

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

Kафедра радиотехники и систем управления

A. A. Григорьев, И. А. Григорьев

ЛЕСТНИЧНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Учебно-методическое пособие

МОСКВА
МФТИ
2020

УДК 621.396.6

ББК 32.841.я7

Г83

Рецензент:

Кандидат технических наук *А. Л. Ларин*

Григорьев, Александр Алексеевич,

Григорьев, Иван Александрович

Г83 **Лестничные фильтры : учебно-методическое пособие /**
А. А. Григорьев, И. А. Григорьев, – Москва: МФТИ,
2020 – 28 с.

Изучаются принципы синтеза и реализации бездиссипативных лестничных фильтров. На первом этапе конструктивные требования к частотной характеристике фильтра редуцируются к требованиям на его входной иммитанс. На втором – используется развитая техника реализации двухполюсника с заданным иммитансом лестничной структурой. Работа дает представление о методике расчета сложных лестничных фильтров. Приобретаются навыки исследования их характеристик моделированием. Работа предназначена для студентов, изучающих методы фильтрации сигналов.

© Григорьев А. А., Григорьев И. А., 2020

© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)», 2020

Содержание

1. Синтез бездиссипативных фильтров	4
2. Редукция ко входному импедансу	4
3. Калибровки	7
4. Фильтры Баттервортса	9
5. Лестничные схемы	12
6. Цепные формы иммитансов фильтров	14
7. Фильтры малых порядков	16
8. Преобразования фильтров	18
9. Задание	22
9.1. Ознакомительные шаги	22
9.2. Трехполюсные лестничные фильтры	23
9.3. Фильтры нижних частот высших порядков	24
9.4. Фильтры пятого порядка	25
9.5. Семиполюсной фильтр	25
10. Для самопроверки	26

1. Синтез бездиссипативных фильтров

Пусть сигнал гармонического источника с комплексной амплитудой e и внутренним сопротивлением R_s передается в нагрузку R_l через блок фильтра, рис. 1. Требования к амплитудно-частотной характеристике фильтра определены заданием явного выражения для модуля $|K(j\omega)|$ его комплексного коэффициента передачи

$$K(j\omega) = \frac{U}{e}.$$

Требуется реализовать фильтр – предложить принципиальную схему внутренности блока, которая обеспечила бы нужную частотную зависимость $|K(j\omega)|$.

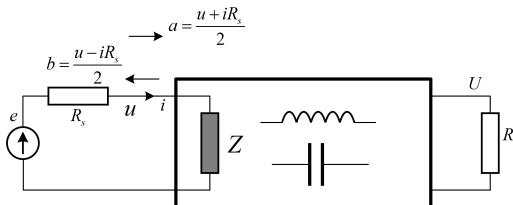


Рис. 1. Блок-схема фильтра

Существует регулярный метод реализации фильтров бездиссипативными LC-цепями, составленными исключительно из емкостей и индуктивностей. В его основе лежит редукция требований для $|K(j\omega)|$ к требованиям на функциональный вид входного импеданса нагруженного фильтра $Z(j\omega) = \frac{u}{i}$. Далее применяется развитая техника синтеза двухполюсника по заданному импедансу.

2. Редукция ко входному импедансу

Редукция эта опирается на факт отсутствия потерь мощности внутри бездиссипативного фильтра – активная мощность на его входе

$$P = \frac{\operatorname{Re}[ui^*]}{2}$$

совпадает с мощностью $P_l = \frac{|U|^2}{2R_l}$, доставленной до нагрузки.

Эффективный инструмент анализа мощностей дает переход к волновым параметрам – комплексным амплитудам a и b падающей на вход фильтра и отраженной от него волн:

$$a = \frac{u + iR_s}{2}; \quad b = \frac{u - iR_s}{2},$$

которые связаны через коэффициент отражения

$$\rho = \frac{b}{a} = \frac{u - iR_s}{u + iR_s} = \frac{Z - R_s}{Z + R_s},$$

подобно тому как напряжение u и ток i связаны через импеданс $Z = \frac{u}{i}$.

Переход к волновым параметрам – это не более как линейная замена переменных. Возможность возврата к напряжению, току и импедансу сохраняется:

$$u = a + b; \quad i = \frac{a - b}{R_s}, \quad Z = \frac{u}{i} = R_s \frac{a + b}{a - b} = R_s \frac{1 + \rho}{1 - \rho}.$$

Важно то, что волновые параметры приводят к хорошо интерпретируемому выражению для потребляемой мощности:

$$P = \frac{\operatorname{Re}[ui^*]}{2} = \frac{\operatorname{Re}[(a + b)(a^* - b^*)]}{2R_s} = \frac{\operatorname{Re}[|a|^2 - |b|^2 + ba^* - ab^*]}{2R_s}.$$

Но разность $ba^* - ab^* = ba^* - (ba^*)^* = 2\operatorname{Im}[ba^*]$ чисто мнимая. Поэтому,

$$P = \frac{|a|^2}{2R_s} - \frac{|b|^2}{2R_s} = \frac{|a|^2}{2R_s} \left(1 - |\rho|^2\right).$$

Потребляемая мощность P оказывается разностью мощностей, переносимых падающей ($\frac{|a|^2}{2R_s}$) и отраженной ($\frac{|b|^2}{2R_s}$) волнами, а квадрат модуля коэффициента отражения ρ – коэффициентом отражения мощности.

Амплитуда a падающей волны просто выражается через комплексную амплитуду e напряжения источника. В самом деле, переход к волновым параметрам в уравнении

$$u = e - iR_s$$

дает

$$a + b = e - (a - b) \Rightarrow 2a = e,$$

или $a = \frac{e}{2}$. Для потребляемой мощности получается

$$P = \frac{|a|^2}{2R_s} (1 - |\rho|^2) = \frac{|e|^2}{8R_s} (1 - |\varrho|^2) = P_s (1 - |\varrho|^2).$$

Мощность эта максимально возможна при $\rho = \frac{Z - R_s}{Z + R_s} = 0$, то есть когда $Z = R_s$ – источник работает на согласованную нагрузку. При этом она составляет $P_s = \frac{|e|^2}{8R_s}$. Это собственная мощность источника с комплексной амплитудой e и внутренним сопротивлением R_s – максимально возможная мощность, которую он в принципе способен отдать.

Если фильтр бездиссипативен, то потребляемая им на вход мощность P совпадает с мощностью в нагрузке: $P_l = \frac{|U|^2}{2R_l} = P$.

Коэффициент $G(\omega)$ передачи мощности (*transducer gain*) вводится как доля мощности источника, доставляемая до нагрузки:

$$G(\omega) = \frac{P_l}{P_s} = \frac{P}{P_s} = 1 - |\varrho|^2.$$

Именно этот коэффициент используется как основная характеристика фильтров в микроволновой технике.

