——-ОДОБРЕНА——-

Задача 0.1. *Да разгледаме следната функция:*

```
swap(A[1..n],i,j)
@1   t ← A[i]
@2   A[i] ← A[j]
@2   A[j] ← t

Bubble(A[1..n]: array of integers; m: index in A)
@1   j ← 1
@2   for i = 1 to m − 1 do
@3      if A[i] > A[i + 1] then
@4         swap(A, i, i + 1)
@5         j ← i
@6   done
@7   return j
```

Да се докаже, че:

1. *ако j е резултатът от изпълнението на функцията $Bubble(A, m)$, а $A'[1..n]$ е модифицираният масив A, то:*
   - $A'[j + 2..n] = A[j + 2..n]$ *и* $A'[1..j + 1]$ *е пермутация на масива* $A[1..j + 1]$.
   - $A'[j..m]$ *е сортиран във възходящ ред.*
   - *ако* $m > 1$, *то* $A'[j + 1] \geq A[i]$ *за всяко* $1 \leq i \leq j$.

<u>Доказателство:</u>

При m > 1, нека j_i е стойността на j преди i-тото достигане на for цикъла от ред @2 .

Нека също така A_i е състоянието на масива A преди i-тото достигане на цикъла от ред @2 .

Дефинирам $I(i) \leftrightarrow$

1. $A_i[j_i + 2..n] = A[j_i..n]$ и $A_i[1..j_i + 1]$ е пермутация на $A[1..j_i + 1]$
2. $A_i[j_i..i]$ е сортиран възходящо
3. $i > 1 \rightarrow A_i[j_i + 1] \geq A_i[i]$ за всяко $1 \leq i \leq j$

Ще покажа, че $I(i)$ е истина с индукция по i.

База: Нека i = 1. Имаме, че $j_i = j_1 = 1$ (инициализирано на ред @1), тогава:

1. $A_1[j_1 + 2..n] = A_1[3..n] = A[3..n]$ и $A_1[1..2] = A[1..2]$, значи наистина $A_1[1..2]$ е пермутация на $A[1..2]$
2. $A_1[1..1] = A_1[1]$ - сортиран е
3. Предпоставката на импликация е лъжа, следователно цялата импликация е истина

Нека сега $I(i)$ е истина за някое $1 < i \leq m - 1$. Ще покажа, че $I(i + 1)$ е истина.
Изпълнява се i-тата итерация на for цикъла от ред @2:

——-ОДОБРЕНА——--

1 случай: Условието от ред @3 е истина. Тогава $A_i[i] > A_i[i+1]$ и $j_{i+1} = i$. След изпълнението на ред @4 $A_{i+1}[i] = A_i[i+1]$ и $A_{i+1}[i+1] = A_i[i]$

1. $A_{i+1}[j_{i+1} + 2..n] = A_{i+1}[i+2..n] = A[i+2..m]$.
   a. $j_i = i - 1$. Тогава от ИХ имаме, че
      $A_i[1..i - 1 + 1] = A_i[1..i]$ е пермутация на $A[1..i]$ и $A_i[i+1] = A[i+1]$
      $A_{i+1}[1..i+1] = A_i[1..i-1] \circ A_i[i+1] \circ A_i[i] = A_i[1..i-1] \circ A[i+1] \circ A_i[i]$
      следователно $A_{i+1}[1..i+1]$ е пермутация на $A[1..i+1]$
   b. $j_i < i - 1$. Тогава от ИХ имаме, че $A_i[1..j_i + 1]$ е пермутация на $A[1..j_i + 1]$. Имаме още, че $A_i[j_i + 2..n] = A[j_i + 2..n]$ следователно $A_i[j_i + 2..i-1] = A[j_i + 2..i-1]$, така:
      $A_{i+1}[1...i+1] = A_i[1..j_i + 1] \circ A_i[j_i + 2..i-1] \circ A_i[i+1] \circ A_i[i] =$
      $= A_i[1..j_i + 1] \circ A[j_i + 2..i-1] \circ A[i+1] \circ A[i]$ значи наистина $A_{i+1}[1...i+1]$ е пермутация на масива $A[1..i+1]$

