



Notas e Problemas de  
**Modelação de Sistemas Físicos**  
usando *Python*

*Parte III*

Vitor Torres

2022  
Departamento de Física  
**Universidade de Aveiro**



## **Índice:**

### **Parte I**

1. Física: Medição e modelação.
2. Movimento a uma dimensão.

### **Parte II**

3. Forças e vetores
4. Leis de Newton: Movimento no plano e no espaço
5. Leis de Conservação: Energia e Potência.
6. Leis de Conservação: Momento e colisões

### **Parte III**

7. Oscilações Mecânicas
8. Osciladores Forçados: Ressonância e Caos.
9. Osciladores acoplados: Modos Normais e Ondas

Formulário

Soluções dos problemas

## **Capítulo 7**

# Osciladores Simples

### **Sumário**

Física

Período e frequência

Oscilador harmônico Simples. Resolução analítica e numérica.

Oscilador cúbico simples.

Osciladores Amortecidos.

Apêndice 7.A Interpolação de Lagrange

Apêndice 7.B Série de Fourier

Pyton

Functions

Métodos Numéricos

Interpolação de Lagrange. Cálculo de máximos, mínimos e zeros de uma função.

Série de Fourier. Transformada discreta de Fourier.

## 7.1 Introdução. Período e frequência

Os movimentos periódicos, os que se repetem a cada intervalo de tempo igual, o período  $T$ , são muito frequentes e importantes. Exemplos destes movimentos são a trajetória da terra à volta do Sol, um sistema corpo ligado a uma mola, átomos a vibrarem em átomos, moléculas e cristais, ...

Uma outra quantidade que caracteriza estes movimentos, além do período, é a sua frequência,  $f$ . O número de repetições por unidade de tempo, sendo por isso

$$f = \frac{1}{T}.$$

Vamos analisar o movimento de vários sistemas periódicos. Os métodos que vamos usar serão primeiramente testados para o sistema mola-corpo, que para pequenas oscilações é um Oscilador harmônico Simples.

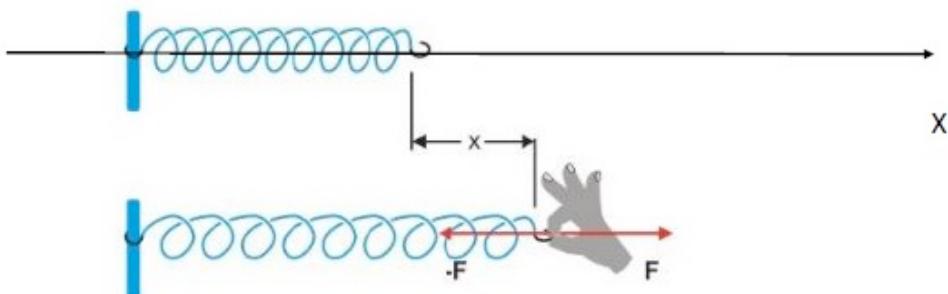
O efeito de amortecimento nos osciladores simples também é estudado. O amortecimento origina um movimento mais lento, e por isso é de esperar que o período aumente e a frequência diminua, e o corpo caminhe tende para a posição de equilíbrio.

## 7.2 Movimento corpo-mola

O sistema corpo ligado a uma mola é o mais simples dos movimentos periódicos. Experiências em que se medem os períodos para várias massas mostram que o período é proporcional à raiz quadrada da massa do corpo, para a mesma mola.

$$T = C\sqrt{M}.$$

Outras experiências mostram que a força elástica é proporcional ao desvio à posição de equilíbrio e aponta sempre para essa posição,



$$F_x = -k(x_{corpo} - x_{eq}),$$

em que  $x_{eq}$  é a posição de equilíbrio. Em muitos casos podemos tomar esta posição de equilíbrio como a origem do eixo, sendo assim  $x_{eq} = 0$ .

Este sistema corpo-mola é chamado de Oscilador Harmônico Simples (OHS), e a força elástica  $F_x = -kx$ , é realista para pequenas desvios à posição de equilíbrio.

### Oscilador Harmônico Simples

$$\text{Com } F_x = -kx \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow$$

Por integração analítica a solução

$$\begin{cases} x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \end{cases} \quad 7.1$$

Ou

$$\begin{cases} x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) \end{cases} \quad 7.2$$

Estas duas expressões expressam a mesma solução. Pela relação trigonométrica  
 $\cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin(x)$

temos  $\phi - \frac{\pi}{2} = \varphi$ .

