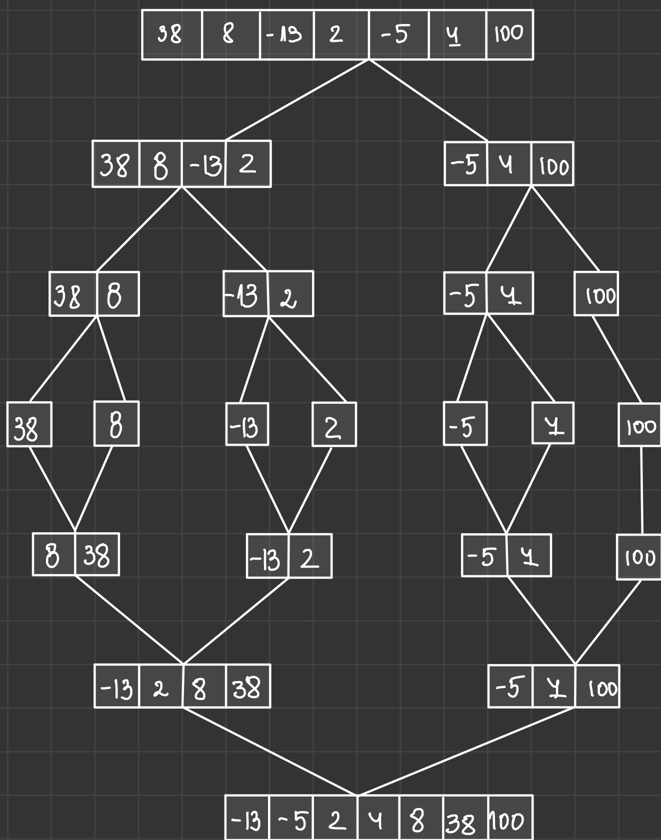
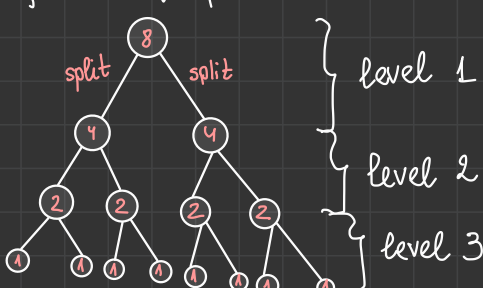
Бързи сортирания 1.

Merge sort

Пример:

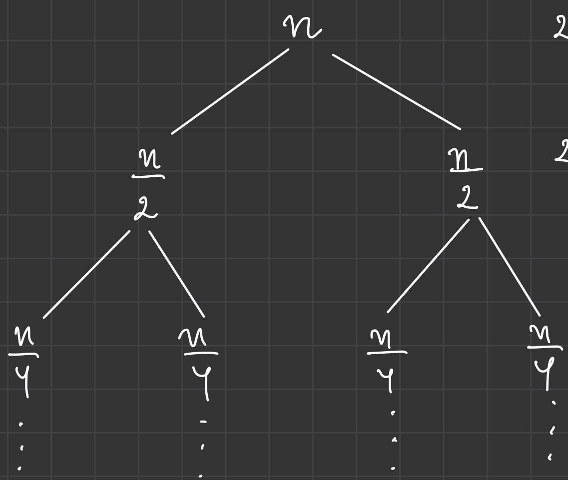


Интуиция за сложността:



Ако масивът има n елемента, то "времето", което ще ни отнеме, за да го сортираме е

$$T(n) = \underbrace{T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{split left}} + \underbrace{T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{split right}} + (n-1) \rightarrow \text{сравнения}$$



$2^0(n-1)$

$2^1\left(\frac{n}{2}-1\right)$

$\underline{\underline{2^2\left(n/4-1\right)}}$

$$T(n) = 2.\,T(n/2) + (n-1) \rightarrow \text{level } 1$$

$$T(n/2) = 2.\,T(n/4) + \left(n/2 - 1\right) \rightarrow \text{level } 2$$

$$2^i\left(\frac{n}{2^i} - 1\right) \rightarrow$$ за всеки от тях правим $\frac{n}{2^i} - 1$ сравнения

Колко масива с дължина $\frac{n}{2^i}$ имаме

$$\sum_{i=0}^{\log(n)-1} 2^i\left(\frac{n}{2^i}-1\right) = \sum_{i=0}^{\log(n)-1} n - 2^i = \sum_{i=0}^{\log(n)-1} n - \sum_{i=0}^{\log(n)-1} 2^i = n.\log n - \sum_{i=0}^{\log(n)-1} 2^i \nearrow \text{прогресия}$$

ф-ла за сума на прогресия $\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1.\,(1-2^{\log_2 n})}{1-2} = 2^{\log_2 n} - 1 = n-1$

$\Rightarrow n.\log n - (n-1)$

деф/за $O(g) = \{ f \mid \exists c>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ : \forall n \geq n_0 :$
$0 < f(n) \leq c \cdot g(n) \}$

Проблем: $n \cdot \log(n) + n - 1 \in O(n \cdot \log(n))$?

Използване $\max\{f, g\} \asymp f+g$ (*)

$$\underbrace{n \cdot \log(n) + n - 1}_{\text{сума}} \overset{(*)}{\asymp} \underbrace{n \cdot \log(n)}_{\max}$$

Имаме, че $1 < n < n \cdot \log(n)$

Доказателство за $\max\{f(n), g(n)\} \asymp f(n) + g(n)$

Търсим $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такива, че $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ такове, че за $\forall n \geq n_0$

имаме $0 < c_1 \cdot \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq c_2 \cdot \max\{f(n), g(n)\}$
$f(n)$, $g(n)$ са асимптотично положителни: $\Rightarrow$
за $f(n)$ $\exists n_0'$: $\forall n \geq n_0'$ $f(n) > 0$
за $g(n)$ $\exists n_0''$: $\forall n \geq n_0''$ $g(n) > 0$
Нека $n_0''' = \max(n_0', n_0'') \Rightarrow 0 < c_1 \cdot (f(n) + g(n))$ за $n \geq n_0'''$
За $\forall n \geq n_0'''$ е вярно, че:

$$\frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} g(n) \leq \max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n)$$

$\Rightarrow$ деф. ще е изпълнена за $n_0 = n_0'''$, $c_1 = \frac{1}{2}$ $c_2 = 1$