Источник отдает в падающей волне максимально возможную для него мощность $P_s = \frac{|e|^2}{8R_s}$. Часть этой мощности – $|\rho|^2 P_s$ отражается. Остальное – $P = P_l = P_s (1 - |\rho|^2)$ рассеивается в нагрузке. Коэффициент передачи мощности $G(\omega)$ велик на тех частотах, где отражение мало. Это полоса пропускания фильтра. В полосе же задержания коэффициент отражения велик и до нагрузки мало что доходит.

Выявляется ключевая связь между коэффициентом передачи мощности G и коэффициентом отражения $\rho = \frac{Z - R_s}{Z + R_s}$, который, в свою очередь, тесно связан со входным импедансом: $Z = R_s \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$. Это и дает возможность навести мост между коэффициентом передачи фильтра и его входным импедансом.

Но требования к фильтру задаются модулем комплексного коэффициента передачи $|K(j\omega)|$, а не коэффициентом передачи

мощности $G(\omega)$. На самом деле коэффициенты эти пропорционально связаны:

$$G(\omega) = \frac{P_l}{P_s} = \frac{|U|^2}{2R_l} \frac{8R_s}{|e|^2} = \frac{4R_s}{R_l} \frac{|U|^2}{|e|^2} = \frac{4R_s}{R_l} |K(j\omega)|^2.$$

Окончательная программа редукции исходных требований к модулю коэффициента передачи фильтра к требованиям на его входной импеданс сводится к следующим шагам.

1. В качестве исходных данных берется функция $G(\omega)$ для коэффициента передачи мощности.

Квадрат модуля коэффициента передачи напряжения $|K(j\omega)|^2$ отличается от $G(\omega)$ только мало существенным фактором $\frac{4R_s}{R_l}$. В частности, при $R_s = R_l$ фактор этот просто равен 4. Коэффициент передачи мощности может достигать единицы, в то время как при $R_s = R_l$ коэффициент передачи напряжения явно не превышает $\frac{1}{2}$.

2. Определяется функциональный вид квадрата модуля коэффициента отражения:

$$|\rho(j\omega)|^2 = 1 - G(\omega).$$

3. Для самого коэффициента отражения выбирается функция $\varrho(p)$ комплексной частоты p , обладающая заданным квадратом модуля на мнимой оси, при $p = j\omega$. Этап этот явно неоднозначен. Равным образом подходят, например, функции $\pm\varrho(p)$, отличающиеся знаком. Выбор «удачной» функции требует определенного искусства.

4. По выбранной паре $\pm\varrho(p)$ строятся две формы входного импеданса:

$$Z(p) = R_s \frac{1 \mp \varrho(p)}{1 \pm \varrho(p)}.$$

Обе эти формы одинаково хороши, поскольку свойства фильтра при изменении знака коэффициента отражения не меняются. Значение имеет только его модуль.

3. Калибровки

Теория масштабируема, когда фигурирующие в ней физические параметры измеряются относительно – в долях некоторых

разумно выбранных эталонных значений. Перекалибровка такой теории к конкретным конструктивным требованиям достигается адекватным выбором эталонов.

Главный конструктивный параметр фильтра – это некоторая характерная частота ω_0 . Разумно выбрать ее в качестве эталона частоты, перейдя к относительным мерам $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$, $s = \frac{p}{\omega_0}$.

В качестве второго эталона выберем сопротивление R_0 . Рационально принять его равным сопротивлению источника R_s с тем, чтобы безразмерное сопротивление $\frac{R_s}{R_0}$ навсегда сделать равным единице.

Выбор эталонов ω_0 , R_0 для измерения частоты и сопротивления однозначно определяет эталонные значения C_0 и L_0 для емкости и индуктивности.

$$R_0 C_0 = \tau = \frac{1}{\omega_0}; \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{1}{\omega_0 R_0}.$$

$$\frac{L_0}{R_0} = \tau = \frac{1}{\omega_0}; \quad \Rightarrow \quad L_0 = \frac{R_0}{\omega_0}.$$

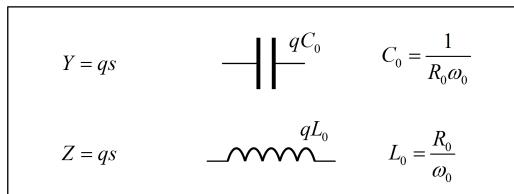


Рис. 2. Реализация элементарных иммитансов

Важные для дальнейшего правила реализации элементарных иммитансов $Z^{\pm 1} = qs$ (импедансов Z или адmittансов $Y = Z^{-1}$) физическими индуктивностями и емкостями по заданным эталонам ω_0 , R_0 подытожены на рис. 2. Емкость qC_0 реализует безразмерный адmittанс (проводимость) вида $Y = qs$:

$$Y = j\omega qC_0 R_0 = q \frac{j\omega}{\omega_0} = qs.$$

Аналогично, индуктивность qL_0 реализует импеданс $Z = qs$:

$$Z = \frac{j\omega qL_0}{R_0} = q \frac{j\omega}{\omega_0} = qs.$$

4. Фильтры Баттервортса

Коэффициент передачи мощности нижнечастотного фильтра Баттервортса порядка n выбирается в виде

$$G(\nu) = \frac{1}{1 + \nu^{2n}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}.$$

Он равен единице на нулевой частоте, принимает значение $1/2$ на частоте среза $\omega = \omega_0$, $\nu = \frac{\omega}{\omega_0} = 1$ и быстро, со скоростью $20n$ dB на декаду, спадает в полосе задержания.

Для квадрата модуля коэффициента отражения от входа бездиссипативного фильтра Баттервортса получается:

$$|\rho(j\nu)|^2 = 1 - G(\nu) = 1 - \frac{1}{1 + \nu^{2n}} = \frac{\nu^{2n}}{1 + \nu^{2n}}.$$

На следующем этапе требуется выбрать функцию $\rho(s)$, $s = \frac{p}{\omega_0}$, квадрат модуля которой совпадает с $\frac{\nu^{2n}}{1 + \nu^{2n}}$ на мнимой оси, при $s = j\nu$. Будем искать ее в виде

$$\rho(s) = \pm \frac{s^n}{D_n(s)},$$

где $D_n(s)$ – многочлен от s с вещественными коэффициентами. Требуется, чтобы

$$|\rho(s)|^2 = \frac{|s|^{2n}}{|D_n(s)|^2} \Big|_{s=j\nu} = \frac{\nu^{2n}}{1 + \nu^{2n}}.$$

Поскольку $|s|^{2n}|_{s=j\nu} = \nu^{2n}$, достаточно выбрать многочлен $D_n(s)$ так, чтобы

$$|D_n(s)|^2|_{s=j\nu} = 1 + \nu^{2n}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |D_n(s)|^2|_{s=j\nu} &= D_n(j\nu)D_n^*(j\nu) = D_n(j\nu)D_n((j\nu)^*) = \\ &= D_n(j\nu)D_n(-j\nu) = 1 + \nu^{2n}. \end{aligned}$$

В реальности удается выполнить более сильное условие:

$$D_n(s)D_n(-s) = 1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n},$$

справедливое не только при $s = j\nu$, но и при всех s .