Outras expressões matemáticas que representam a mesma solução do OHS:

$$\begin{cases} x(t) = C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases} \quad 7.3$$

### Problemas 7.1, 7.2 e 7.3

- a) Mostre que qualquer destas 3 expressões matemáticas (eqs. 7.1, 7.2 e 7.3) concordam com a equação fundamental da dinâmica, na forma:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

As constantes  $A, \phi, \varphi, C$  e  $D$  dependem das condições iniciais:

$x(t = 0)$  e  $v_x(t = 0)$ .

### Problemas 7.1, 7.2 e 7.3

Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1$  N/m e  $m = 1$  kg. No caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

7.1.b) Calcule  $A$  e  $\phi$ ,

7.2.b) Calcule  $A$  e  $\varphi$

7.3.b) Calcule  $C$  e  $D$

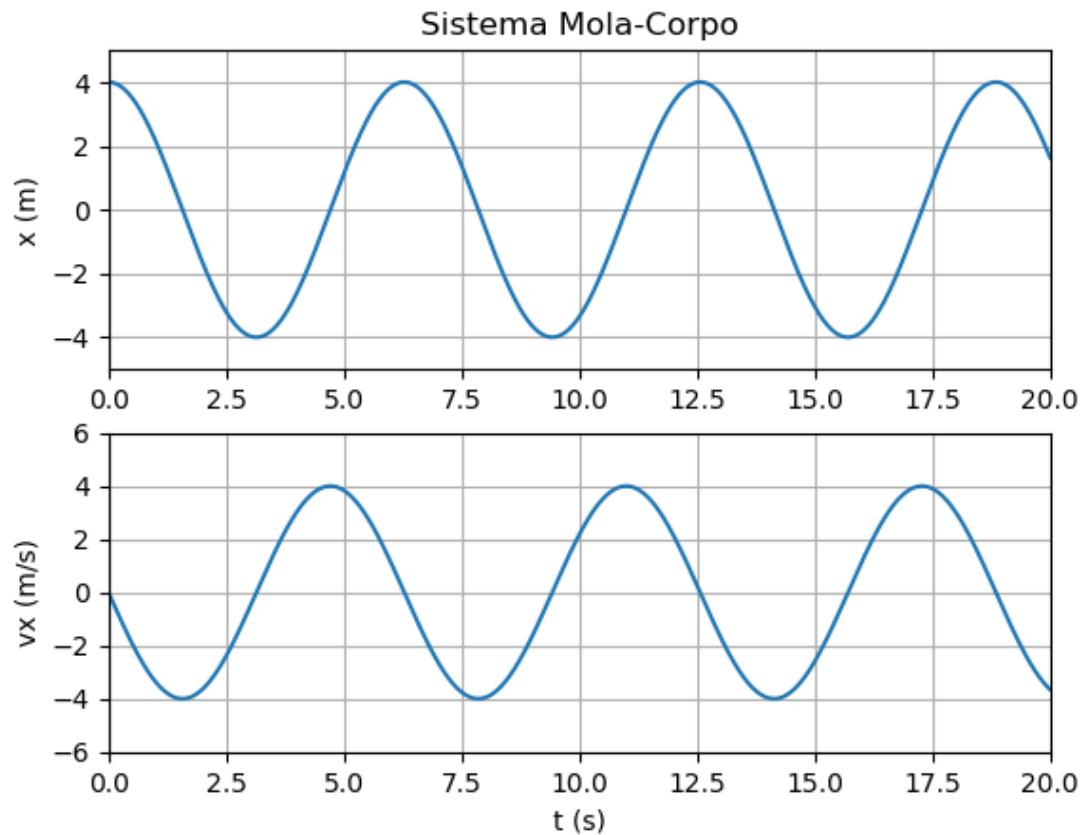
Qualquer destas 3 expressões matemáticas (eqs. 7.1, 7.2 e 7.3), com

$$A = 4 \text{ m} \text{ e } \phi = 0$$

$$A = 4 \text{ m} \text{ e } \varphi = \pi/2$$

$$C = 4 \text{ m} \text{ e } D = 0$$

Produz a mesma solução, como está na figura abaixo.

