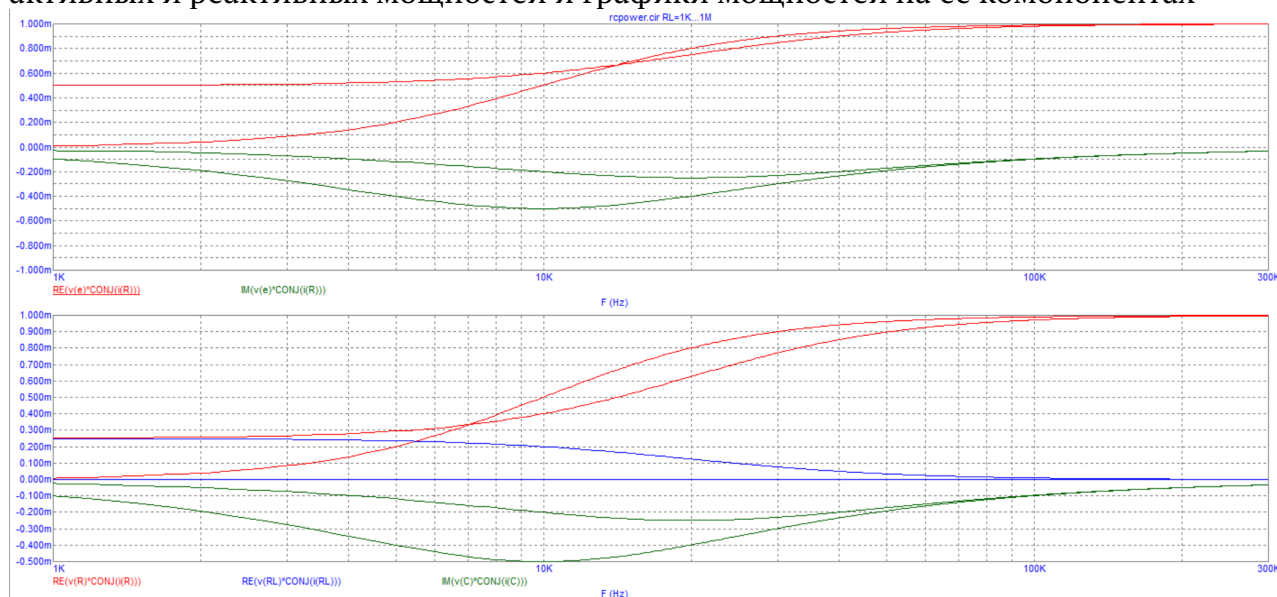
$$R_S = 0 \text{ кОм}, \tau = 32.141 \text{ мкс}$$

7) Откроем модель rcpower.cir.

## Мощности в интегрирующей цепи



Изучим графики частотной зависимости потребляемых интегрирующей цепью активных и реактивных мощностей и графики мощностей на её компонентах



Видно, что у реактивной компоненты потребление становится максимальным при частоте  $f_0 = 10$  кГц, и стремится к нулю при частоте  $f = 0$  и  $f = \infty$ .

При  $f = f_0$  выполняется закон сложения мощностей, то есть модули действительной и комплексной частей мощности одинаковы.

Подключая и отключая резистор  $R_L$  варьированием  $[1k, 1Meg | 1Meg](1Meg = \infty)$ , изучим его влияние на распределение мощностей в схеме при  $f = f_0$ .

При уменьшении значения сопротивления резистора  $R_L$ , его мощность возрастает до 0.2 мВт вместо нуля, мощность на резисторе  $R$  падает до 0.4 мВт с 0.5 мВт, а реактивная мощность конденсатора падает до 0.2 с 0.5 мВт.

### 2.1.3 Вывод

В практической части задания теоретические расчеты довольно хорошо согласуются с практикой, граф Боде же качественно демонстрирует состоятельность выбранной модели. У соответствующего подбора сопротивлений и емкостей есть существенный спад коэффициента передачи при низких частотах, что связано непосредственно с неидеальностью генератора, но в данном случае эта область достаточно далека от исследуемого диапазона, чтобы её можно было не учитывать.

## 2.2 RC-звенья второго порядка

### 2.2.1 Теория

Передаточная функция произвольной двухполюсной системы приводится к виду  $H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + 2\xi s + 1}$  и представляется взвешенной суммой передаточных функций

полиномиальных звеньев трех типов - фильтра верхних частот (ФВЧ), полосового фильтра (ПФ) и фильтра нижних частот (ФНЧ):

$$H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + 2\xi s + 1} = a \frac{s^2}{s^2 + 2\xi s + 1} + b \frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1} + c \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}.$$

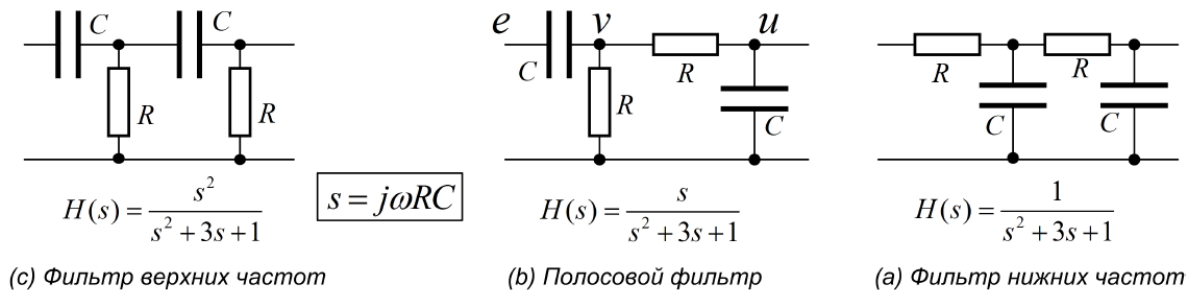
Эти звенья различаются положением нулей - у ФВЧ имеется нуль кратности два в нуле, у ФНЧ - нуль кратности два в бесконечности. Полосовой фильтр (ПФ) занимает промежуточное положение: один нуль в бесконечности, второй - в нуле.

При малых добротностях  $Q = \frac{1}{2\xi} < \frac{1}{2}$  такие звенья удастся реализовать каскадным соединением звеньев первого порядка, как показано на рис. 13. Выбор пар одинаковых резисторов и конденсаторов дает звенья с  $2\xi = 3, Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{3}$ . Полюсы их передаточных функций вещественны и находятся в точках  $s_{\pm} = -\mu_{\pm}$ ,  $\mu_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  ( $\mu_+ \simeq 2.62, \mu_- \simeq 0.38$ ).

Комплексный коэффициент передачи полосового звена с  $H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 1} \cdot s = \frac{j\omega}{\omega_0}$  приводится к виду

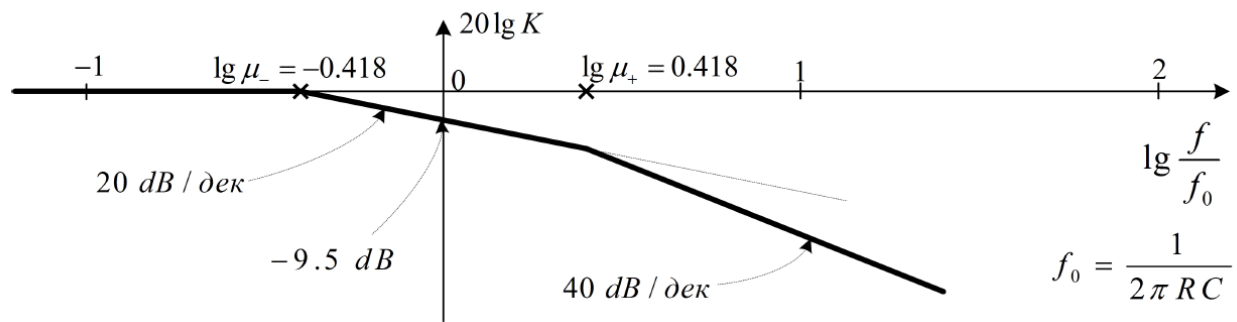
$$K(j\omega) = \frac{1}{3 + \left(s + \frac{1}{s}\right)} = \frac{1}{3(1 + ja(\omega))}; \quad a(\omega) = \frac{1}{3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Коэффициент передачи ФВЧ отличается множителем  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$  в числителе, а коэффициент передачи ФНЧ - таким же множителем в знаменателе.



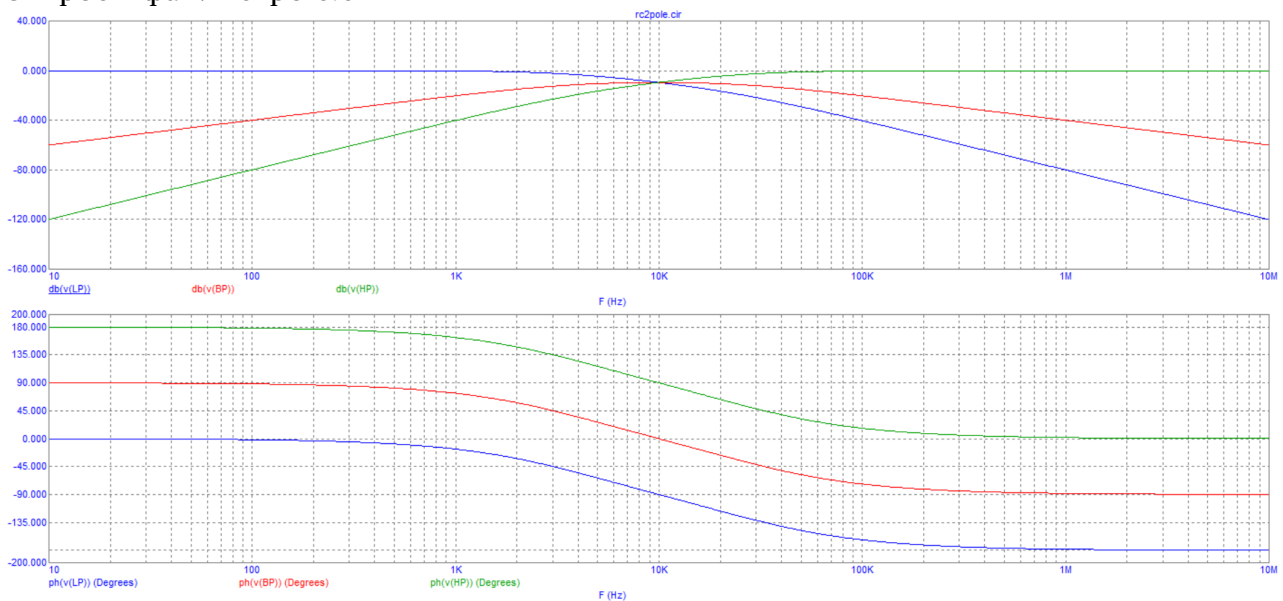
Граф Бode фильтра нижних частот показан на рис. На логарифмической оси относительной частоты  $lg \frac{f}{f_0}$  показаны два полюса  $lg \mu_{\pm} = lg \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$ . Ломаная линия графа приходит из минус бесконечности (от нулевой частоты) с уровнем 0 dB. Излом в полюсе  $\mu_-$  добавляет спад со скоростью 20 dB на декаду. Второй излом в полюсе  $\mu_+$  поднимает скорость спада до 40 dB на декаду. В нуле, на частоте  $f_0$ , достигается затухание  $\frac{1}{3} = -9.5$  dB.

Переходные характеристики звеньев являются линейными комбинациями быстро и медленно затухающих экспонент  $e^{-(\mu_+)\frac{t}{\tau}}, e^{-(\mu_-)\frac{t}{\tau}}$ ,  $\tau = RC$ . Характерные времена спада этих экспонент различаются в  $\frac{\mu_+}{\mu_-} = 7$  раз.