Алгоритм построения многочленов $D_n(s)$ таков. Найдем множество из $2n$ корней многочлена от s степени $2n$ в правой части:

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = -1 = e^{j\pi}e^{j2\pi k} \quad \Rightarrow \quad s_k = e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right)}.$$

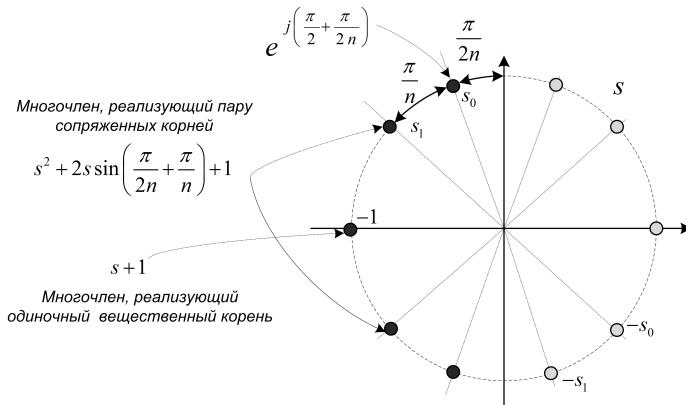


Рис. 3. Карта корней

Корни эти, рис. 3, равномерно распределены по единичной окружности в комплексной s -плоскости с шагом $\frac{\pi}{n}$, начиная от точки $e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)}$. Половина корней находится в левой полуплоскости, вторая половина – в правой. У каждого корня s_k в левой полуплоскости имеется двойник $-s_k$ в правой. При четных n все корни образуют комплексно сопряженные пары. При нечетных – имеются одиночные вещественные корни в точках $s = \pm 1$.

Сделаем корни в левой полуплоскости корнями многочлена $D_n(s)$, а корни в правой – корнями $D_n(-s)$. В итоге получаются следующие несколько тяжеловесные общие формулы:

$$D_n(s) = (s+1) \prod_{0 \leq k < \frac{n-1}{2}} \left[s^2 + 2s \sin\left(\frac{\pi}{2n}(1+2k)\right) + 1 \right] \quad \text{при нечетных } n,$$

$$D_n(s) = \prod_{0 \leq k < \frac{n-1}{2}} \left[s^2 + 2s \sin\left(\frac{\pi}{2n}(1+2k)\right)s + 1 \right] \quad \text{при четных } n.$$

Как ясно из рисунка, факторы этих произведений реализуют пары сопряженных корней в левой полуплоскости, либо одиночный корень при $s = -1$. Первые три многочлена $D_n(s)$ имеют вид:

$$D_1(s) = s + 1, \quad D_2(s) = s^2 + \sqrt{2}s + 1, \quad D_3(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1.$$

Когда многочлен $D_n(s)$ построен, определение входного импеданса фильтра сводится к элементарной алгебре:

$$Z_n(s) = \left[\frac{1 - \rho(s)}{1 + \rho(s)} \right]^{\pm 1} = \left[\frac{D_n(s) - s^n}{D_n(s) + s^n} \right]^{\pm 1}.$$

Видно, что требования к коэффициенту передачи фильтра на самом деле редуцируются к виду его входного иммитанса $Z^{\pm 1}(s)$, который можно равным образом интерпретировать как импеданс $Z(s)$ или как адmittанс $Y(s) = Z(s)^{-1}$. Глубинная причина этого кроется в том, что коэффициент передачи мощности зависит только от модуля коэффициента отражения ρ , не изменяясь при замене $\rho \rightarrow -\rho$. А такая замена инвертирует импеданс: $\frac{1-\rho}{1+\rho} \rightarrow \frac{1+\rho}{1-\rho}$. Так что решение вопроса о том, чем является $Z^{\pm 1}(s)$ – импедансом или адmittансом – переносится на уровень удобства технической реализации. В реальности обе эти точки зрения почти равнозначны, и это дает начало двум двойственным структурам фильтров.

Форму входного иммитанса разумно выбрать так, чтобы степень числителя превышала степень знаменателя:

$$Z_n^{\pm 1} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D_n(s) + s^n}{D_n(s) - s^n}.$$

При $n = 1, 2, 3$ в итоге получается:

$$Z_1^{\pm 1}(s) = 2s + 1, \quad Z_2^{\pm 1}(s) = \frac{2s^2 + \sqrt{2}s + 1}{\sqrt{2}s + 1},$$

$$Z_3^{\pm 1}(s) = \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1}.$$

5. Лестничные схемы

Широкий класс рациональных иммитансов удается реализовать лестничными схемами, примеры которых показаны на рис. 4. Обе схемы составлены из горизонтальных импедансов Z_j , вертикальных адmittансов Y_j и терминируются справа резистором R . Схема на рис. 4a реализует импеданс Z , который выражается через компоненты схемы показанной на рисунке цепной дробью. Схема на рис. 4b реализует адmittанс Y , выражающийся похожей цепной дробью.

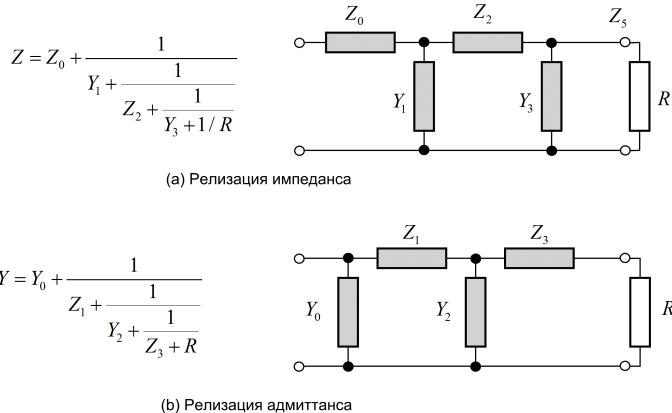


Рис. 4. Лестничные схемы и цепные формы их иммитансов

Если в показанных на рисунке формулах вместо иммитансов Z_j , Y_j компонентов подставить какие-либо рациональные функции от s , то несложными алгебраическими манипуляциями формулы эти удастся привести к рациональным функциям вида $\frac{N(s)}{D(s)}$. При синтезе фильтров возникает обратная задача – разложить рациональную функцию для иммитанса $Z^{\pm 1}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ в цепную дробь. Это позволяет реализовать этот иммитанс лестничной структурой, подобной показанным на рисунке.