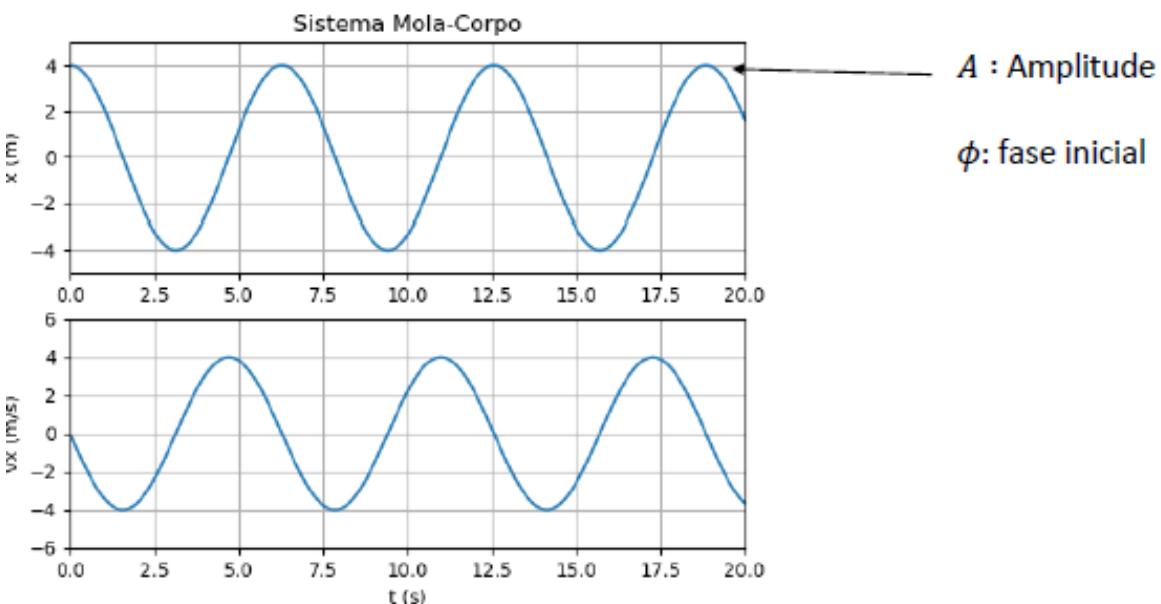


## Amplitude e período

A amplitude do movimento são os valores extremos (máximo e mínimo) da oscilação.  
Se usarmos

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

estes valores máximo e mínimo correspondem a  $x$  quando  $\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$  for  
máximo e mínimo, respectivamente 1 e -1. As amplitudes são  $A$  e  $-A$ .



## Período T?

$$x(t + T) = x(t)$$

$$\begin{aligned} A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t + T) + \phi\right) &= A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ \sqrt{\frac{k}{m}}(t + T) + \phi &= \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) + 2\pi \\ \sqrt{\frac{k}{m}}T &= 2\pi \end{aligned}$$

$$\text{e } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{ou } T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \sqrt{m}, \text{ o que de acordo com o resultado de experiências.}$$

Frequência: número de repetições por unidade de tempo

$$f = \frac{1}{T}$$

1 repetição - leva 1 T

$f$  repetições - leva 1 s  $\Rightarrow fT = 1$   
unidade: 1/s = Hz

$$\text{Como } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{Ou } \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f : \text{frequência angular } \omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