2. $A_{i+1}[j_{i+1}...i+1] = A_{i+1}[i..i+1]$ и $A_i[i+1] < A_i[i]$ следователно $A_{i+1}[j_{i+1}...i+1]$ е сортиран във възходящ ред
3. $i + 1 > 1$ остава да покажа, че$A_{i+1}[j_{i+1} + 1] = A_{i+1}[i+1] \geq A_{i+1}[k]$ за всяко $1 \leq k \leq i+1$
   a. Ако $j_i = i - 1$. От ИХ имаме, че $A_i[i] \geq A_I[k]$ за всяко $1 \leq k \leq i$, но от 1а имаме, че $A_{i+1}[1..i+1] = A_i[1..i-1] \circ A_i[i+1] \circ A_i[i]$ и $A_i[i+1] < A_i[i]$, защото условието на ред @3 е вярно, то следователно $A_{i+1}[i+1] \geq A_{i+1}[k]$ за всяко $1 \leq k \leq i+1$
   b. Ако $j_i < i - 1$. От ИХ имаме, че $A_i[j_i + 1] \geq A_i[k]$ за всяко $1 \leq k \leq j_i$ и $A_i[j_i..i]$ е сортиран във възходящ ред, от 1b
      $A_{i+1}[1...i+1] = A_i[1..j_i + 1] \circ A_i[j_i + 2..i-1] \circ A_i[i+1] \circ A_i[i]$ и
      $A_i[i+1] < A_i[i]$, защото условието на ред @3 е вярно, тогава наистина $A_{i+1}[i+1] \geq A_{i+1}[k]$ за всяко $1 \leq k \leq i+1$

2 случай: Условието от ред @3 е лъжа. Тогава $A_i[i] < A_i[i+1]$ следователно $A_{i+1}[i] = A_i[i]$; $A_{i+1}[i+1] = A_i[i+1]$ и $j_{i+1} = j_i$

1. $A_{i+1}[j_{i+1} + 2..n] = A_i[j_i + 2..n] =_{ih} A[j_i + 2..n] = A[j_{i+1} + 2..n]$
   $A_{i+1}[1..j_{i+1} + 1] = A_i[1..j_i + 1]$ е пермутация(от ih) на $A[1..j_i + 1] = A[1...j_{i+1} + 1]$
2. $A_{i+1}[j_{i+1}...i+1] = A_i[j_i..i] \circ A_i[i+1]$ от ИХ $A_i[j_i..i]$ е сортиран входящо, следователно и $A_{i+1}[j_{i+1}...i+1]$ е сортиран във възходящ ред
3. $A_{i+1}[j_{i+1} + 1] = A_i[j_i + 1] \geq_{ih} A_i[k] = A_{i+1}[k]$ за всяко $1 \leq k \leq j_i = j_{i+1}$

——-ОДОБРЕНА——--

Следователно $I(i)$ е истина за всяко $1 \leq i \leq m - 1$.
При $i = m$, когато цикълът завършва $j_m = j$, модифицираният масив $A'[1..n] = A_m[1..n]$

1. $A_m[j_m + 2..n] = A[j + 2..n]$ и $A_m[1..j_m]$ е пермутация на $A[1..j + 1]$
2. $A_m[1...j_m + 1] = A'[1..j + 1]$ е сортиран възходящо
3. За m>1 $A_m[j_m + 1] \geq A_m[k]$ за всяко $1 \leq k \leq j_m$, но $A_m[1..j_m]$ е пермутация на $A[1..j]$ следователно $A_m[j_m + 1] \geq A[k]$ за всяко $1 \leq k \leq j_m$