Техника разложения рациональной функции $Z^{\pm 1}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ в цепную дробь опирается на деление многочленов с остатком.

Поделив $N(s)$ на $D(s)$, $\deg N > \deg D$, найдем частное $Q_0(s)$ и остаток $R_0(s)$, такие что

$$N = Q_0 D + R_0; \quad \deg D > \deg R_0.$$

Получим:

$$Z^{\pm 1} = \frac{N}{D} = \frac{Q_0 D + R_0}{D} = Q_0 + \frac{R_0}{D} = Q_0 + \frac{1}{\frac{D}{R_0}}, \quad \deg D > \deg R_0.$$

Применим теперь ту же процедуру к дроби $\frac{D}{R_0}$. Поделив $D(s)$ на $R_0(s)$,

$$D = Q_1 R_0 + R_1,$$

продолжим разложение:

$$Z^{\pm 1} = Q_0 + \frac{1}{\frac{D}{R_0}} = Q_0 + \frac{1}{Q_1 + \frac{R_1}{R_0}} = Q_0 + \frac{1}{Q_1 + \frac{1}{\frac{R_0}{R_1}}}, \quad \deg R_0 > \deg R_1$$

Теперь можно поделить R_0 на R_1 , и так далее. Процедура эта продолжается до тех пор, пока очередной остаток от деления не оказывается нулевым. Итогом становится представление рациональной функции цепной дробью

$$Z^{\pm 1} = Q_0 + \frac{1}{Q_1 + \frac{1}{Q_2 + \frac{1}{Q_3 + \dots}}},$$

структурой которой вполне определяется последовательностью частных

$$[Q_0(s), Q_1(s), Q_2(s), Q_3(s) \dots].$$

Если эти полиномиальные по s частные реализовать некоторыми имmittансами Z_j, Y_j , получится реализация имmittанса $Z^{\pm 1}$ лестничной схемой, подобной показанным на рис. 4.

Далеко не любая рациональная функция допускает простую реализацию лестничной схемой. Проблема в том, что некоторые из частных $G_j(s)$ могут оказаться трудно реализуемыми RLC -цепями. В регулярных случаях, с которыми приходится сталкиваться при синтезе лестничных фильтров, все эти частные, кроме последнего, оказываются простейшими одночленами вида $Q_j(s) = q_j s$, где q_j – некоторые константы. Импедансы этого вида реализуются одиночными индуктивностями, admittансы – емкостями (см. рис. 2). Исключение составляет последнее частное вида $Q(s) = qs + r$. Такой имmittанс реализуется либо последовательным соединением импеданса $Z = qs$ и терминирующего резистора r , как на рис. 4б, либо параллельным соединением admittанса $Y = qs$ и терминирующей проводимости r , рис. 4а.

6. Цепные формы иммитансов фильтров

Входной иммитанс фильтра Баттервортса первого порядка $Z^{\pm 1}(s) = 2s + 1$ уже является простейшей цепной дробью с последовательностью частных $[2s + 1]$ из единственного элемента.

Разложение в цепную дробь иммитанса второго порядка находится в один шаг:

$$Z^{\pm 1}(s) = \frac{2s^2 + \sqrt{2}s + 1}{\sqrt{2}s + 1} = \sqrt{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}s + 1},$$

давая последовательность частных $[\sqrt{2}, \sqrt{2}s + 1]$.

Иммитанс фильтра третьего порядка раскладывается в цепную дробь так:

$$\begin{aligned} Z^{\pm 1}(s) &= \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1} = s + \frac{s + 1}{2s^2 + 2s + 1} = s + \frac{1}{\frac{2s^2 + 2s + 1}{s + 1}} = \\ &= s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s + 1}}. \end{aligned}$$

Последовательность частных имеет вид: $[s, 2s, s + 1]$.

Вычисление рациональных входных иммитансов фильтров высших порядков и разложение их в цепные дроби оказывается довольно трудоемкой задачей. В справочной литературе приводятся обширные таблицы результатов этих вычислений для фильтров различных типов. В таблицах приводятся блоки $[q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n = r]$ коэффициентов q_j частных $Q_j(s) = q_j s$ и значение r для терминирующего резистора $r = q_n$ в последнем частном виде $Q_{n-1}(s) = q_{n-1}s + r$.

Таблица q -коэффициентов для фильтров Баттервортса порядков n от 2 до 7 приведена ниже.

Коэффициенты фильтров Баттервортса порядков $n = 2 \div 7$

n	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1					
3	1	2	1	1				
4	0.765	1.848	1.848	0.765	1			
5	0.618	1.618	2	1.618	0.618	1		
6	0.518	1.414	1.932	1.932	1.414	0.518	1	
7	0.445	1.247	1.802	2	1.802	1.247	0.445	1

Руководствуясь ею, легко выписать явный вид цепного разложения входного имmittанса для фильтра данного порядка. К примеру, для фильтра порядка $n = 4$ это разложение имеет вид

$$Z^{\pm 1}(s) = 0.765s + \frac{1}{1.848s + \frac{1}{1.848s + \frac{1}{0.765s + 1}}}.$$

Распространенные фильтры Чебышева характеризуются дополнительным выбираемым параметром – степенью неравномерности частотной характеристики в полосе пропускания. Справочно приведем наборы коэффициентов для реализации фильтров Чебышева.

*Коэффициенты фильтров Чебышева
с неравномерностью 0.5 dB*

n	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
2	1.403	0.707	1.984					
3	1.593	1.097	1.596	1				
4	1.670	1.193	2.366	0.842	1.984			
5	1.706	1.230	2.541	1.230	1.706	1		
6	1.725	1.248	2.606	1.314	2.476	0.870	1.984	
7	1.737	1.258	2.638	1.344	2.638	1.258	1.737	1

*Коэффициенты фильтров Чебышева
с неравномерностью 3 dB*

n	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
2	3.101	0.534	5.810					
3	3.349	0.712	3.349	1				
4	3.429	0.748	4.347	0.592	5.810			
5	3.482	0.762	4.538	0.762	3.482	1		
6	3.505	0.769	4.606	0.793	4.464	0.603	5.810	
7	3.518	0.772	4.639	0.804	4.639	0.772	3.518	1

Последний коэффициент $r = q_n$ у фильтров Чебышева четных порядков не равен 1. Это следствие неравномерности частотной характеристики в полосе пропускания – на нулевой частоте коэффициент передачи этих фильтров по мощности меньше единицы. Он достигает единичного значения в других точках внутри полосы пропускания.