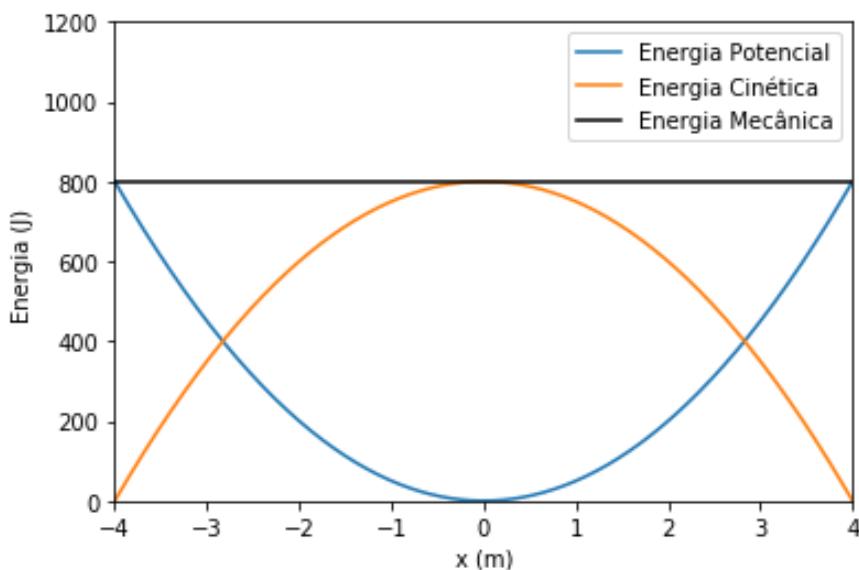
### Energia Mecânica

$$F_x = -k x \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad k = m \omega^2$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \\ v_x(t) = -A \omega \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E = E_c + E_p &= \frac{1}{2} m (A \omega \sin(\omega t + \phi))^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (A \cos(\omega t + \phi))^2 = \\ &= \frac{1}{2} m (A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi)) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 (\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)) = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \end{aligned}$$



## Espaço das fases

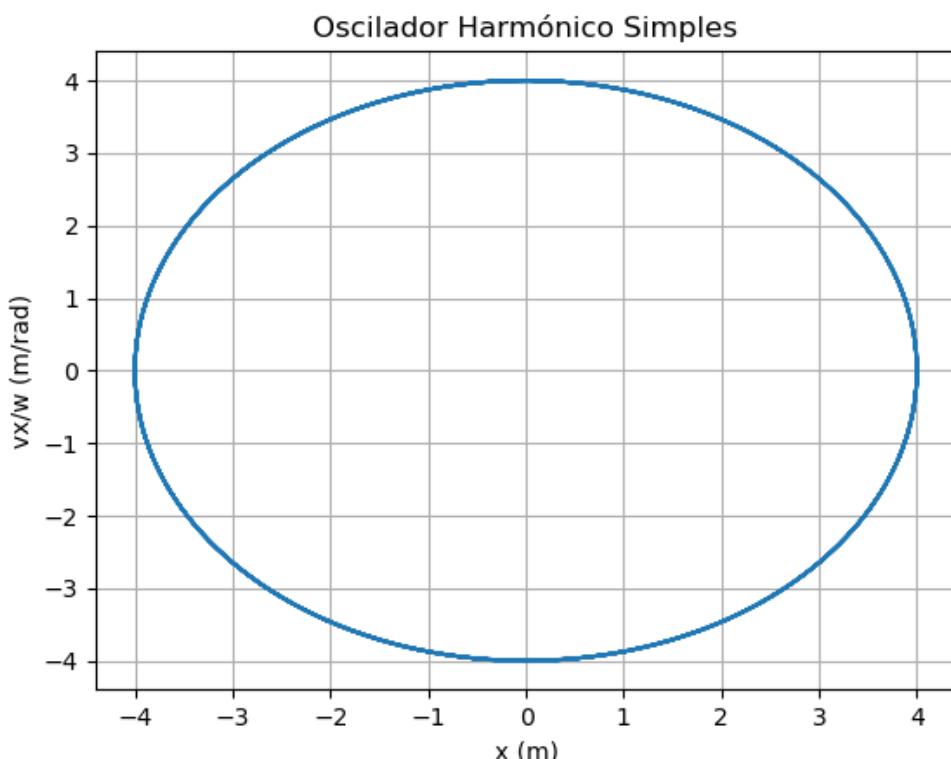
Espaço das fases consiste em todos os valores possíveis da posição e do momento.

Neste capítulo vamos usar a variável  $\frac{v_x(t)}{\omega}$  em substituição do momento (são proporcionais).

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \\ v_x(t) = -A \omega \sin(\omega t + \phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \\ \frac{v_x(t)}{\omega} = -A \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2(t) + \left(\frac{v_x(t)}{\omega}\right)^2 = A^2$$

é a equação de uma circunferência raio  $A$  e centrada na origem, como mostra a figura abaixo.



