High Performance Mandelbrot

Nsundi Mboli Patrick

7 août 2025

Table des matières

1 Introduction

Le long de ce document/partie nous considerons les variables suivantes :

- $(n, m) \in \mathbb{N}^2$
- $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$
- $(z, c) \in \mathbb{C}^2$ tel que $c = a + ib$ et $z = x + iy$

Nous étudions la suite complexe (z_n) tel que

$$(z_n) : \begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = (z_n)^2 + c \end{cases}$$

Pour définir la figure de Mandelbrot on seplace dans un plan complexe. Dans ce plan nous cherchons l'ensemble des points complexes c qui font que la suite complexe (z_n) soit bornée. L'ensemble de ses points forment partie de l'ensemble de Mandelbrot. La suite (z_n) est bornée si son module reste compris entre 0 et 2. (Pour rappel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$). En effet, le module est un nombre positif et il a été démontré (la démonstration est consultable sur Internet) que si le module de (z_n) dépasse 2 alors la suite n'est plus bornée (diverge).

Ainsi un manière simple de la programmer est de prendre chaque point du plan et lui applique la suite (z_n) jusqu'à ce que le module soit superieur à 2. Les points qui bouclent indefiniment dans cette configuration sont ceux qui convergent. On doit alors limiter le nombre d'itérations maximales. Cette implémentation est assez simple à mettre en place et est celle qui à été faite dans un premier temps.

Cependant, cette méthode naïve, s'avère très lente en séquentiel, sourtout pour une image de grande taille et lorsque le nombre d'itérations maximales dépasse le milier. Car, ici, nous voulons obtenir des belles images avec une grande résolution. On notera que, plus le nombre d'itérations maximales est grand plus l'image obtenue du Mandelbrot contient des détails. Ainsi, nous verrons comment on peut optimiser cette première version du code du Mandelbrot.

Première partie
Optimisation

Dans cette partie nous allons explorer plusieures pistes d'optimisation possibles.

2 Recherche analytique

Nous allons chercher analytiquement les points c tels que la suite (z_n) est bornée.

<u>Rappel suites bornées :</u>
La suite (u_n) est bornée si

$$\exists (l, L) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, l < |u_n| < L$$

Dans notre cas la distance au centre du plan (module) ne peut être négative. Soit on peut remplacer la définition précedente par une autre équivallente :

$$\exists l \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| < l$$

2.1 Soltion évidente

Une solution evidente de cet ensemble est le point $c = 0$. En effet, si $c = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, (z_n) = 0$.

2.2 Majoration de la suite

Par définition de la suite (z_n) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0 \\
z_1 &= c \\
z_2 &= c^2 + c \\
z_3 &= c^4 + 2c^3 + c^2 + c \\
z_4 &= c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 4c^5 + c^4 + c
\end{aligned}$$

Si maintenant on prend le cas $|c| < 1$, nous pouvons écrire :

$$|z^3| = |c^4 + 2c^3 + c^2 + c| \leqslant |c^4| + |2c^3| + |c^2| + |c| \text{ par inégalité triangulaire}$$

Alors comme $\forall x \in \mathbb{R}$, si $x < 1$ alors $x^n < x^{n-1}$, nous pouvons écrire :

$$|c^4| + |2c^3| + |c^2| + |c| < 5|c|$$

Soit, $|z^3| < 5|c|$. Si on repéte le même raisonement pour z_4 on obtient :

$$|c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 4c^5 + c^4 + c| \leqslant |c^8| + |4c^7| + |6c^6| + |4c^5| + |c^4| + |c| < 17|c|$$

Soit, $|z^4| < 17|c|$. On remarque alors que si $|c| < 1$ alors $|z_n| < m|c|$ avec $m > n$ (on pourrait même supposer que $m = 2^n + 1$ mais cela reste à pruver). Ce résultat ne permet pas de conclure car m dépend de n. En effet, si n augmente, m aussi augmente. Soit $m|c|$ n'est pas une borne fixe.

2.3 Constance de la suite

Nous savons que dans une suite si le terme $n+1$ est égal au terme n alors la suite est constante (donc bornée). Alors on pose :

$$\begin{aligned} z_{n+1} = z_n &\Rightarrow z_n^2 + c = z_n \\ &\Leftrightarrow c = z_n - z_n^2 = z_n(1 - z_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

On traite alors les differents cas selon n ($\in \mathbb{N}$)

Pour n=0 Nous avons :

$$c = z_0 - z_0^2 = 0$$

Ce qui veut dire que pour $c = 0$ la suite (z_n) est constante.