## 2.2.2 Выполнение

Откроем файл rc2pole.cir



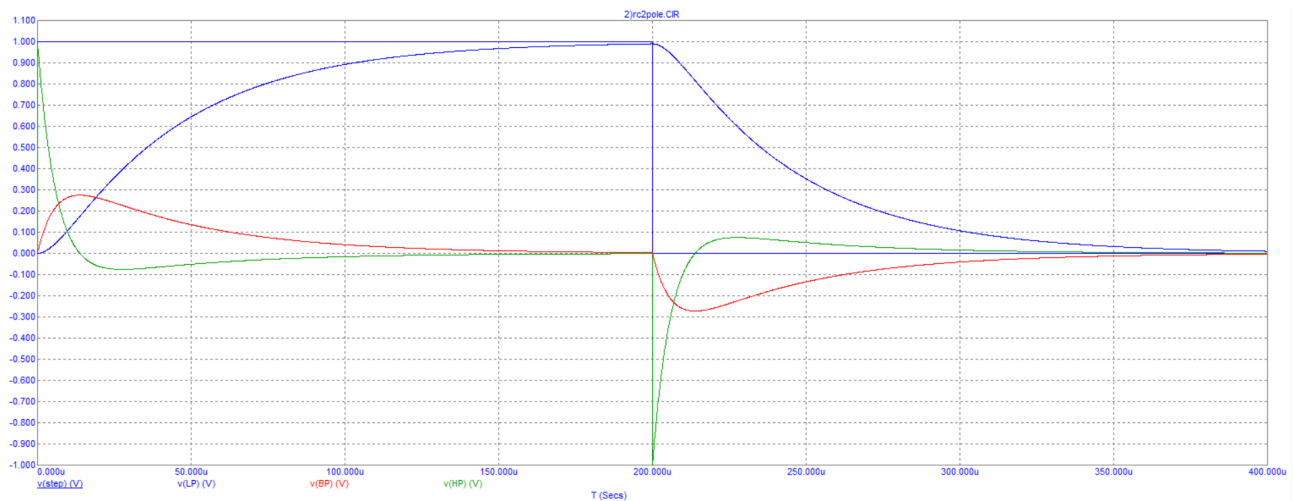
По графикам определим затухание на частоте  $f_0 \approx 10$  кГц, оно равно  $-9.55$  дБ и скорость его нарастания в полосах задержания  $-40.4 + 9.55 = -30.85$  дБ/декаду. По графикам ФЧХ измерим значения фазовых сдвигов ФВЧ, ПФ и ФНЧ на частотах  $0$ ,  $f_0$ ,  $\infty$ .

	ФВЧ	ПФ	ФНЧ
$0$	180	90	0
$f_0$	90	0	-90
$\infty$	0	-90	-180

Двухсторонняя полоса  $\Delta f$  пропускания ПФ  $\approx 29.76$  кГц, что в три раза больше  $f_0$ . Это совпадает с теорией.

2) Откроем графики переходных характеристик

Оценим время спада  $\tau_-$  первого выброса переходной характеристик ФВЧ до уровня  $1/e \approx 0,37$ :



$$\tau_- = 4.97 \text{ мкс}$$

Оценим время нарастания  $t_+$  фронта переходной характеристики ФНЧ до уровня  $1 - 1/e \approx 0.63$ :

$$\tau_+ = 48.5 \text{ мкс}$$

Найдем их отношение:

$$\frac{\tau_+}{\tau_-} = 9.76$$

### 2.2.3 Вывод

Теория хорошо совпадает с моделированием

## 2.3 Мостовые схемы

### 2.3.1 Теория

Полезными специфическими свойствами отличаются схемные решения с топологией мостов, рис. 16а. Мостовую конфигурацию образуют четыре соединенные прямоугольником импеданса. Входной сигнал е прикладывается к одной диагонали моста, а выходной и снимается с другой.

Выходной сигнал моста является разностным (дифференциальным). Он получается вычитанием выходов левого ( $Z_1/Z_2$ ) и правого ( $Z_3/Z_4$ ) делителей напряжения. Передаточная функция моста это разность передаточных функций двух делителей.

Вычитание дает эффект взаимной компенсации сигналов, поступающих на выход моста по одному и другому пути. Это приводит к передаточным функциям с нетипичным расположением нулей - мостовыми схемами реализуются неминимально фазовые системы с нулями в правой полуплоскости и системы с комплексно-сопряженными парами нулей.

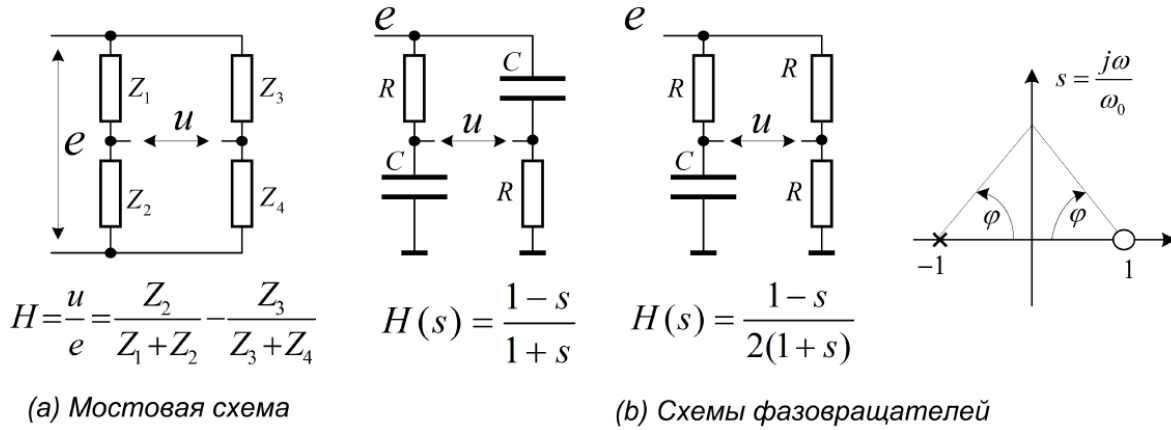


Рис. 16. Мостовые схемы

Простые примеры неминимально фазовых цепей показаны на рис. 16b. Их передаточные функции имеют полюс в левой полуплоскости при  $s = -1$  и симметрично расположенный нуль в правой полуплоскости при  $s = 1$ . Модуль коэффициента передачи этих цепей постоянен: расстояния от точки  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$  до полюса и нуля всегда одинаковы. Фазовая же характеристика отличается аномально большим набегом фазы вклад полюса, изменяющийся от нуля до  $-\pi/2$ , суммируется с таким же вкладом нуля. Результатом становится фазовая характеристика  $\phi(\omega) = -2\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  с вариацией от нуля до  $-\pi$ .

Схема двойного Т-моста на рис. 17 топологически представляет собой фазовращатель на рис. 16b, в выходную диагональ которого включена дополнительная RC-цепочка. Приведенная на рисунке передаточная функция моста замечательна наличием пары комплексно сопряженных нулей в точках  $\pm j$  на мнимой оси  $s$ -плоскости. Ее полюсы вещественны и расположены в точках  $s = -\mu_{\pm}$ ,  $\mu_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}$  ( $\mu_+ \simeq 3.73$ ,  $\mu_- = 0.27$ ,  $\mu_+/\mu_- \simeq 14$ ). Нули на мнимой оси дают эффект обращения в нуль модуля коэффициента передачи при  $s = j$ , то есть при  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$ .

Двойной Т-мост это режекторный фильтр, который полностью подавляет частоту  $\omega_0$ . Его комплексный коэффициент передачи приводится к виду

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{4}{ja(\omega)}}; a(\omega) = \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Границы полосы режекции по уровню  $\frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$  достигаются при  $|a| = 4$ . Это дает  $\Delta\omega = 4\omega_0$

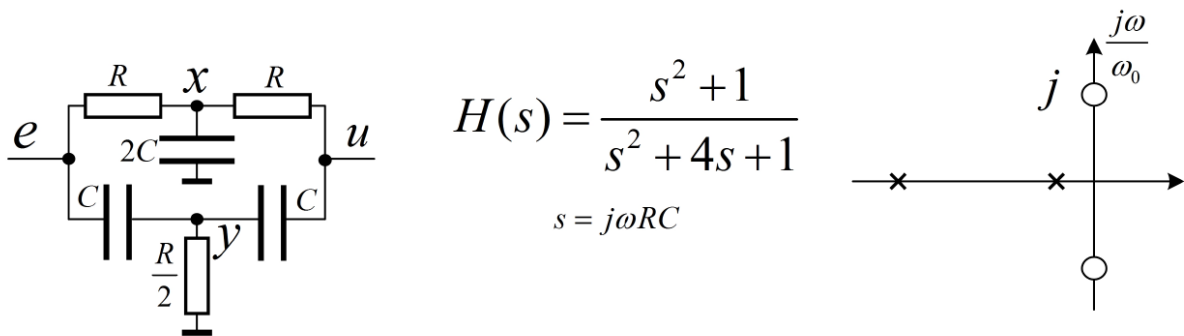
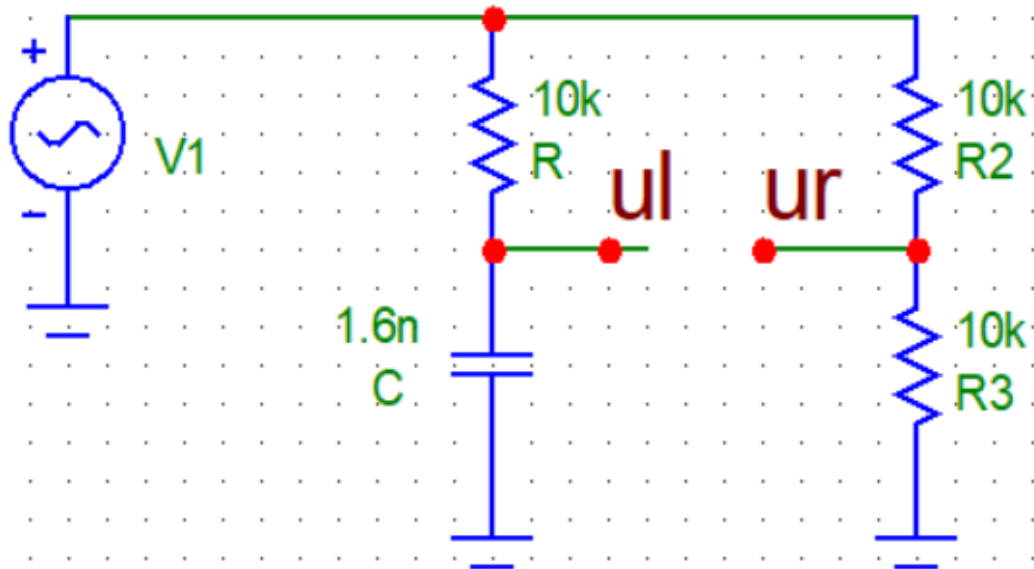


Рис. 17. Двойной Т-мост

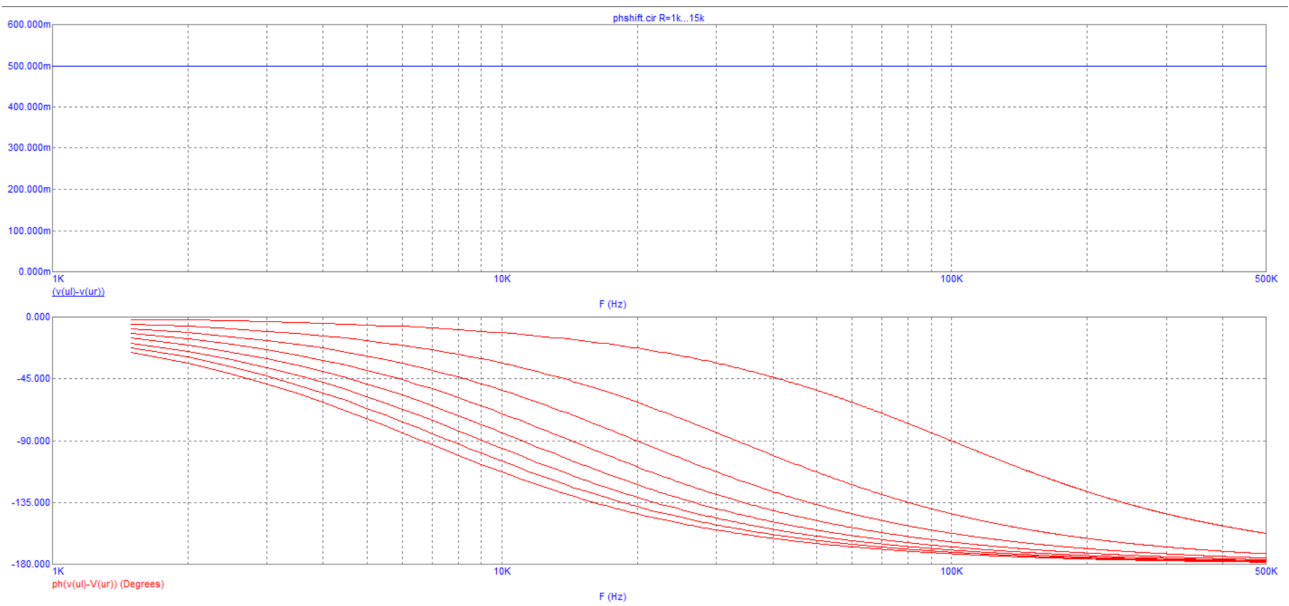
### 2.3.2 Выполнение

1) Откроем модель фазовращателя(phshift.cir)