### 7.3 Oscilador harmônico Simples: Cálculo Numérico

$$F_x = -k x \Rightarrow \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

Vamos tratar o **mesmo problema** usado anteriormente no método analítico:

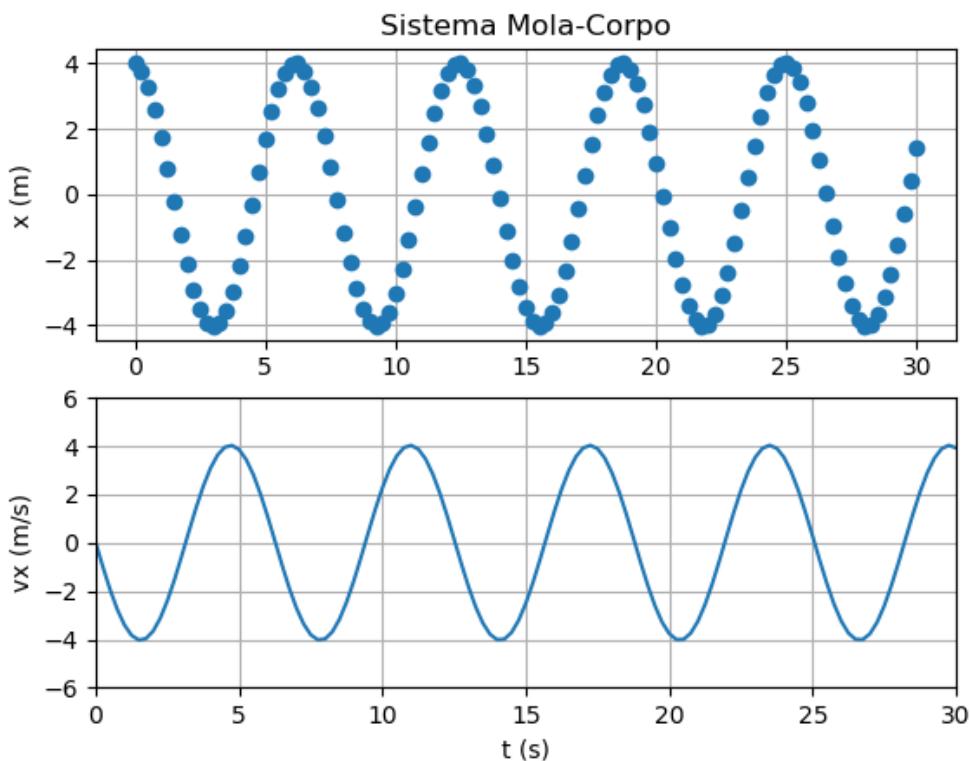
Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1$  N/m e  $m = 1$  kg. No caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

Vamos usar o método de Euler-Cromer. Sabemos calcular a posição e a velocidade em função do tempo. E vamos comparar os resultados com a solução analítica.

As questões são:

Como calcular a amplitude e o período?

Como saber que  $x$  é uma função cosseno ou seno?



Como calcular a amplitude e o período? E como saber que  $x$  é uma função cosseno ou seno?

### Determinação da amplitude e do período

Para calcular a amplitude com maior precisão vamos usar a determinação de máximos usando a interpolação de Lagrange (ver Apêndice 7.A) e a função maxminv. O registo dos vários máximos no tempo fornece o período.

### Determinação da função sinusoidal

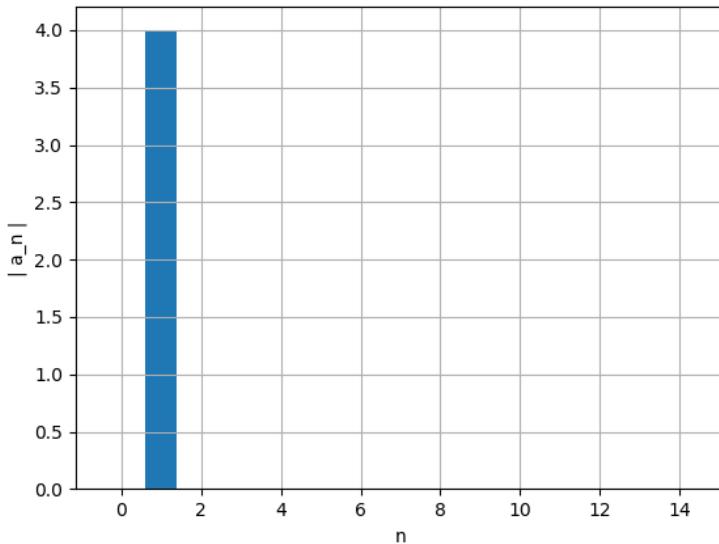
Como saber que  $x$  é uma função coseno ou seno? A série de Fourier fornece a resposta (ver apêndice 7.B)