7. Фильтры малых порядков

Две формы реализации фильтра Баттервортса первого порядка со входным иммитансом $Z^{\pm 1} = 2s + 1$ показаны на рис. 5.

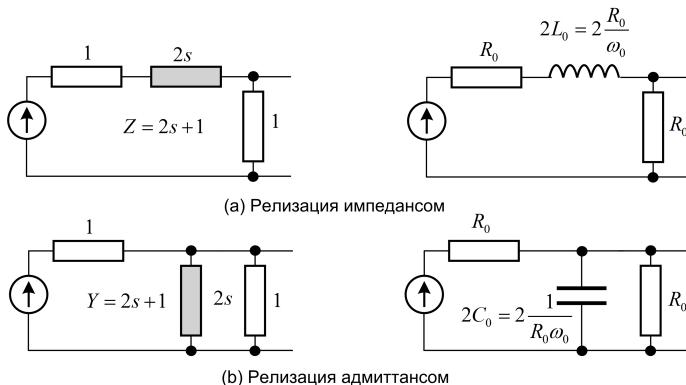


Рис. 5. Лестничные фильтры Баттервортса первого порядка

В верхней схеме иммитанс $2s + 1$ реализован как импеданс – последовательное соединение импеданса $2s$ и единичного резистора. В физической схеме импеданс $2s$ реализует индуктивность $2L_0$, а оба единичные сопротивления – резисторы R_0 . Параметры фильтра определяются произвольным выбором сопротивления R_0 и частоты среза ω_0 . Эталонная индуктивность L_0 вычисляется как $L_0 = \frac{R_0}{\omega_0}$.

Нижняя схема реализует тот же иммитанс как адmittанс – параллельное соединение адmittанса $2s$ и единичного резистора. В физической схеме адmittанс $2s$ реализуется емкостью $2C_0$, $C_0 = \frac{1}{R_0\omega_0}$.

На поверку обе реализации оказываются обычновенными интегрирующими RL - и RC -цепями, каковыми и являются фильтры Баттервортса первого порядка. Новая лишь мощностная интерпретация их поведения. В полосе пропускания, на частотах близких к нулю, эти фильтры доставляют в нагрузку всю мощность источника. На нулевой частоте коэффициент передачи мощности $G(\omega)$ достигает единицы. На высоких частотах, в полосе задержания, почти вся эта мощность отражается от входа

фильтра.

Реализации фильтров Баттервортса порядков 2 и 3 показаны на рис. 6.

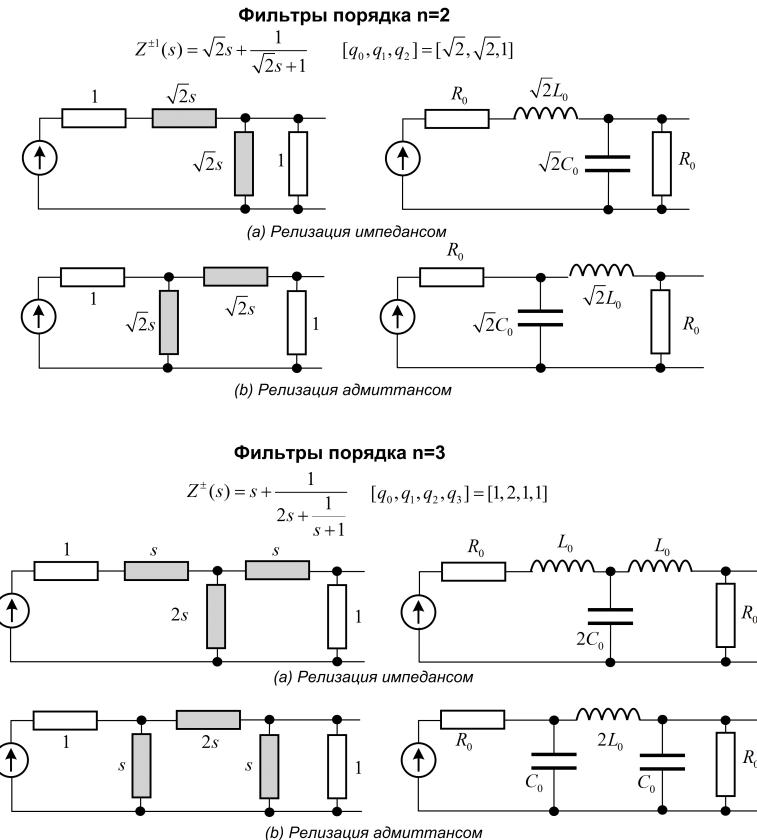


Рис. 6. Фильтры порядков n=2 и n=3

Рассматривая эти рисунки, важно уяснить общий принцип построения схемы лестничного фильтра порядка n по заданному блоку коэффициентов $[q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n = r]$.

К источнику с единичным внутренним сопротивлением пристраиваем справа лестницу из иммитансов $q_j s$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Первый иммитанс $q_0 s$ можно включить как горизонтально – последовательно с источником, так и вертикально – параллельно ему. Это приведет к варианту реализации фильтра импедансом

или адmittансом. Чередуем последовательные и параллельные иммитансы, пока ни будет использован предпоследний коэффициент q_{n-1} . Построение лестницы завершает установка в конце нагрузочного резистора $r = q_n$.

Построенную лестницу нужно теперь сделать физической схемой. Для этого выбираем частоту среза фильтра ω_0 , определяемся с сопротивлением источника R_0 и вычисляем эталонные емкость и индуктивность:

$$C_0 = \frac{1}{R_0 \omega_0} = \frac{1}{2\pi R_0 f_0}, \quad L_0 = \frac{R_0}{\omega_0} = \frac{R_0}{2\pi f_0}.$$

Горизонтальные иммитансы qs (импедансы) реализуем индуктивностями qL_0 , вертикальные (адmittансы) – емкостями qC_0 . Наконец, резистор нагрузки выбираем равным $q_n R_0$. Для фильтров Баттервортта q_n всегда единица. Схема фильтра готова.

8. Преобразования фильтров

Реализованный лестничный фильтр нижних частот можно преобразовать в фильтр иного типа – фильтр верхних частот, полосовой или режекторный. Техника преобразования опирается на рациональные замены комплексной частоты s , которые оставляют рациональные функции от s рациональными.