## Фазовращатель

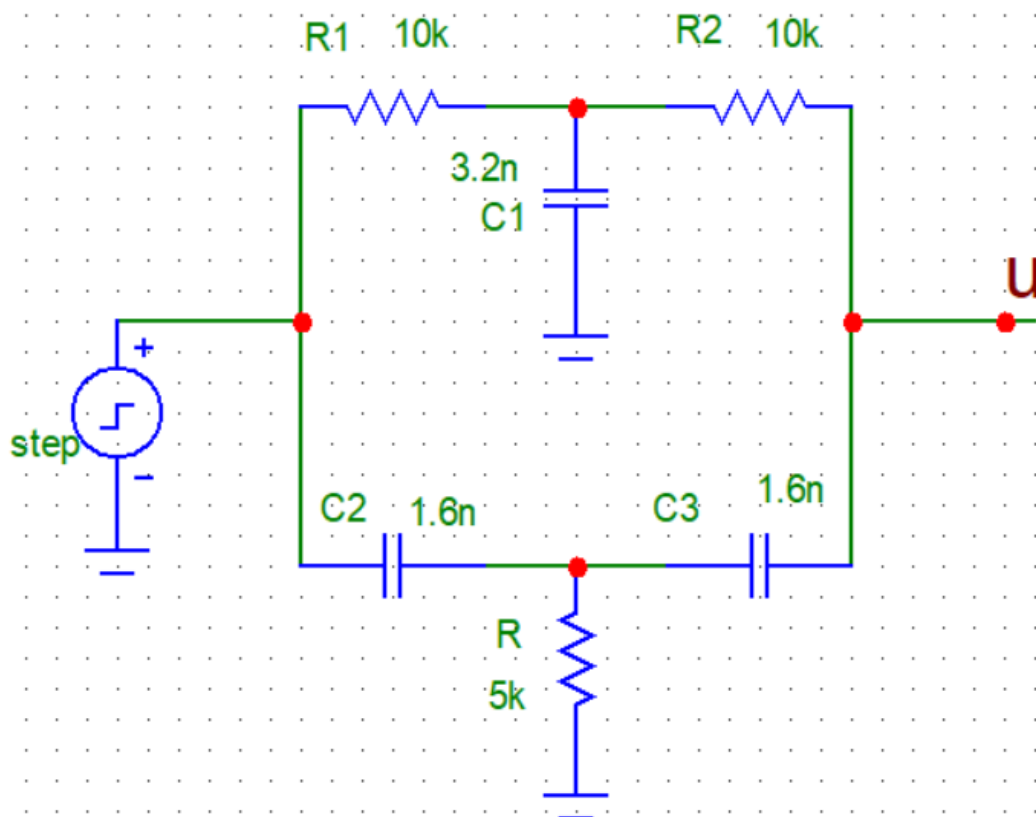


Наибольший диапазон перестройки реализуется на частоте  $f = 20 \text{ кГц}$ . Границы этого диапазона  $[-154.9; -33.4]$ .



2) Откроем модель двойного Т-моста 2tbridge.cir.

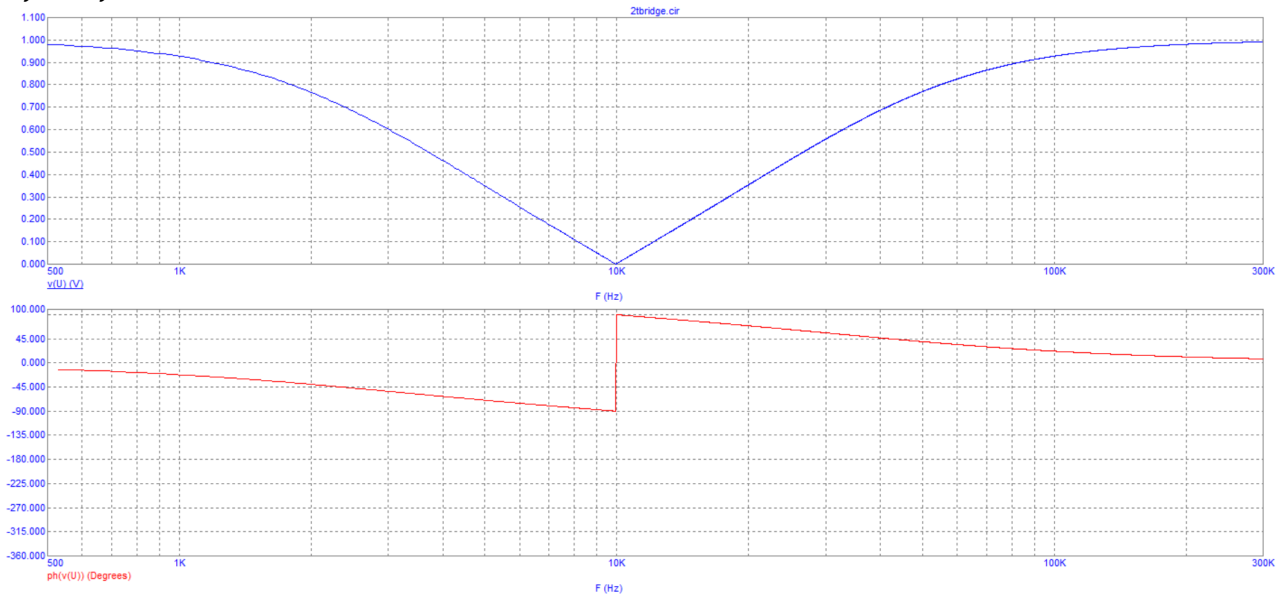
## ДВОЙНОЙ Т-МОСТ



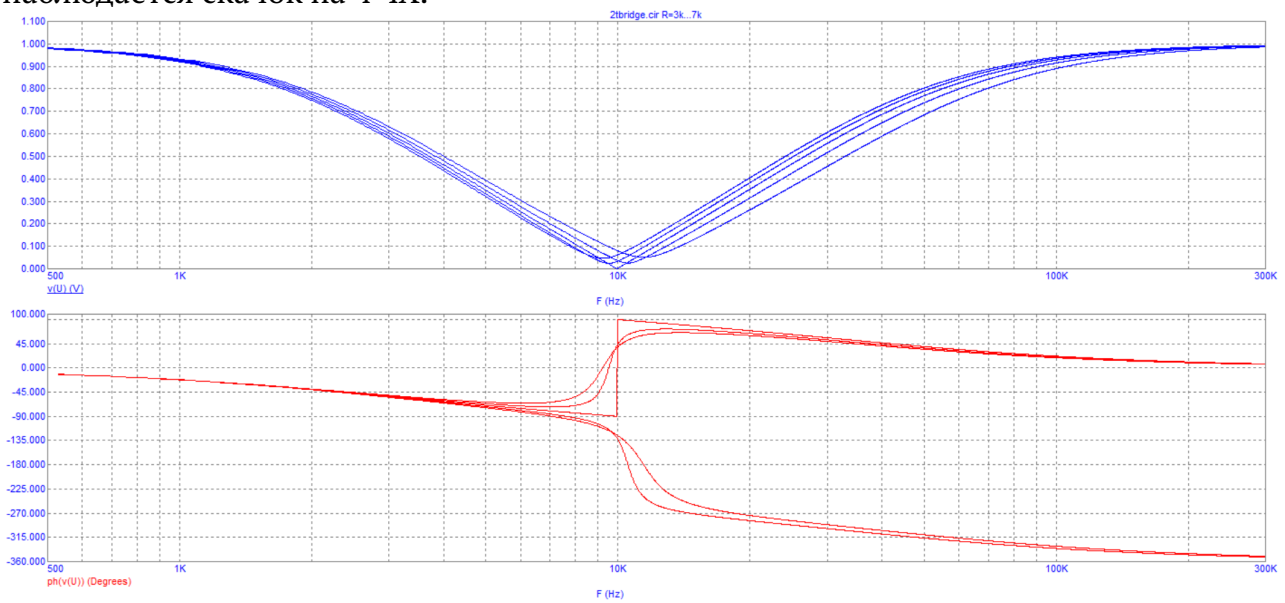
Измерим полосу режекции  $\Delta f = 38.98$  кГц.  $f_0 = 10$  кГц, следовательно выполняется

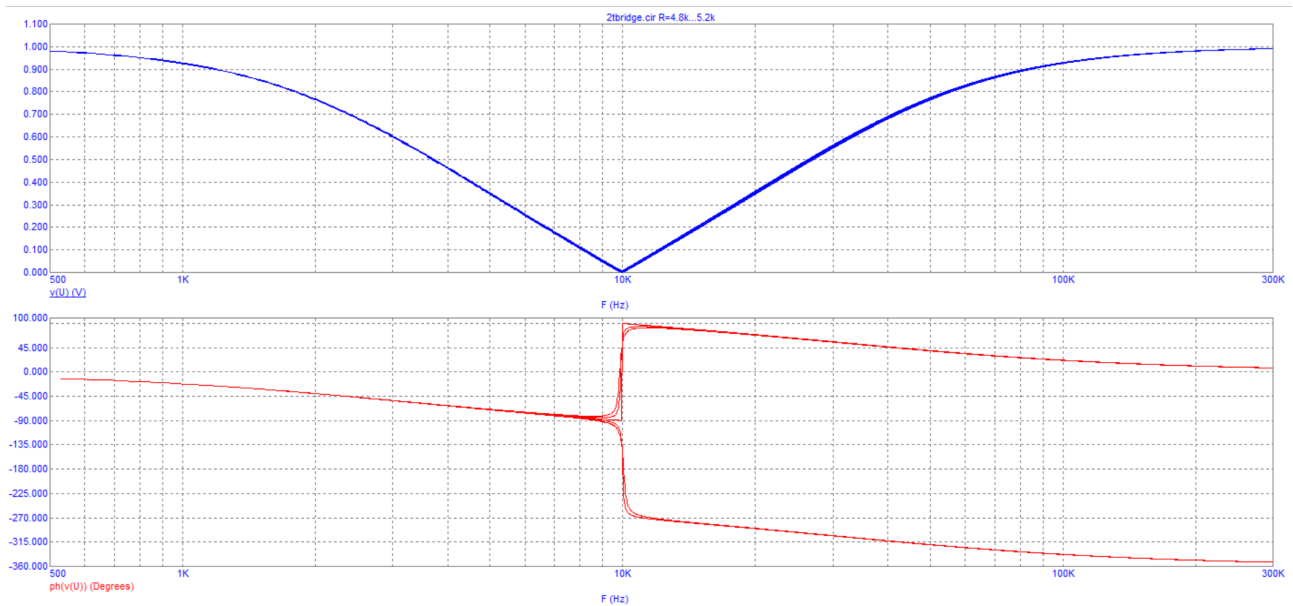


$$\Delta f = 4f_0.$$



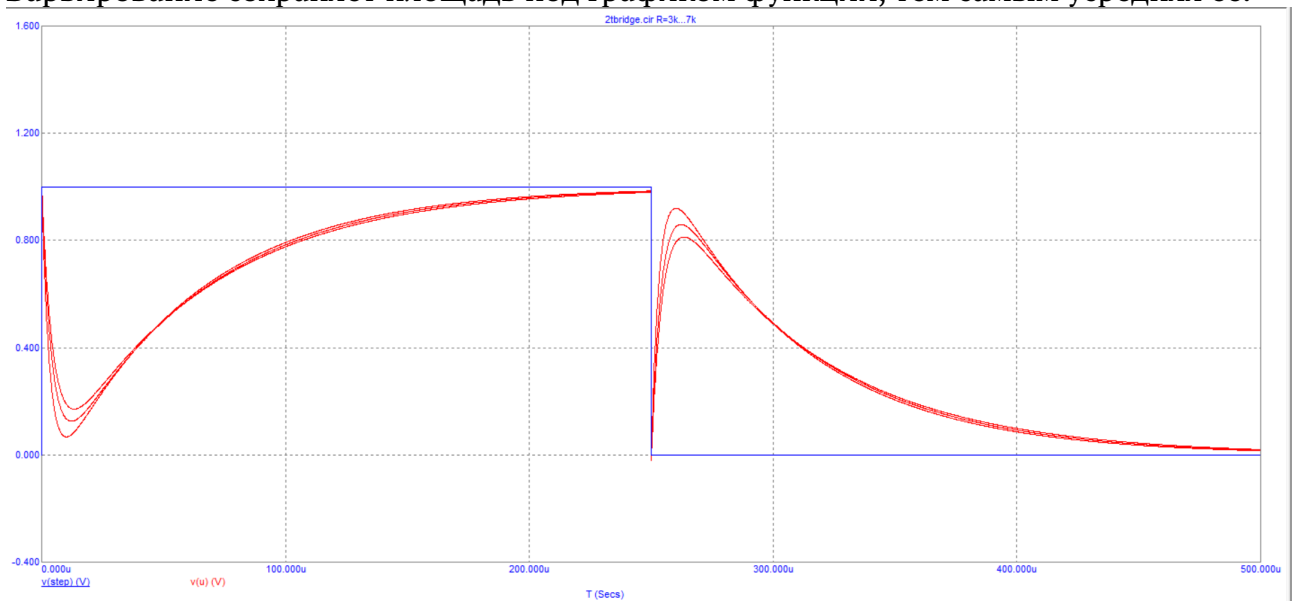
При варьировании сопротивления, при его росте,  $f_0$  падает. При  $R = 5 \text{ кОм}$  наблюдается скачок на ФЧХ.