Pour n=1 Nous avons :

$$\begin{aligned} c &= z_1 - z_1^2 = c - c^2 \\ 0 &= -c^2 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons le même résultat que précédement.

Pour n=2 Nous avons :

$$\begin{aligned} c = z_2 - z_2^2 &\Rightarrow c = c^2 + c - (c^2 + c) \\ &\Leftrightarrow c = c^2 + c - c^4 - 2c^3 - c^2 \\ &\Leftrightarrow c = -c^4 - 2c^3 + c \\ &\Leftrightarrow 0 = -c^4 - 2c^3 \\ &\Leftrightarrow 0 = c^4 + 2c^3 \\ &\Leftrightarrow 0 = c^2(c^2 + 2c) \\ &\Leftrightarrow 0 = c^2 \text{ ou } 0 = c^2 + 2c \\ &\Leftrightarrow 0 = c \text{ ou } 0 = c(c + 2) \\ &\Leftrightarrow c = 0 \text{ ou } c = -2 \end{aligned}$$

Ici on obtient 2 valeurs pour lequels la suite est constante : 0 et -2. En effet si on prend $c = -2$, on a :

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= -2 \\ z_2 &= (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \\ z_3 &= 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Et on observe aussi que la suite devient constante à partir de $n = 2$.

Pour n=3 Nous avons :

$$\begin{aligned} c = z_3 - z_3^2 \quad &\Rightarrow \quad c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c - (c^4 + 2c^3 + c^2 + c) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = -c^8 - 4c^7 - 6c^6 - 4c^5 + 2c^3 + c^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = (-c^6 - 4c^5 - 6c^4 - 4c^3 + 2c + 1)c^2 \\ &\Leftrightarrow \quad c^2 = 0 \text{ ou } 0 = -c^6 - 4c^5 - 6c^4 - 4c^3 + 2c + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad c = 0 \text{ ou } 0 = -c^6 - 4c^5 - 6c^4 - 4c^3 + 2c + 1 \\ & \quad \text{On suppose -1 d'être une racine évidente de ce polyôme.} \\ & \quad \text{Après division polynomiale on a bien ceci :} \\ &\Leftrightarrow \quad c = 0 \text{ ou } (-c^5 - 3c^4 - 3c^3 - c^2 + c + 1)(c + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad c = 0 \text{ ou } c = -1 \text{ ou } 0 = -c^5 - 3c^4 - 3c^3 - c^2 + c + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad c = 0 \text{ ou } c = -1 \text{ ou } 0 = (c^2 + c + 1)(-c^3 - 2c^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow \quad c = 0 \text{ ou } c = -1 \text{ ou } 0 = (c^2 + c + 1)[(c + 1)(-c^2 - c + 1)] \end{aligned}$$

Resolution du polynôme $c^2 + c + 1$: Ici $\Delta = 1 - 4 * 1 * 1 = -3$. Nous avons deux racines complexes conjuguées. Soit :

$$c_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } c_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Resolution du polynôme $-c^2 - c + 1$: Ici $\Delta = (-1)^2 - 4 * 1 * (-1) = 1 + 4 = 5$. Nous avons deux racines réelles. Soit :

$$c_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$c_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-2} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Ainsi pour $n = 3$, il y a 6 valeurs de c pour lequelles la suite (z_n) est constante : 0, -1, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Pour $n \geq 3$ Il semble évident que le nombre de valeurs pour lequelles $c = z_n - z_n^2$ continuera de s'accroître exponentiellement en fonction de n. Mais implémenter une telle méthode serait fastidieux et cela pour un gain de performance très limité. Car on se limite a calculer un certains nombre de points (une centaine ou plus au bout de nombreuses itérations) sur lequels il ne faudrait pas itérer la boucle la plus interne. Il serait plus interressant de calculer une zone ou un intervalle de points dont nous sommes surs qu'il convergent.
Cependant, ceci est une considération valable pour un dessin du Mandelbrot sans zoom (en entier), centré sur l'origine du plan. Dans d'autres cas il serait intéressant de réconsiderer cette conclusion.