Предположим, что в нашем распоряжении имеется передаточная функция $K(s)$ идеального фильтра нижних частот с прямоугольной частотной характеристикой $K(\nu) = |K(s)|_{s=j\nu}$, $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$, рис. 7а.

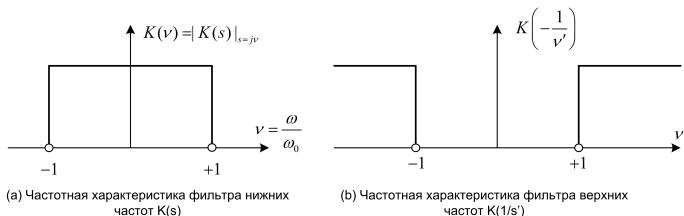


Рис. 7. Преобразование фильтров

Сделаем в $K(s)$ замену переменной $s = \frac{1}{s'}$ и изучим свойства фильтра $K(\frac{1}{s'})$, рис. 7б. Из $j\nu = s = \frac{1}{s'} = \frac{1}{j\nu}$ следует:

$\nu = -\frac{1}{\nu'}$. Так что частотная характеристика нового фильтра – это в точности функция $K(-\frac{1}{\nu'})$ частоты ν' . Отображение $\nu = -\frac{1}{\nu'}$ переводит внешность интервала $\nu' \in (-1, +1)$ на внутренность интервала $\nu \in (-1, +1)$ – внутрь полосы пропускания фильтра $K(\nu)$. Так что вне полосы $\nu' \in (-1, +1)$ коэффициент передачи нового фильтра равен 1. Внутри этой полосы он, очевидно, нулевой. Так что замена $s = \frac{1}{s'}$ переводит фильтр нижних частот в фильтр верхних частот. Полосы пропускания и задержания меняются местами.

Замена

$$s = Q \left(s' + \frac{1}{s'} \right)$$

переводит фильтр нижних частот в полосовой с частотной характеристикой $K(Q\left(\nu' - \frac{1}{\nu'}\right))$. Чтобы убедиться в этом, выясним, когда значения функции $\nu = Q\left(\nu' - \frac{1}{\nu'}\right)$ оказываются внутри полосы пропускания $\nu \in (-1, +1)$:

$$-1 < Q\left(\nu' - \frac{1}{\nu'}\right) < 1.$$

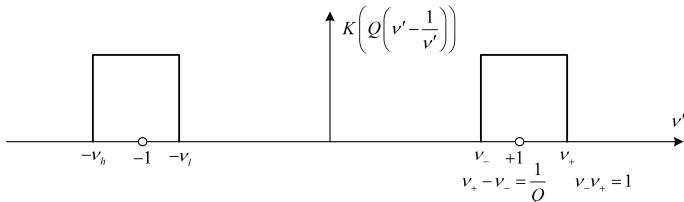


Рис. 8. Полосовой фильтр

Решениями этих неравенств оказываются два симметричные относительно нуля интервала: $\nu' \in (\nu_-, \nu_+)$ и $\nu' \in (-\nu_+, -\nu_-)$, рис. 8, где

$$\nu_{\pm} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q}.$$

Полосой пропускания нового фильтра оказывается интервал $\nu' \in (\nu_-, \nu_+)$ ширины $\frac{1}{Q}$ несколько несимметрично расположенный вокруг точки $+1$, которая является средним геометрическим границ: $\nu_- \nu_+ = 1$.

Наконец, замена

$$s = \frac{1}{Q\left(s' + \frac{1}{s'}\right)}$$

переводит полосовой фильтр в режекторный с полосой режекции $\nu' \in (\nu_-, \nu_+)$.

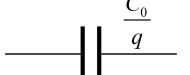
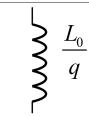
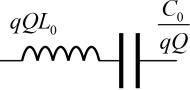
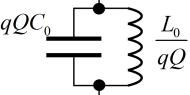
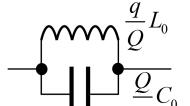
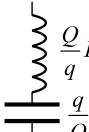
Иммитанс	Реализация импедансом	Реализация адmittансом
qs		
$\frac{q}{s}$		
$qQ\left(s + \frac{1}{s}\right)$		
$\frac{q}{Q\left(s + \frac{1}{s}\right)}$		

Рис. 9. Реализации иммитансов

Преобразование лестничного фильтра низких частот в фильтры иного типа сводится к замене в лестничной структуре иммитансов вида qs на $\frac{q}{s}$ (фильтр верхних частот), $qQ\left(s + \frac{1}{s}\right)$ (полосовой фильтр), $\frac{q}{Q\left(s + \frac{1}{s}\right)}$ (режекторный фильтр).

Получившиеся иммитансы реализуются импедансами (последовательные компоненты) и адmittансами (параллельные компоненты), как показано на рис. 9. Преобразование в фильтр верхних частот сводится к замене емкостей индуктивностями и наоборот. В полосовых и режекторных фильтрах иммитансы реализуются последовательными или параллельными LC -резонаторами.

Примеры преобразования фильтра низких частот второго порядка показаны на рис. 10. За основу взята лестничная струк-

тура, реализующая входной адmittанс.