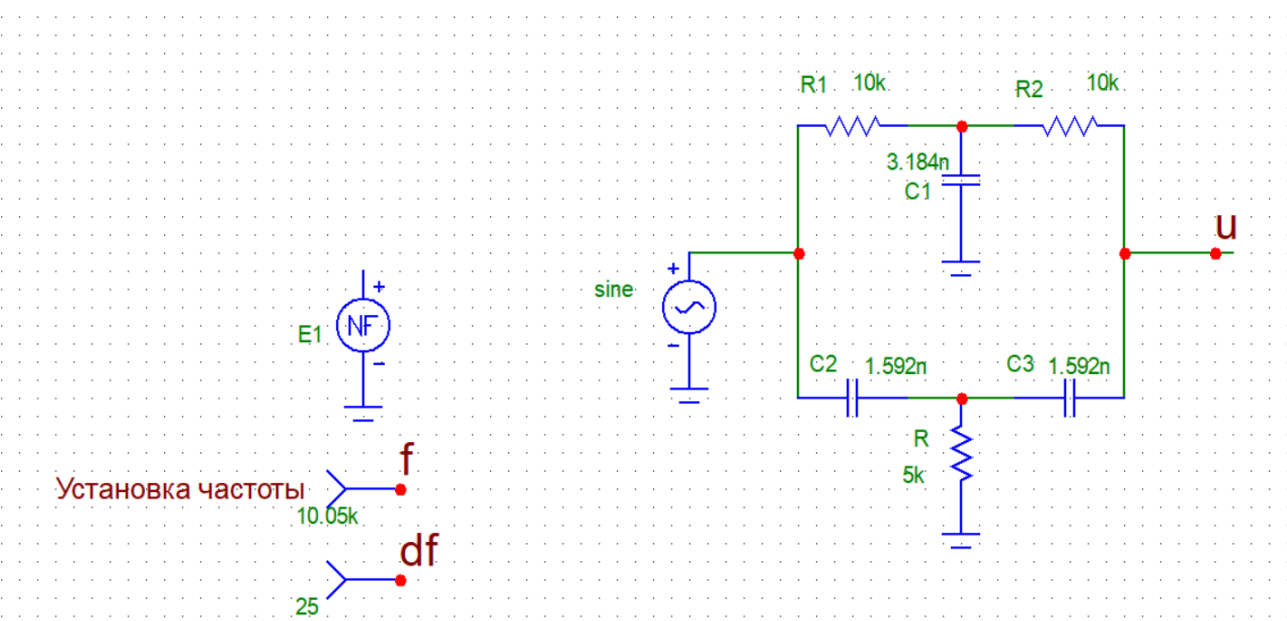
3) Подключив ко фходу источник прямоугольного импульса, проанализируем переходную характеристику.  $\tau_+ = 4$  мкс,  $\tau_- = 58$  мкс. Это сходится с теоретическими значениями ( $\tau = \frac{1}{2\pi f_0 \mu_{\pm}}$ ,  $\mu_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}$ )

Варьирование сохраняет площадь под графиком функции, тем самым усредняя её.

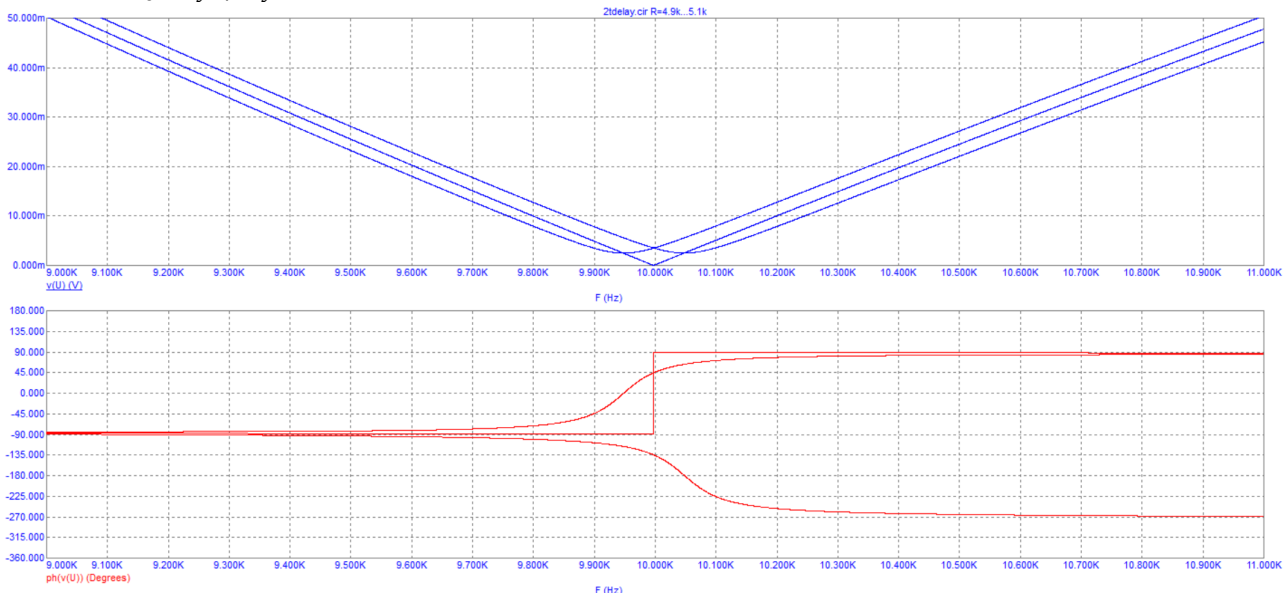


4) Откроем модель 2tdelay.cir

Групповые задержки в двойной Т-мосте



Оценим  $Q = f_0/\Delta f$ .

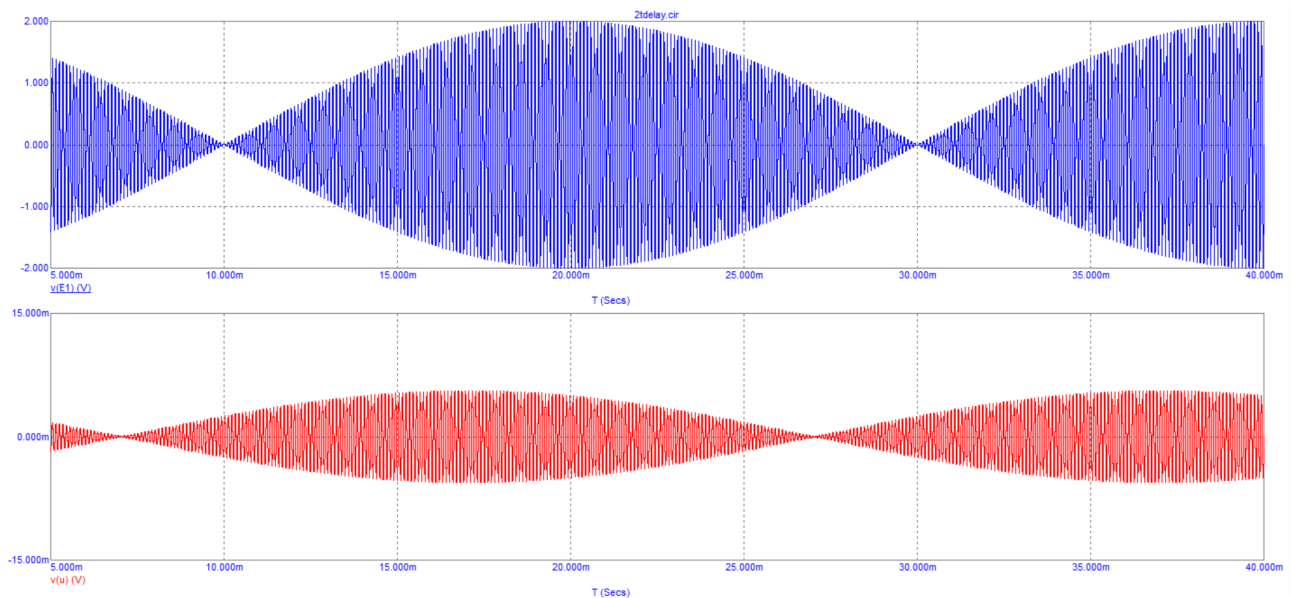


$R, \text{кОм}$	4.9	5	5.1
$f_0, \text{кГц}$	10.05	10	9.95
$\Delta f, \text{кГц}$	0.05	$2.5 \cdot 10^{-4}$	0.05
$Q$	100.5	40000	99.5

В режиме Transient измерим групповые задержки  $\tau_g$

$$\tau_g = 2.94 \text{ мс}$$

для обоих R и f.



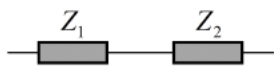
### 2.3.3 Вывод

Теория хорошо совпадает с практикой.

## 2.4 Последовательный резонанс

### 2.4.1 Теория

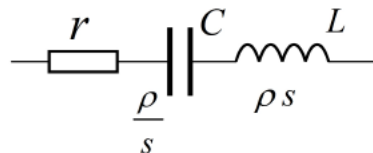
$$\text{Im}(Z_1(\omega)) + \text{Im}(Z_2(\omega)) = 0$$



$$\rho = |\text{Im}(Z_1)| = |\text{Im}(Z_2)|$$

$$r = \text{Re}(Z_1 + Z_2) \quad Q = \frac{\rho}{r}$$

(a) Последовательный резонанс



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad s = \frac{j\omega}{\omega_0}$$

$$\rho = \frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad Q = \frac{\rho}{r}$$

(b) Последовательный контур

Рис. 18. Явление последовательного резонанса

Явление последовательного резонанса наблюдается, когда на некоторой частоте положительный индуктивный импеданс одного двухполюсника компенсируется отрицательным емкостным импедансом другого, рис. 18а. Суммарный импеданс оказывается при этом вещественным  $Z_1 + Z_2 = r$ , а модули мнимых частей импедансов одинаковыми равными характеристическому сопротивлению  $\rho$ . На графике модуля суммарного импеданса в точке резонанса наблюдается выраженный провал, острота которого определяется добротностью резонанса  $Q = \frac{\rho}{r}$ .

В последовательном колебательном контуре, рис. 18b, резонанс наблюдается на

частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . На этой частоте модуль полного сопротивления контура падает до  $r$ . При характеристическом сопротивлении  $\rho = \frac{L}{C}$  это дает добротность  $Q = \frac{\rho}{r}$ . Полный импеданс контура принимает вид

$$Z(s) = r + \rho \left( s + \frac{1}{s} \right) = r (1 + ja(\omega)) ; a(\omega) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

На базе последовательного контура можно построить все три варианта полиномиальных двухполюсных звеньев - фильтр нижних частот (ФНЧ), полосовой фильтр (ПФ) и фильтр верхних частот (ФВЧ), рис. 19. При  $Q > \frac{1}{2}$  ( $2\xi < 1$ ) передаточные функции этих фильтров имеют пару комплексно сопряженных полюсов  $s_{\pm} = -\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2}$ ;  $s = \frac{p}{\omega_0}$  на единичной окружности.

