Семинар 1

Сложност по време

def:// Сложност на алгоритъм: функция по големината на входа.

! Не ни интересува точната ф-я. Интересува ни как расте ф-ята при $n \to +\infty$ (асимптота)

Пример:

при:	$n^3 \log n$ "расте по-бързо"	n^2 "расте по-бързо"	$n\sqrt{n}$	n
$n=10$	$1000 \log 10$	100	$10\sqrt{10}$	10
$n=100$	$1000000 \cdot \log 100$	10000	$1000\sqrt{10}$	100
$n=1000$	$1000000000 \cdot \log 1000$	1000000000	$1000\sqrt{1000}$	1000

$\log 10 \approx 4 \quad \log 100 \approx 7 \quad \log 1000 \approx 10$

Класът $\Theta(g)$: множеството от всички функции, които растат като g.

$\Theta(n)$ - не знаем колко е точно ф-ята, но знаем, че расте точно като n

Пример: $3n + 17 \in \Theta(n)$

адитивна константа (събиране)

мултипликативна константа (мултипликативна - множ.)

! Константите не влияят на асимптотата !

- Ако $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f}{g} = \infty$, то $f > g$

Пример: Нека $f(n) = n^5 + 3n^3 + 7$

$g(n) = n^3 + 2n^2 + n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+3n^3+7}{n^3+2n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(1+\frac{3n^3}{n^5}+\frac{7}{n^5}\right)}{n^3\left(1+\frac{2n^2}{n^3}+\frac{n}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(1+\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^5}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)},$$ но

имаме, че $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ следователно:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(1+\overset{=0}{\frac{3}{n^2}}+\overset{=0}{\frac{7}{n^5}}\right)}{n^3\left(1+\underset{=0}{\frac{2}{n}}+\underset{=0}{\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{n^5}{\cancel{n^3}} = n^2 \Rightarrow \infty$$

- Ако $\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = \text{const}$, то $f \asymp g$ след. $f \in \Theta(g)$ и $g \in \Theta(f)$

Пример: $f(n) = 17n^3+2n^2+19$

$g(n) = 5n^3+3n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{17n^3+2n^2+19}{5n^3+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(17+\overset{=0}{\frac{2n^2}{n^3}}+\overset{=0}{\frac{19}{n^3}}\right)}{\cancel{n^3}\left(5+\underset{=0}{\frac{3n}{n^3}}\right)} = \frac{17}{5}$$

- Ако $\lim \frac{f}{g} = 0$, то $f \prec g$

Пример: Нека $f(n) = n^4+23n^2+16n$

$g(n) = n^7+3n^5+24n^2+5$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+23n^2+16n}{n^7+3n^5+24n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(1+\overset{=0}{\frac{23n^2}{n^4}}+\overset{=0}{\frac{16n}{n^4}}\right)}{n^7\left(1+\underset{=0}{\frac{3n^5}{n^7}}+\underset{=0}{\frac{24n^2}{n^7}}+\underset{=0}{\frac{5}{n^7}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^7} = \frac{1}{n^3} = 0 \quad \left(\text{от } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$$

Пример:

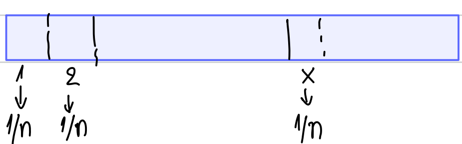
при:	$10\,n^2$	$10000 \cdot n$
$n = 5$	250	50000
$n = 10$	1000	100000
$n = 50$	25 000	500000
$n = 100$	100000 (5) бр. нули	1000000 (6) бр. нули
$n = 1000$	10000000 (7) бр. нули	10000000 (7) бр. нули.
$n = 10000$	10^9	10^8
$n = 10^5$	10^{11}	10^9

Пример 2: Намиране на минимален елемент в масив с linear search
$\Theta(n)$ горе долу n стъпки

- Best case: брой стъпки при най-добър вход
- Worst case: брой стъпки при най-лош вход.
- Average case: брой стъпки осреднено за всички възможни входове
  (намира се трудно)

! Приемаме, че всички входове са равновероятни !

Пример: Linear search, average case (елементите са различни)
1сл.// елементът го няма : $\Theta(n)$
2сл.// елементът го има : Той е на някоя от позициите $1..n$
Вероятността елементът, който търсим да е на позиция x $(1 \le x \le n)$
е $\frac{1}{n}$



$$\underbrace{1*\frac{1}{n} + 2*\cdot\frac{1}{n} + \dots + n*\frac{1}{n}}_{\text{брой стъпки до стигане на елемента * вероятността да е там}} = \frac{1}{n}\Big(\underbrace{1+\dots+n}_{\text{формула}}\Big) = \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Следователно в средния случай правим около $\frac{n+1}{2}$ стъпки, докато открием търсения от нас елемент. Получаваме, че и вторият случай е $\Theta(n)$.

Следователно Average case за linear search е $\Theta(n)$.