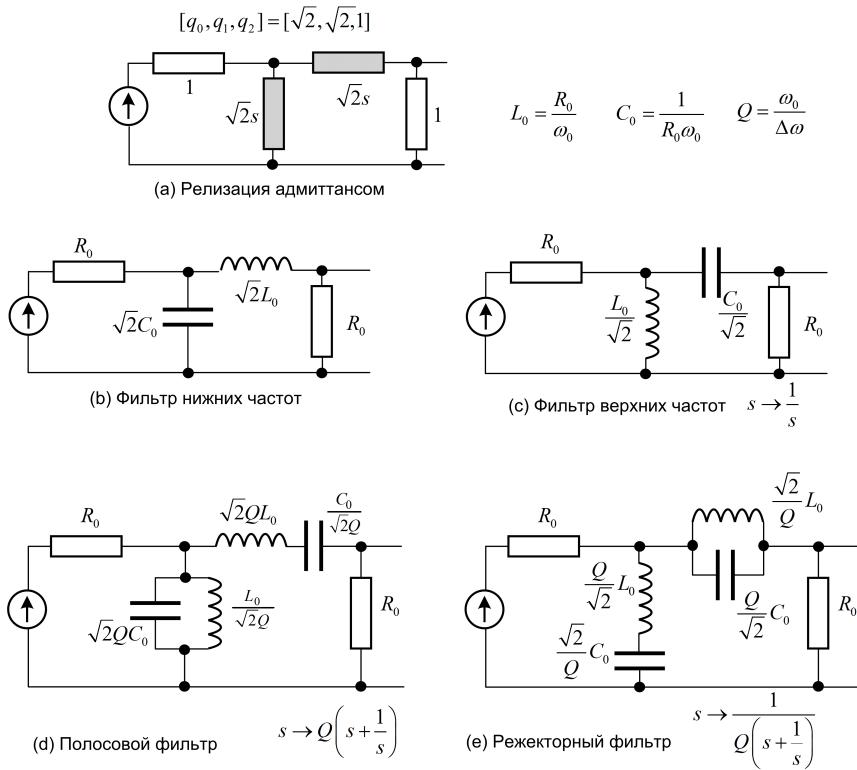


Рис. 10. Реализации фильтров второго порядка

9. Задание

9.1. Ознакомительные шаги

Для начала откройте в Micro-Cap один из файлов imp3r.cir или adm3r.cir, в которых подготовлены схемы лестничных фильтров порядка $n = 3$, реализующих входной импеданс (imp) или адmittанс (adm). Каждая из моделей содержит схему фильтра нижних частот (выходной узел **l** – low) и результаты его преобразования в фильтр верхних частот – (узел **h** – high), полосовой (узел **b** – band) и режекторный (узел **r** – reject) фильтры.

Слева вверху находятся никаку не подключенные компоненты, номиналы которых обеспечивают настройку параметров фильтров. Резистор f_0 задает характерную частоту $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. В формулах эта частота фигурирует как $r(f_0)$ – сопротивление резистора с именем f_0 . Номинал резистора Q задает добротности полосового и режекторного фильтров – $r(Q)$. Конденсатор C_0 и индуктивность L_0 задают эталонные емкость $c(C_0)$ (емкость конденсатора с именем C_0) и индуктивность $l(L_0)$.

По умолчанию схемы реализуют нормализованные фильтры с единичными сопротивлением источника $R_0 = 1$ и частотой $\omega_0 = 1$, $f_0 = \frac{1}{2\pi}$. Этому отвечают единичные же значения эталонов: $L_0 = \frac{R_0}{\omega_0} = 1$ и $C_0 = \frac{1}{R_0\omega_0} = 1$.

Номиналы компонентов схем рассчитываются автоматически по заданным непосредственно на схемах формулам через эталонные значения $R_0 = r(R0)$, $C_0 = c(C0)$, $L_0 = l(L0)$ и q -коэффициенты фильтра $[q0, q1, q2, q3] = [1, 2, 1, 1]$. Первое, что нужно сделать – это сопоставить эти формулы с приведенными на рис. 9 и уяснить их происхождение. В этом залог успеха.

Теперь можно ознакомиться с подготовленными графиками, открыв диалог Limits для режима АС. Плот 1 – $v(l)$ – это частотная характеристика по напряжению для фильтра нижних частот. Заменив имя узла l на h, b, r , можно вывести в этот плот характеристики прочих фильтров. Плот 2 – $db(v(l))$ – представляет ту же характеристику в децибелах. В плот 3 выводится частотная характеристика по коэффициенту передачи мощности $G(\omega) = 4v^2(l)$. Плот 4 – $ph(v(l))/90$ – это фазовая характеристика, нормированная так, что единице отвечает фазовый сдвиг в $\frac{\pi}{2}$. Наконец, в плот 5 выведены теоретические частотные характе-

ристики фильтров Баттервортса третьего порядка, вычисляемые по формулам

$$\frac{0.5}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^{\pm 6}}}, \quad \frac{0.5}{\sqrt{1 + \left[Q\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)\right]^{\pm 6}}}.$$

Это полезный инструмент сравнения экспериментальных кривых с теорией.

Ненужные прямо сейчас графики лучше отменять, стирая номер в поле P . При анализе логарифмических частотных характеристик лучше переходить к логарифмическому масштабу по оси частот. Нижнюю частоту интервала моделирования при этом разумно задавать отличной от нуля.

Запустите моделирование в режиме АС для обоих файлов. Попробуйтесь на графики. Удивитесь тому, что топологически совершенно разные схемы в `imp3p.cir` и `adm3p.cir` демонстрируют тождественное поведение.

9.2. Трехполюсные лестничные фильтры

1. Открыв любую из моделей `imp3p.cir`, `adm3p.cir` по выбору, реализуем лестничные фильтры третьего порядка с параметрами

$$R_0 = 50; \quad f_0 = 1MHz, \quad Q = 10.$$

Для этого вычислим эталонные значения

$$L_0 = \frac{R_0}{2\pi f_0}, \quad C_0 = \frac{1}{2\pi f_0 R_0}$$

и установим на схеме номиналы компонентов $f0$, Q , $R0$, $L0$, $C0$.

2. Сравнив частотные характеристики фильтров с теоретическими, удостоверимся в правильности расчетов. *Интервал моделирования по частоте поправить на 5Meg, 0. Сопоставить характеристики лучше всего выведя их в единый плот номер 1.*

3. Сравнить частотные характеристики по напряжению и по мощности. Измерить уровни затухания по мощности на границах полос пропускания, там где затухание по напряжению составляет 0.7. Исследовать степень деградации характеристик фильтра низких частот при варьировании сопротивлений источника RSL

и нагрузки RLL от 25 до 75 с шагом 25. Измерить зависимости от этих сопротивлений коэффициентов передачи напряжения и мощности на нулевой частоте.

4. Изучив фазовые характеристики фильтров, измерить значения фазовых сдвигов на нулевой и бесконечной частотах. *Micro-Cap не вполне адекватно приводит фазовые сдвиги по модулю 2π . При интерпретации графиков важно иметь в виду, что нулевое значение фазовой характеристики фильтров низких частот и режекторных фильтров находится на нулевой частоте, фильтров верхних частот – в бесконечности, а полосовых фильтров – на частоте f_0 .*

5. Вывести логарифмическую (в dB) частотную характеристику фильтра низких частот в диапазоне $1Meg, 100k$ (логарифмическая шкала) и измерить по ней уровни затухания в децибелах на частотах 0, f_0 , $2f_0$, $10f_0$.

6. Вывести логарифмическую частотную характеристику полосового фильтра в диапазоне $1500k, 500k$ (линейная шкала) и измерить по ней уровень подавления на частоте f_0 , одностороннюю ширину Δf полосы пропускания по уровню $-3 dB$ и уровни затухания при расстройках на $2\Delta f, 10\Delta f$ от частоты f_0 . Уровни затухания отсчитывать от уровня на частоте f_0 .

7. По логарифмической частотной характеристике режекторного фильтра в диапазоне частот $1500k, 500k$ измерить ширины полос режекции по уровням $-3 dB, -43 dB, -63 dB$. Уровни режекции отсчитывать от уровня в полосе пропускания.