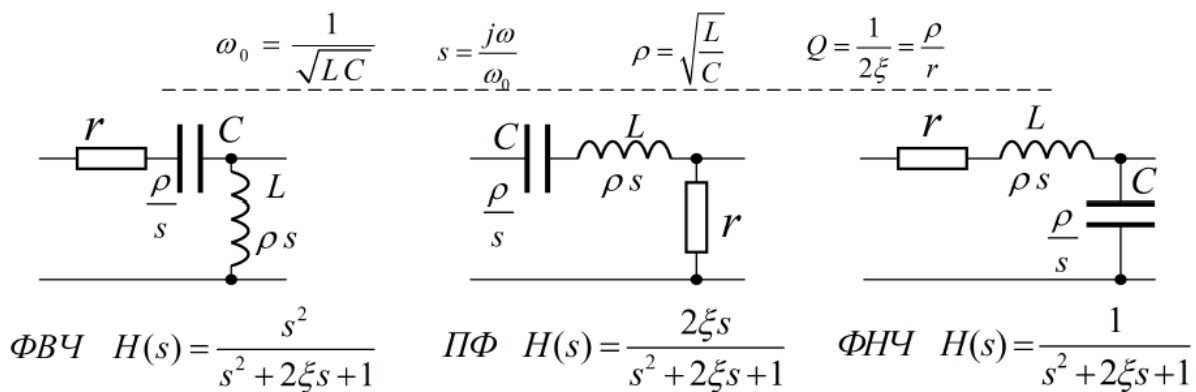


Рис. 19. Двухполюсные фильтры

Комплексный коэффициент передачи ПФ выражается через обобщенную расстройку:

$$a(\omega) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\xi} \left( s + \frac{1}{s} \right)} = \frac{1}{1 + ja(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2(\omega)}} e^{-j \arctg a(\omega)}.$$

У коэффициента передачи ФВЧ присутствует дополнительный множитель  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$  в числителе, у ФНЧ - такой же множитель в знаменателе. В окрестности резонанса, при  $\omega \simeq \omega_0$ , модули этих множителей малосущественны. Однако они дают существенные вклады  $\pm \frac{\pi}{2}$  в фазовые характеристики.

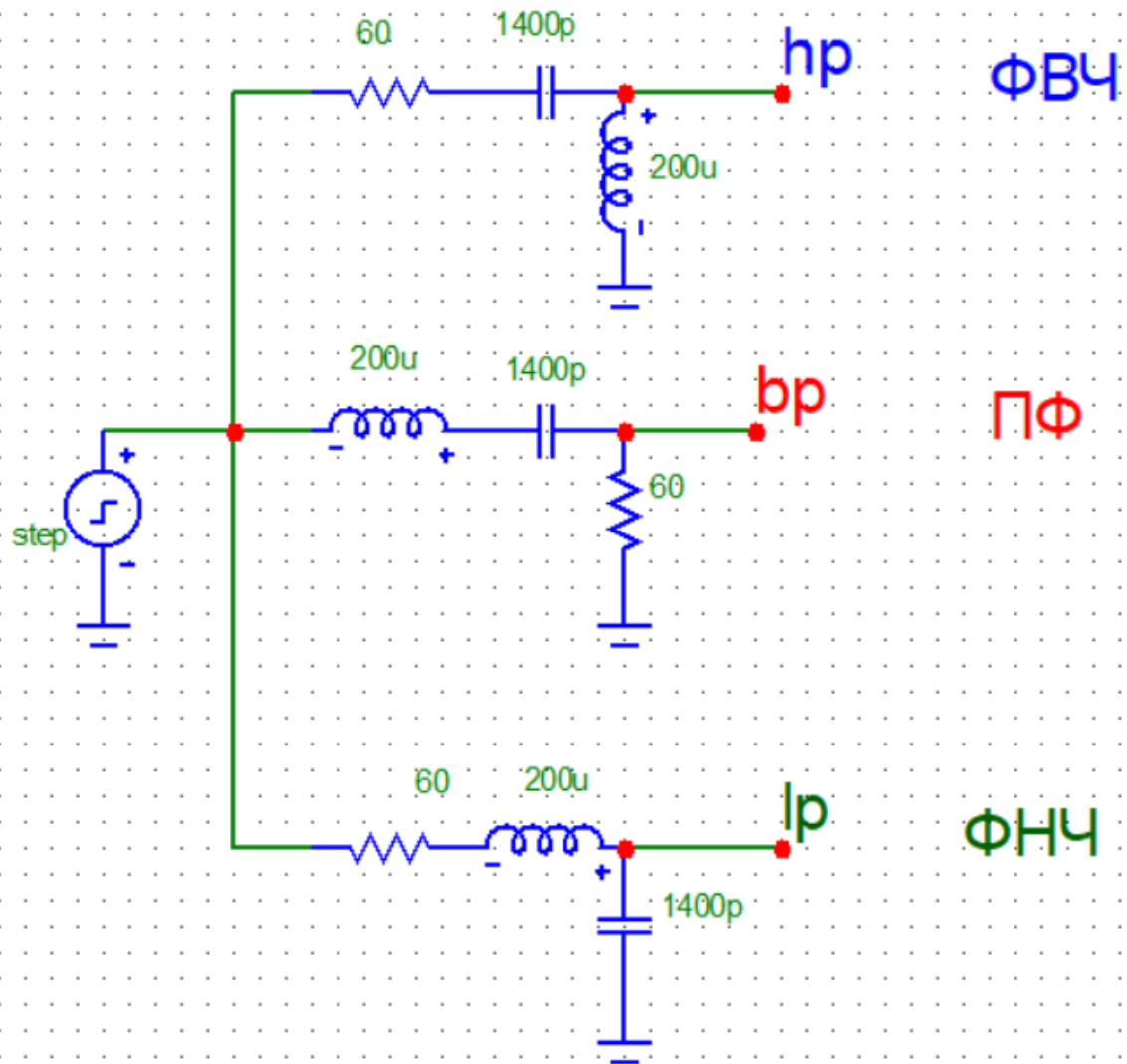
Комплексные полюсы проявляют себя колебательными процессами («звоном») на переходных характеристиках:

$$\begin{aligned} \text{ФВЧ :} & \quad h_0(u) = \frac{e^{-\xi u}}{\eta} \{ \eta \cos \eta u - \xi \sin \eta u \}; \\ \text{ПФ :} & \quad h_0(u) = \frac{e^{-\xi u}}{\eta} \sin \eta u; \\ \text{ФНЧ :} & \quad h_0(u) = \theta(u) - \frac{e^{-\xi u}}{\eta} \{ \eta \cos \eta u + \xi \sin \eta u \}, \end{aligned}$$

$$\text{где } u = \omega_0 t, \eta = \sqrt{1 - \xi^2}, 2\xi = \frac{1}{Q}.$$

## 2.4.2 Выполнение

### RLC-звенья



1) На макетной плате соберем схему полосового фильтра (его схема, как и схема ФНЧ и ФВЧ представлены на рисунке).

$$L = 220 \text{ мкГн}$$

$$C = 1 \text{ мкФ}$$

$$R = 91 \text{ Ом}$$

Измерим резонансную частоту и коэффициент передачи

$$f_0 = 364 \text{ кГц}$$

$$f_{min} = 298 \text{ кГц}$$

$$f_{max} = 443 \text{ кГц}$$

$$\Delta f = \frac{f_{max} - f_{min}}{2} = 73 \text{ кГц}$$

$$K(f_0) = \frac{1.947}{4} = 0.4867$$

$$Q = \frac{\Delta f}{f} = 5.0$$

2) Из тех же компонент соберем схемы ФВЧ и ФНЧ. Измерим для них резонансную частоту и отношения  $K(f_0)/K(0)$  для ФНЧ и  $K(f_0)/K(\infty)$  для ФВЧ.

$$Q = \frac{K(f_0)}{K(0)} = 5.18$$

$$Q = \frac{K(f_0)}{K(\infty)} = 4.1$$

3) Подключим генератор прямоугольных импульсов. Изучим переходные характеристики ФВЧ, ФНЧ и ПФ. Найдем по осциллограммам период колебаний и время их затухания до уровня  $\frac{1}{e}$  и дадим оценку резонансной частоты и добротности.

Для ФВЧ:

$$T = 2.8 \text{ мкс}$$

$$\tau = 0.45 \text{ мкс}$$

$$f_0 = 365 \text{ кГц}$$

$$Q = 6.2$$

Для ФНЧ:

$$T = 2.83 \text{ мкс}$$

$$\tau = 0.49 \text{ мкс}$$

$$f_0 = 352 \text{ кГц}$$

$$Q = 5.7$$

Для ПФ:

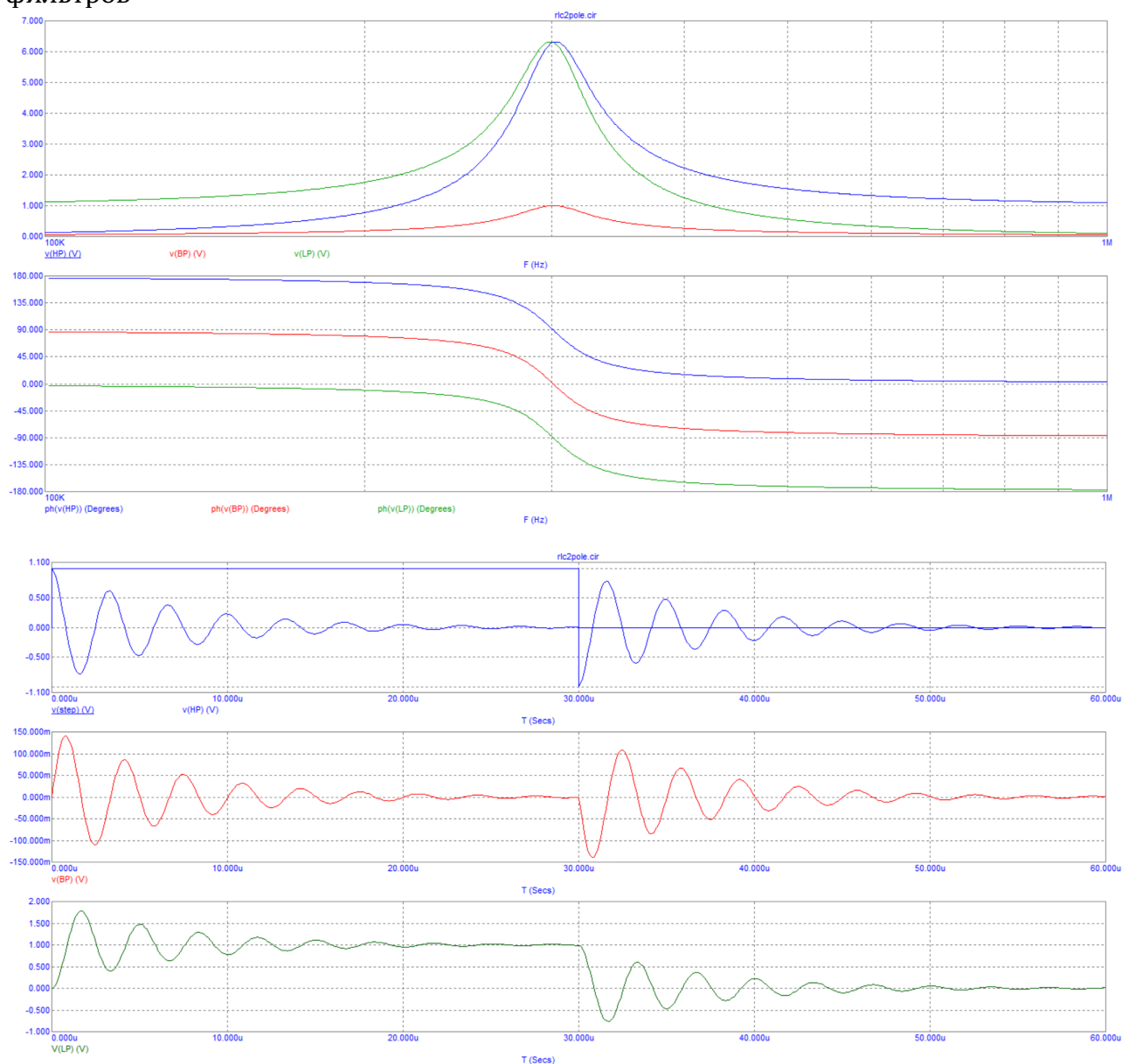
$$T = 2.84 \text{ мкс}$$

$$\tau = 0.51 \text{ мкс}$$

$$f_0 = 351 \text{ кГц}$$

$$Q = 5.6$$

4) Для модели rlc2pole изучим частотные фазовые и переходные характеристики фильтров



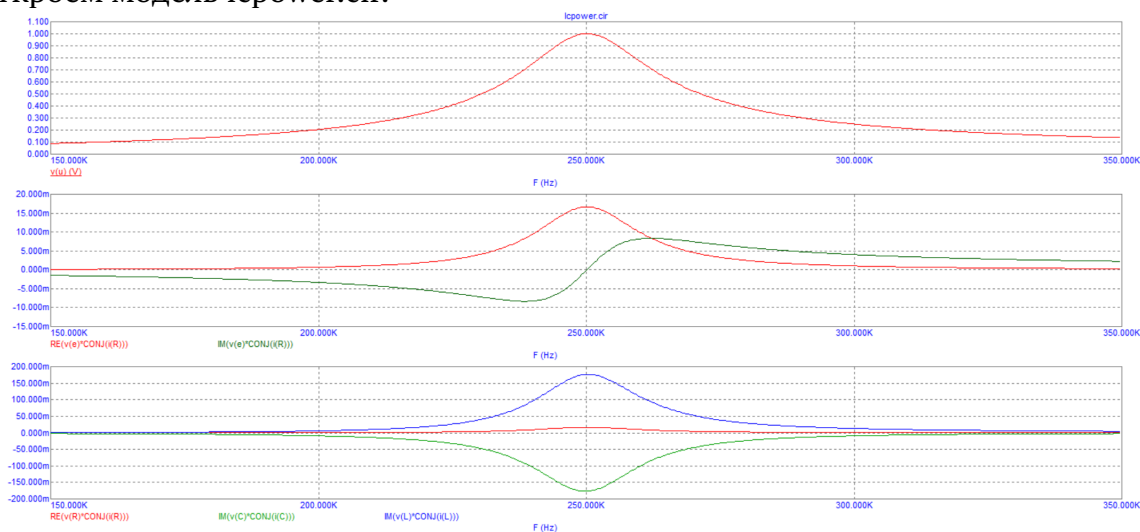


Собственно говоря, на фчх и ачх видна сама суть фильтров - отсеивать верхние, нижние частоты и диапазон, а на переходной отображены затухающие колебания.