Basta calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Temos de selecionar a função num período e calcular os coeficientes de Fourier por integração numérica usando a aproximação trapezoidal. A função abfourier (no e-learning) calcula os coeficientes de Fourier. Os coeficientes podem ser vistos nos gráficos abaixo



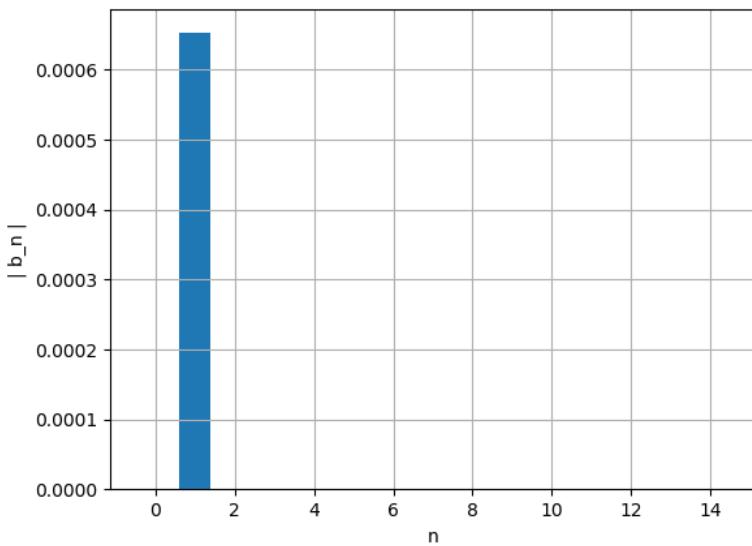


Gráfico: Note a pequenez da escala.

e os valores obtidos são:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 4 \\ a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0 \\ b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 0 \end{cases}$$

E substituindo na série de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \end{aligned}$$

Obtemos que a solução é a função

$$x(t) = a_1 \cos(\omega t)$$

### Importância do oscilador harmônico

Desenvolvendo a energia potencial à volta do seu valor mínimo,  $E_p(x_{min})$ ,

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_{min}} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 E_p}{dx^3} \right|_{x_{min}} \delta x^3 + \sigma(\delta x^4)$$

com  $\delta x = x - x_{min}$

$$\text{Em } x_{min} \text{ a força é nula!} \quad F_x(x_{min}) = -\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_{min}} = 0$$

E substituindo na série de Taylor

$$E_p(x) - E_p(x_{min}) = +\frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dx^2} \Big|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 E_p}{dx^3} \Big|_{tx_{min}} \delta x^3 + \sigma(\delta x^4)$$

Se fizermos a escolha:  $E_p(x_{min}) = 0$  e  $x_{min} = 0$

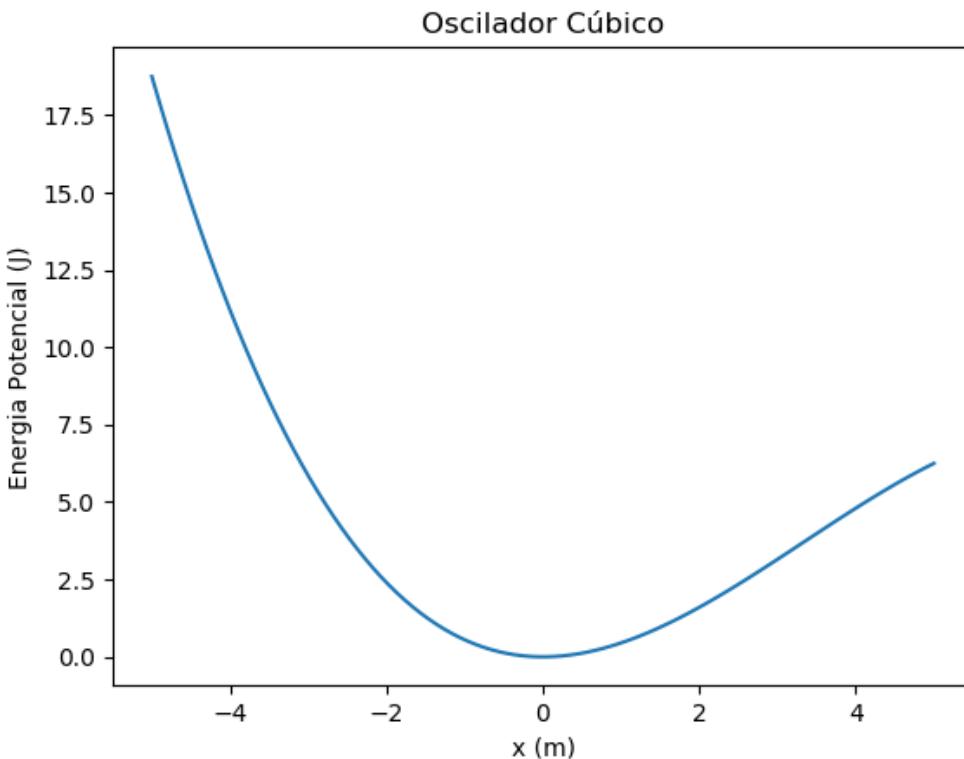
$$E_p(x) = +\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 E_p}{dx^3} \Big|_{x_{min}} x^3 + \sigma(x^4) \quad \text{com: } \frac{d^2 E_p}{dx^2} \Big|_{x_{min}} = k$$