8. Изучить переходные характеристики фильтров.

9.3. Фильтры низких частот высших порядков

1. Открыть модель batt.cir, в которой реализованы фильтры Баттерворта низких частот с параметрами $R_0 = 100$, $f_0 = 1 MHz$ ($L_0 = 15.916 \mu$, $C_0 = 1.592 n$) порядков от 3 до 7. Изучить их частотные и переходные характеристики. По логарифмическим графикам в диапазоне $10 Meg, 100k$ измерить затухания на частотах $f_0, 2f_0$ и $10f_0$.

2. Повторить те же исследования для фильтров Чебышева с неравномерностями $0.5 dB$ (файл cheb0-5.cir) и $3 dB$ (файл cheb3-0.cir). По результатам измерений заполнить таблицы

Фильтр	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
Баттерворт					
Чебышева 0.5 dB					
Чебышева 3.0 dB					

для уровней затухания в децибелах на частотах $2f_0$, $10f_0$.

3. Вернуться к batt.cir и перенастроить фильтры на $R_0 = 50$, $f_0 = 10 \text{ MHz}$.

9.4. Фильтры пятого порядка

1. Открыть модель flt5p.cir с шаблонами фильтров пятого порядка всех четырех типов – l, h, b, r . Топологии схем выбраны так, чтобы минимизировать число индуктивностей, или, при одинаковых количествах емкостей-индуктивностей, минимизировать число больших индуктивностей. *При технической реализации емкость предпочтительнее индуктивности, а малая индуктивность предпочтительнее большой.* Номиналы всех емкостей и индуктивности на схемах установлены равными эталонным значениям $C_0 = c(C0)$, $L_0 = l(L0)$.

2. Превратите все четыре фильтра в нормализованные фильтры Баттервортса, добавив на схемах требуемые множители при номиналах емкостей и индуктивностей. Выражения для множителей через q -коэффициенты и добротности $r(Q)$ заимствовать из рис. 9. Блоки q -коэффициентов приведены на схеме. К примеру, номинал емкости $C0l$ фильтра нижних частот должен выражаться формулой $0.618 * c(C0)$, номинал индуктивности $L0r$ режекторного фильтра – формулой $(0.618/r(Q)) * l(L0)$. Правильность настроек номиналов контролируйте по частотным характеристикам.

3. Настройте фильтры на $Q = 5$, $R_0 = 50$ и $f_0 = 1 \text{ MHz}$, вычислив значения L_0 и C_0 . Изучите частотные и переходные характеристики того, что получилось. Превратите реализованные фильтры в фильтры Чебышева с неравномерностями 0.5 и 3 dB. Нужные для этого q -коэффициенты приведены на схеме. Изучите их частотные характеристики.

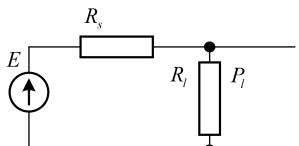
9.5. Семиполюсной фильтр

Покончив со школой, пора заняться чем-нибудь практическим. Открыв заготовку pb7p.cir, реализуйте типовой семипо-

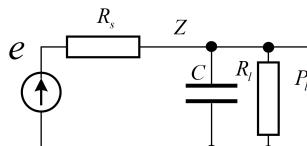
люсной полосовой фильтр Чебышева с неравномерностью 3 dB для тракта усилителя промежуточной частоты приемника с параметрами $R_0 = 600$, $f_0 = 465 \text{ kHz}$ и двухсторонней полосой $\Delta f = 24 \text{ kHz}$, $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 19.375$. По логарифмической частотной характеристике измерьте избирательность по соседнему каналу – уровень затухания при расстройках на $\pm 24 \text{ kHz}$ от f_0 . Выясните, как изменится избирательность при переходе к фильтру Чебышева с неравномерностью 0.5 dB и к фильтру Баттреворта. Нужные для этого коэффициенты приведены на схеме.

Ничего не стоит перекалибровать реализованные фильтры для высокочастотного диапазона, к примеру, на $R_0 = 50$ и $f_0 = 465 \text{ MHz}$. Для этого достаточно пересчитать эталонные индуктивность и емкость.

10. Для самопроверки



(а) К задаче 1



(а) К задаче 2

Рис. 11. К задачам 1 и 2

1. Проверьте, что для рассеиваемой в нагрузке мощности P_l на схеме рис. 11a справедливо представление:

$$\frac{P_l}{P_s} = (1 - \rho^2), \quad \text{где} \quad P_s = \frac{E^2}{4R_s}, \quad \rho = \frac{R_l - R_s}{R_l + R_s}.$$

При каком R_l мощность P_l максимальна?

2. Прямыми вычислениями проверьте формулы для коэффициента передачи мощности G в схеме на рис. 11b:

$$G = \frac{P_l}{P_s} = 1 - |\rho(j\omega)|^2 = \frac{4R_s R_l}{(R_s + R_l)} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} = \frac{4R_s}{R_l} |K(j\omega)|^2.$$

Здесь $P_s = \frac{|e^2|}{8R_s}$ – мощность источника, $\rho(j\omega) = \frac{Z-R_s}{Z+R_s}$, $Z = \frac{1}{j\omega C} || R_l$ – коэффициент отражения, $\omega_0 = \frac{1}{(R_s || R_l)C}$, а $K(j\omega)$ – комплексный коэффициент передачи:

$$K(j\omega) = \frac{R_l}{(R_s + R_l)} \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)}.$$

Сравните графики $|\varrho(j\omega)|^2$ и $|K(j\omega)|^2$.

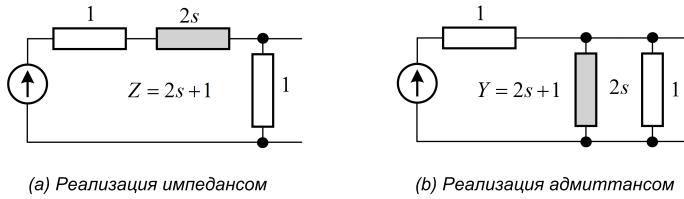


Рис. 12. Фильтры первого порядка

3. Отправляясь от любой из показанных на рис. 12 реализаций фильтров первого порядка, нарисуйте схемы фильтра низких частот, фильтра верхних частот, полосового и режекторного фильтров.

Учебное издание

**Григорьев Александр Алексеевич
Григорьев Иван Александрович**

ЛЕСТНИЧНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Учебно-методическое пособие

Редактор *О. П. Котова*. Корректор *И. А. Волкова*

Подписано в печать 30.12.2020. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 1,8. Уч.-изд.л. 1,2. Тираж 200 экз. Заказ 38

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

E-mail: polygraph@mipt.ru