5) Откроем модель groupdel.cir полосового фильтра. Наблюдая в режиме Transient отклик на двухчастотный сигнал изучим зависимость групповой задержки  $\tau_g$  от  $R = 10, 20, 40, 100$ .

$R, \text{ Ом}$	10	20	40	100
$\tau_g, \text{ мс}$	0.5	0.29	0.152	0.064
$\tau_{теор}, \text{ мс}$	0.62	0.31	0.155	0.06
$Q$	195	98	49	19

6) Откроем модель lcpower.cir.



На частоте резонанса  $f_0 = 250 \text{ кГц}$ .

$$P_L = 174.468 \text{ м} \quad P_C = -174.468 \text{ м} \quad P_R = 16.71 \text{ м} \Rightarrow \sum P = 16.71 \text{ м}$$

$$P_{\Sigma \text{ теор}} = 16.7 \text{ м}$$

На одной из границ полосы пропускания  $f_1 = 238 \text{ кГц}$ :

$$P_L = 96.484 \text{ м} \quad P_C = -94.331 \text{ м} \quad P_R = 9.567 \text{ м} \Rightarrow \sum P = 9.81 \text{ м}$$

$$P_{\Sigma \text{ теор}} = 9.8 \text{ м}$$

Закон суммирования выполняется.

### 2.4.3 Вывод

Теория хорошо согласуется с моделированием, практическая работа же согласуется как с результатами моделирования, так и с теоретическими выкладками.

## 2.5 Параллельный резонанс

### 2.5.1 Теория

Параллельный резонанс - это явление, двойственное последовательному. Он наблюдается, когда взаимно уничтожаются мнимые части проводимостей двух параллельных ветвей, рис. 20а. Полная проводимость оказывается при этом вещественной  $Y_1 + Y_2 = \frac{1}{R}$ , а одинаковые модули мнимых частей проводимостей определяют характеристическое сопротивление  $\frac{1}{\rho} = \text{Im}(Y_1) = \text{Im}(Y_2)$ . Параллельный резонанс ярко выражен при большой добротности  $Q = \frac{R}{\rho}$ , когда резонансное сопротивление значительно превышает характеристическое.

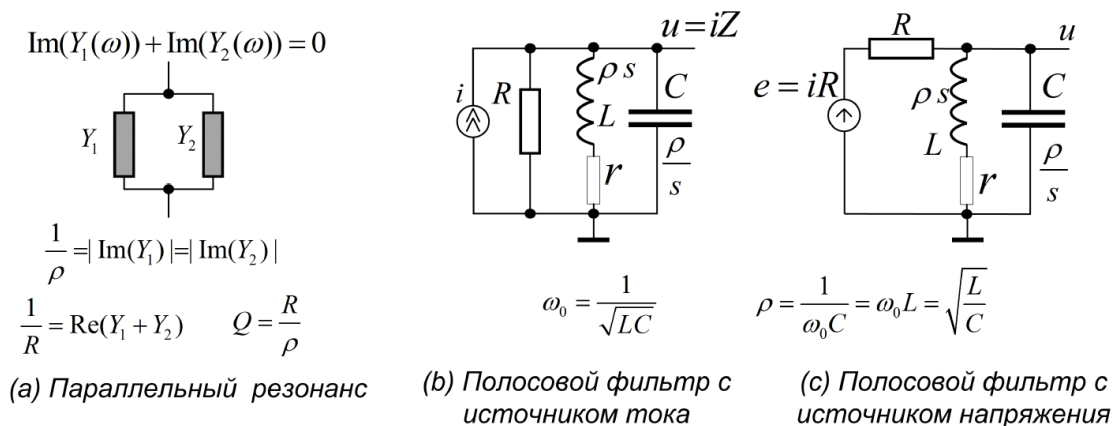


Рис. 20. Явление параллельного резонанса

Два эквивалентных варианта схемы полосового фильтра с параллельным колебательным контуром показаны на рис. 20р,с. Канонический вариант реализуется в отсутствие последовательных потерь, когда  $r = 0$ . Тогда параллельный резонанс достигается точно на частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , а передаточная функция  $H(s) = \frac{u}{i}$  (импеданс контура  $Z(s)$ ) принимает вид, обычный для полосовых фильтров второго порядка:

$$H(s) = Z(s) = \frac{u}{i} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \left( s + \frac{1}{s} \right)} = \frac{\rho s}{s^2 + 2\xi s + 1} = \frac{Q\rho}{1 + ja(\omega)},$$

где  $2\xi = \frac{1}{Q} = \frac{\rho}{R}$ , а  $a(\omega) = Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)$  обобщенная расстройка. Сопротивление  $Q\rho$  контура на частоте резонанса вещественно и превышает его характеристическое сопротивление  $\rho$  в  $Q$  раз. Передаточная функция схемы с источником напряжения отличается делением на  $R$ :  $H(s) = \frac{u}{e} = \frac{u}{iR} = \frac{Z(s)}{R}$ .

Учет последовательных потерь  $r$  усложняет ситуацию. Причин две. Первая связана с тем, что при  $r \neq 0$  частота параллельного резонанса, строго говоря, отличается от  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Вторая 38 состоит в том, что при наличии потерь  $r$  сопротивление контура на нулевой частоте оказывается ненулевым - равным  $r \parallel R$ .

Точное выражение для импеданса контура с последовательными потерями имеет вид

$$Z(s) = \frac{u}{i} = \frac{\varrho(s + \beta)}{s^2 + 2\xi s + 1 + \alpha\beta}; \quad \alpha = \frac{\rho}{R}, \beta = \frac{r}{\rho}, 2\xi = \alpha + \beta.$$

Полное затухание  $2\xi = \frac{1}{Q}$  равно сумме вкладов  $\alpha = \frac{\rho}{R}$  и  $\beta = \frac{r}{\rho}$ , вносимых последовательными и параллельными потерями. При  $rR = \rho^2$  эти вклады одинаковы. Это дает хорошо известный рецепт пересчета последовательных потерь в эквивалентные параллельные:  $R = \frac{\rho^2}{r}$ .

Ненулевое значение  $r$  вызывает сдвиг нуля передаточной функции из нуля в точку  $s = -\beta$ . В окрестности резонанса влияние этого эффекта почти незаметно. Однако на малых частотах поведение системы меняется радикально - нуль проявляет себя нарастанием фазового сдвига от нуля на нулевой частоте до  $+\frac{\pi}{2}$ .

Последовательные потери  $r$  приводят к сдвигу частоты параллельного резонанса по закону  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ . Этот эффект ощутимо сказывается на частоте пересечения нуля фазовой характеристикой.

## 2.5.2 Выполнение

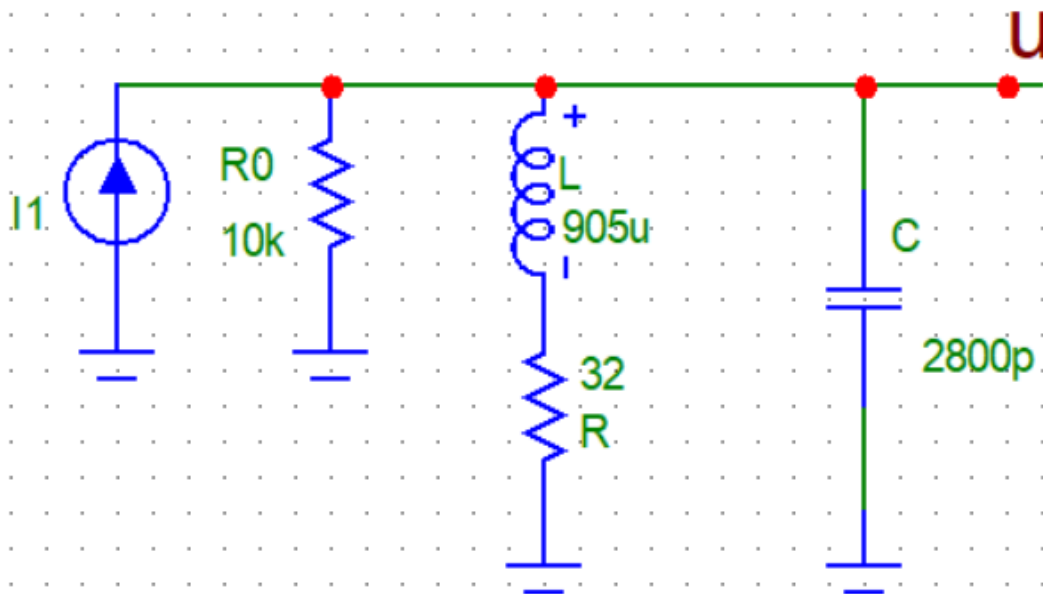
1) Откроем в MicroCap модель parallel.cir параллельного контура с  $f_0 = 100\text{кГц}$ ,  $\varrho = 570$ . По схеме оценим параметры:

$$\alpha = \frac{\rho}{R_0}$$

$$\beta = \frac{R}{\rho}$$

$$Q = \frac{1}{\alpha + \beta}$$

## Параллельный LC-контур



$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = 568$$

$$\alpha = 0.0568 \quad \beta = 0.0563$$

$$Q = 8.84$$

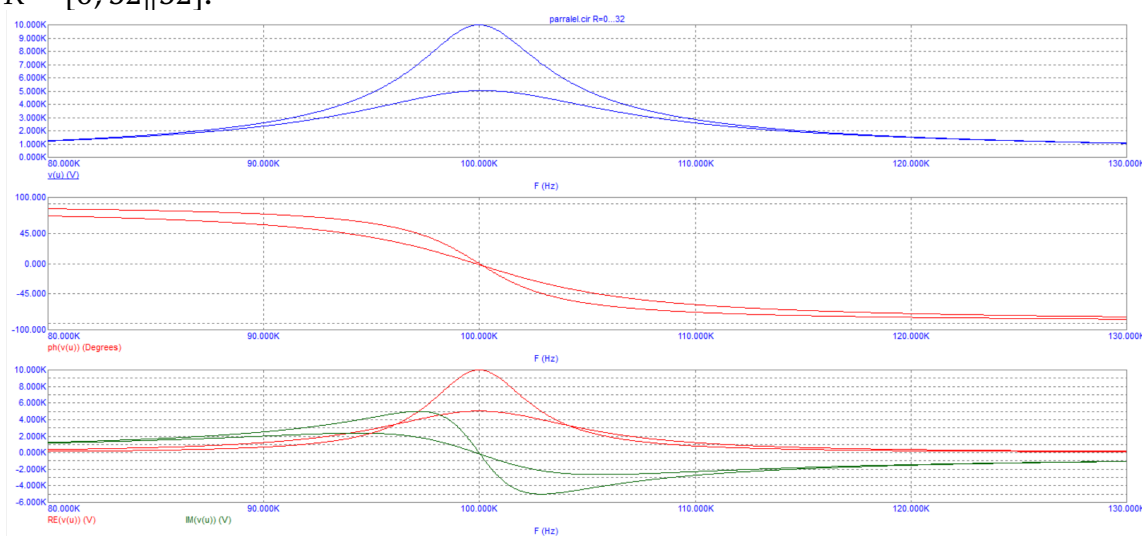
2) Резонансная частота  $f_0 = 100\text{ кГц}$ , полосу пропускания  $\Delta f = 11.6\text{ кГц}$ . Измерим

сопротивление контура  $R_0 = 5 \text{ кОм}$  (Напряжение в резонансе деленное на ток 1 ампер).  
Оценим добротность как:

$$Q = \frac{R_0}{\rho} = 8.8$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 8.6$$

3) Изучим влияние на добротность последовательных потерь  $R$ , установив варьирование  $R = [0, 32 || 32]$ .



Добротность при  $R = 0$ :

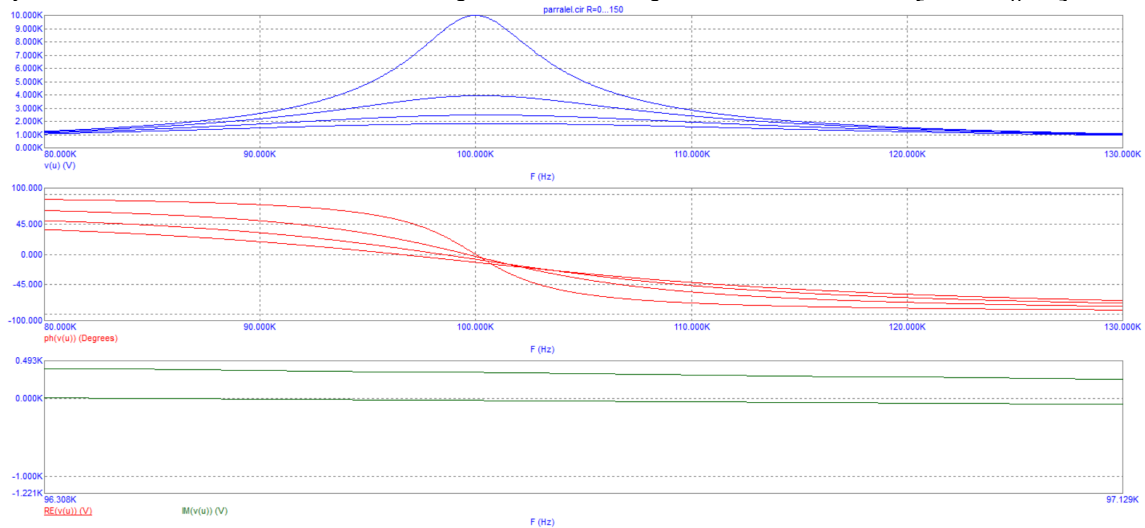
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 17.3$$

Изучим влияние параллельных потерь  $R_0$ , установив варьирование  $R_0 = [10k, 1000k || 1000k]$ . Измерим добротность при  $R_0 = 1000 \text{ кОм}$ :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 17.2$$

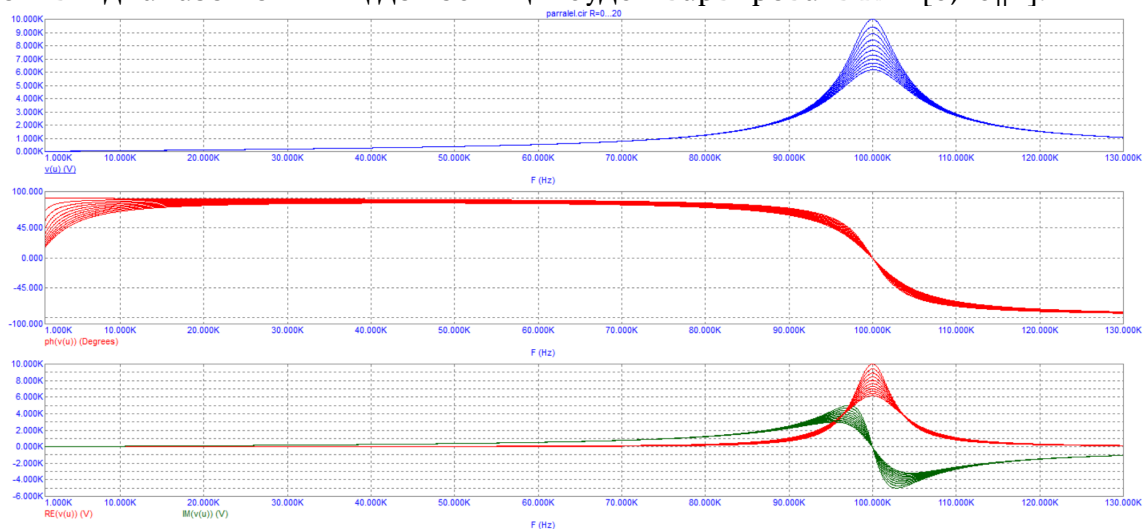
При увеличении  $R$  от 0 Ом до 32 Ом  $1/Q$  меняется от 0.058 до 0.116. При увеличении  $R_0$  от 10 кОм до 1000 кОм  $1/Q$  меняется от 0.116 до 0.058.

4) Изучим зависимость частоты параллельного резонанса от  $R = [0, 150 || 50]$ .



$R, \text{ Ом}$	0	50	100	150
$f_{\text{эксп}}, \text{ кГц}$	100	99.6	98.42	96.4
$\beta$	0	0.088	0.176	0.264
$f_{\text{теор}}$	100	99.6	98.43	96.45

5) Исследуем влияние последовательных потерь в области низких частот. Установим частотный диапазон от 1 кГц до 130 кГц и будем варьировать  $R = [0, 20 || 2]$ .



Получаем, что при  $R = 12 \text{ Ом}$  фазовый сдвиг на частоте  $f = 2 \text{ кГц}$  составляет  $\pi/4$ .

### 2.5.3 Вывод

Результаты моделирования и теории совпадают.

## 2.6 Смешанные резонансы

### 2.6.1 Теория

В сложной RLC-схеме может наблюдаться сразу несколько последовательных и параллельных резонансов. Простой пример такого смешанного резонанса дает контур на рис. 22.



Рис. 22. Контур со смешанным резонансом

В его левой LC-ветви присутствует последовательный резонанс на частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  а параллельное соединение двух ветвей дает параллельный резонанс на частоте  $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC_p}} = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha}$ . Частота параллельного резонанса всегда выше частоты последовательного и приближается к ней при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Без учета параллельных потерь ( $R_0 = \infty$ ) импеданс этого контура имеет вид

$$Z(s) = \frac{\alpha \rho}{s} \frac{s^2 + 2\xi s + 1}{(s^2 + 2\xi s + 1 + \alpha)} = \frac{\alpha \rho}{s} \frac{1 + ja(\omega)}{(1 + ja_p(\omega))},$$

где  $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$ ,  $2\xi = \frac{r}{\rho} = \frac{1}{Q}$ , :

$$a(\omega) = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right); \quad a_p(\omega) = Q_p \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right); \quad Q_p = Q \sqrt{1 + \alpha}.$$

В отсутствие потерь ( $r = 0$ ,  $\xi = 0$ ), рис. 22 имеется полюс в нуле, пара нулей в точках  $s = \pm j$ . ( $\omega = \omega_0$ ) и пара полюсов при  $s = \pm j\sqrt{1 + \alpha}$  ( $\omega = \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha}$ ). Эти объекты и определяют поведение частотной и фазовой характеристик системы.

Полюс в нуле вносит фазовый сдвиг на  $-\frac{\pi}{2}$ , см. рис. 23 . 1 при пересечении нуля добавляется сдвиг на  $+\pi$ , а при пересечении полюса такой же сдвиг вычитается. На интервале между нулем и полюсом - между последовательным и параллельным резонансами - фазовый сдвиг принимает значение  $+\frac{\pi}{2}$ , что отвечает индуктивному импедансу. Вне этого интервала импеданс контура оказывается емкостным.

При добавлении потерь  $r$  сопряженные нули и полюсы смещаются с мнимой оси

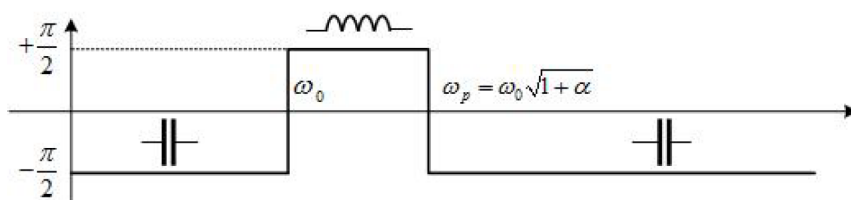


Рис. 23. Фазовая характеристика контура без потерь

в левую  $s$  полуплоскость, рис. 22. Фазовая характеристика, не меняя по существу, сглаживается, а провал и выброс на частотной характеристике в точках  $\omega_0, \omega_p$  становятся конечными:

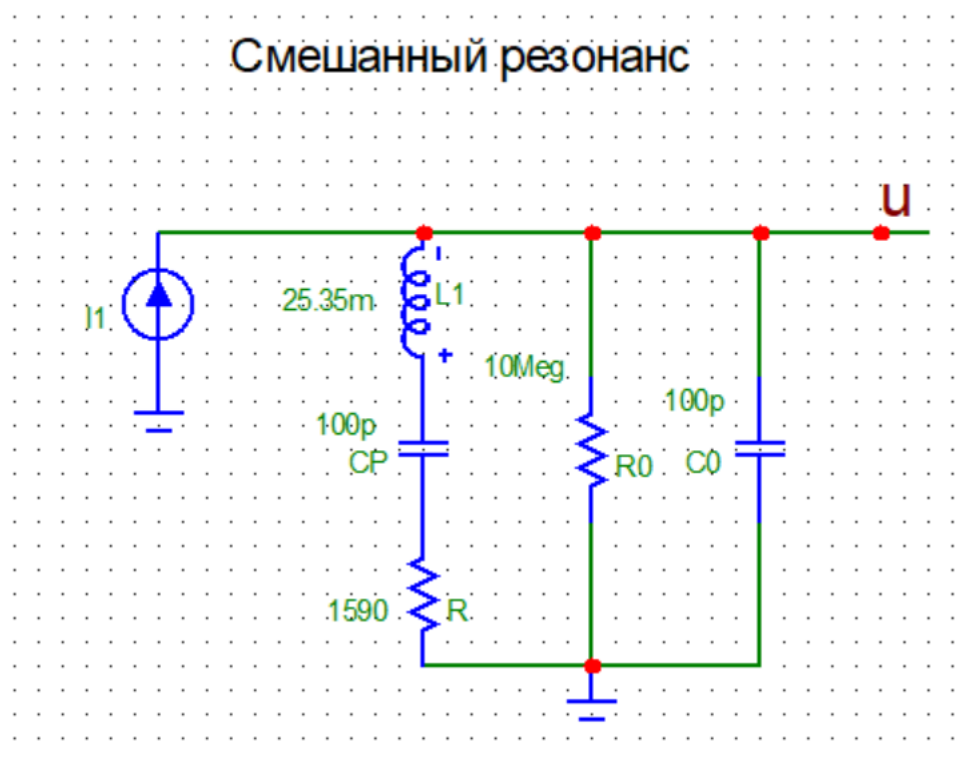
$$Z(\omega_0) = \frac{r}{1 + j\frac{1}{\alpha Q}} \approx r; \quad Z(\omega_p) = k^2 Q_p Q_p \left(1 - j\frac{1}{kQ}\right) \approx k^2 Q_p Q_p,$$

где  $k = \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{C}{C+C_0}$  – коэффициент подключения контура.

Главный эффект от добавления параллельных потерь  $R_0$  – это сдвиг полюса при  $s = 0$  в ненулевую точку на вещественной оси, рис. 22. В результате импеданс контура на нулевой частоте становится конечным – равным  $R_0$ . Параллельные потери заметно влияют также и на положение пары сопряженных полюсов, снижая их добротность, но почти не оказывая влияния на положение нулей.

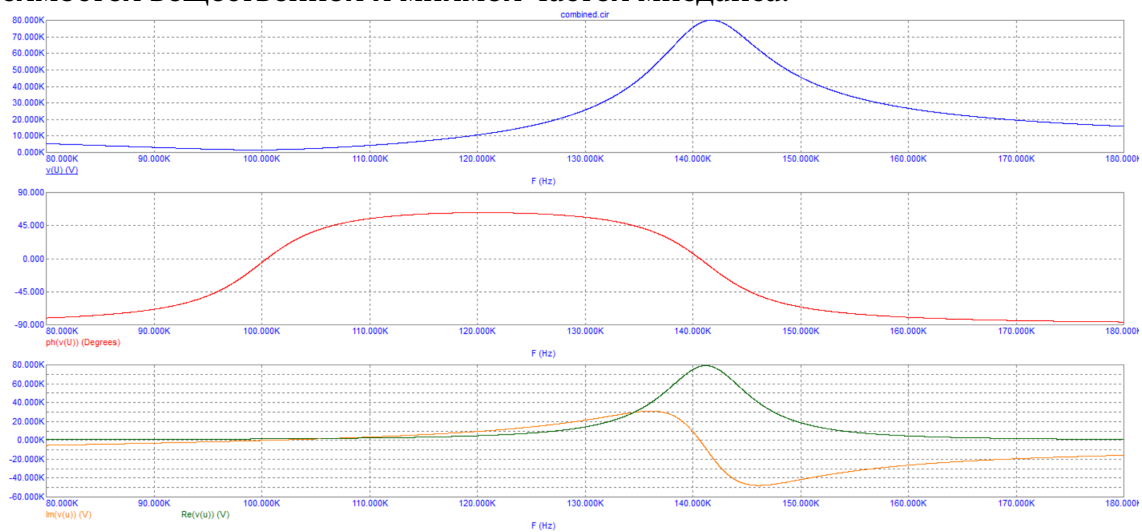
## 2.6.2 Выполнение

1) Откроем модель combined.cir с  $f_0 = 100$  кГц,  $\rho = 15.9$  кГц,  $q \approx 10$ ,  $\alpha = 1$ .





Изучим графики частотной и фазовой характеристик, а также графики частотных зависимостей вещественной и мнимой частей мпеданса.



2) Измерим частоты  $f_p, f_0$  последовательного и параллельного резонансов по точкам пересечения нуля фазовой характеристикой:

$$f_p = 100.5 \text{ кГц} \quad f_0 = 140.6 \text{ кГц}$$

Измерим полосы  $\Delta f_p, \Delta f_0$ , в которых фазовая характеристика изменяется в диапазоне  $\pm 45^\circ$  в окрестностях резонансов.

$$\Delta f_p = 10.6 \text{ кГц}$$

$$\Delta f_0 = 10.8 \text{ кГц}$$

Оценим добротности  $Q_p, Q_0$  и проверим, что  $f_0 = f_p \sqrt{2}, Q_0 = Q_p \sqrt{2}$ :

$$Q_p = \frac{f_p}{\Delta f_p} = 9.5$$

$$Q_0 = \frac{f_0}{\Delta f_0} = 13$$

$$Q_0 = 13 \approx 13.43 = Q_p \sqrt{2}$$

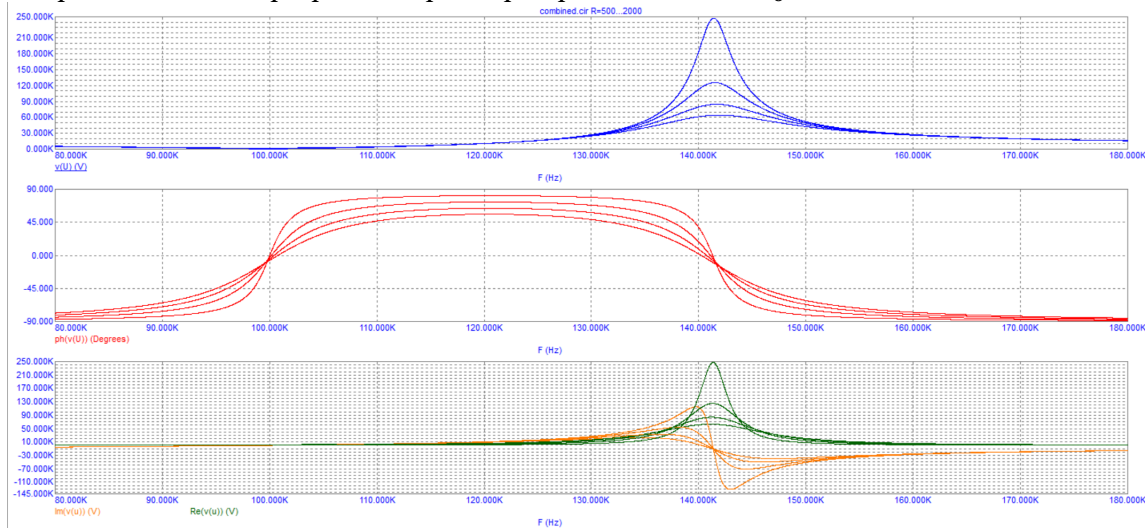
$$f_0 = 140.6 \approx 142.1 = f_p \sqrt{2}$$

3) Измерим сопротивление контура на частотах последовательного и параллельного резонансов, сравним результаты с теоретическими значениями  $(r, k^2 \rho_p, Q_p)$ :

$$r_{\text{эксп}} = 1.565 \text{ кОм} \simeq 1.59 \text{ кОм} = r_{\text{теор}}$$

$$(k^2 \rho_p, Q_p)_{\text{эксп}} = 78.1 \text{ кОм} \simeq 79.1 \text{ кОм} = \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^2 \sqrt{\frac{L}{c}} (1 + \alpha) \frac{r}{\rho} = (k^2 \rho_p, Q_p)_{\text{теор}}$$

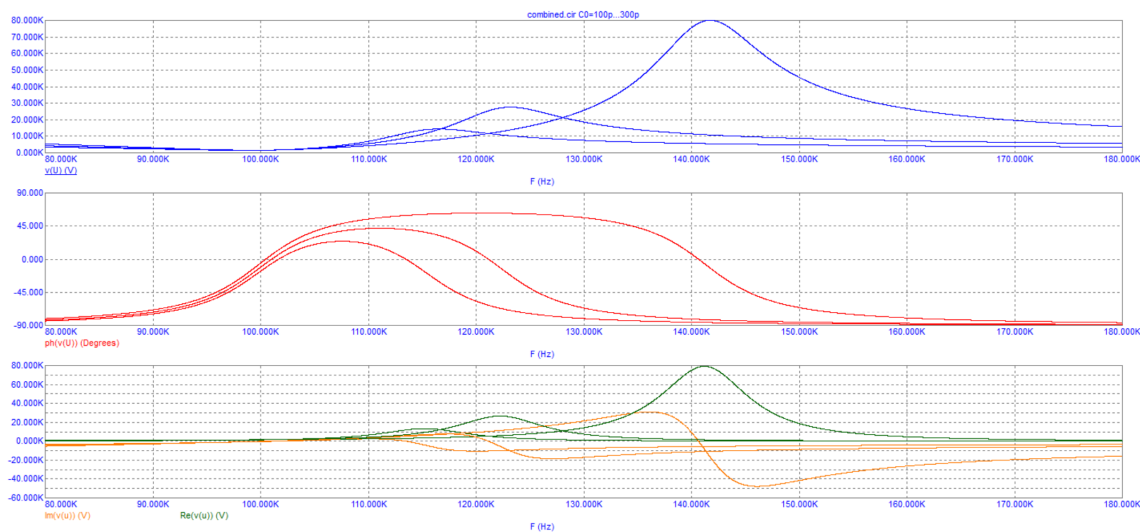
Снимем зависимость сопротивления на частоте параллельного резонанса от  $R = [500, 2000 || 500]$  и емкости  $C_0 = [100p, 300p || 100p]$ . Сопоставим их с теорией. Осмыслим характер изменения графиков при варьировании  $R$  и  $C_0$ .



$R, \text{ Ом}$	500	1000	1500	2000
$Z, \text{ кОм}$	247	124.4	83	61.9

Получаем зависимость:

$$Z \sim \frac{1}{R}$$

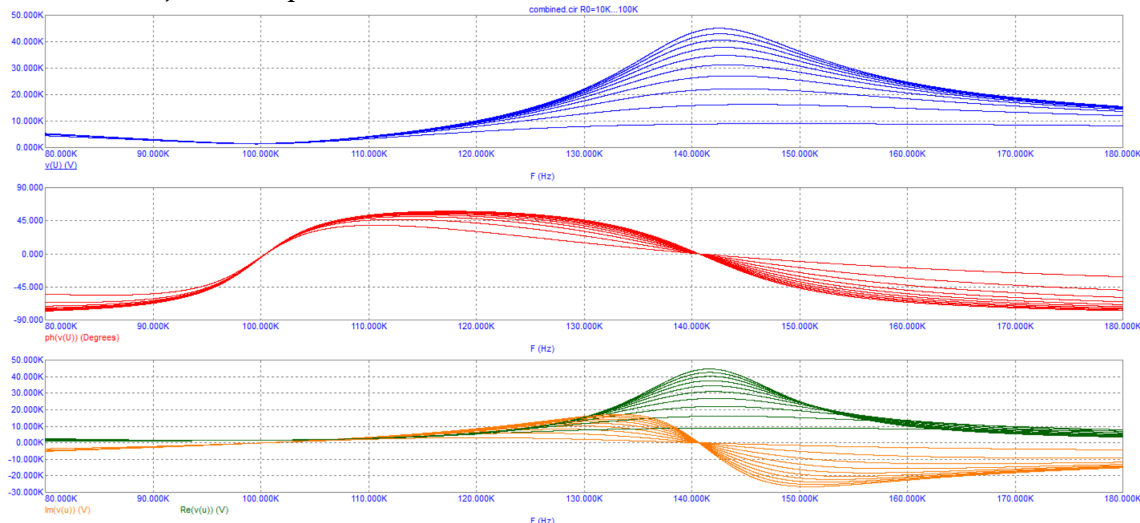


$C_0, \text{ пФ}$	100	200	300
$Z, \text{ кОм}$	78.3	25.4	11.9

Получаем зависимость:

$$Z \sim \frac{1}{C_0^2}$$

4) Обнулیم последовательности потери  $r$  и варьированием  $R_0 = [10k, 100k \parallel 10k]$  подберем сопротивления параллельных потерь так, чтобы достичь того же резонансного сопротивления, что и при  $r = 1590$  Ом.



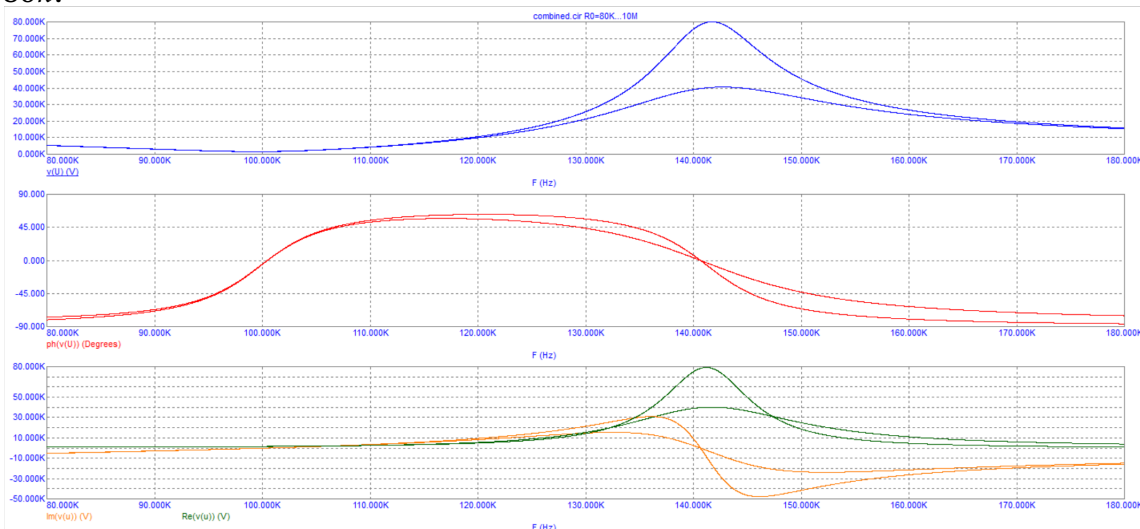
Получим  $R_0 = 80$  кОм. Проверим закон пересчета:

$$R_0 r = k^2 \rho_p^2$$

$$80000 \cdot 1590 \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \cdot 15900^2.$$

Соотношение выше выполняется.

5) Варьируя  $R_0 = [80k, 10Meg \parallel 10Meg]$  при  $r = 1590$  Ом, изучим влияние  $R_0$  на поведения частотной и фазовой характеристик на низких частотах - в диапазоне  $1k, 180k$ .



При увеличении  $R_0$  частотная характеристика увеличивается, а фазовая уменьшается.

### **2.6.3 Вывод**

Результаты теории согласуются с измерениями.

## **3 Вывод**

Результаты моделирования, как и ожидается, тождественны теории, в то время как замеры на макетной плате незначительно от нее отличаются. Все это позволяет сказать, что использованные методы расчета и анализа безинерционных линейных цепей дают хорошие результаты в области применимости.