Conclui-se que para  $x \ll 1$ , a aproximação harmónica (do oscilador harmónico) é certa.

## 7.4 Oscilador cúbico

$$E_p(x) = +\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 E_p}{dx^3} \Big|_{x_{min}} x^3$$

Ou  $E_p(x) = +\frac{1}{2} k x^2 + \alpha x^3$



### Problema 9.

Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador cúbico.

Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo  $x_{eq} = 0$  m, o oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \alpha x^3$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k x - 3\alpha x^2$$

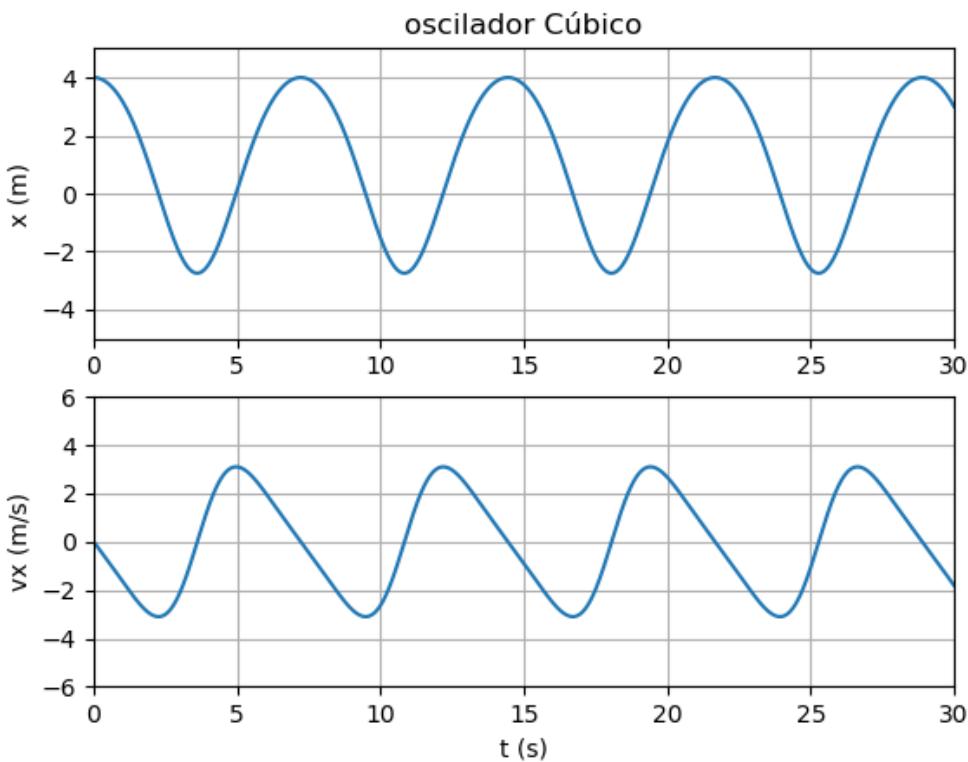
Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $\alpha = -0.05 \text{ N/m}^2$ .

- a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 1 J?
- b) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 4.00 m e a velocidade inicial nula? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

Vamos encontrar a solução numérica da posição e da velocidade em função do tempo, usando o método de Euler-Cromer

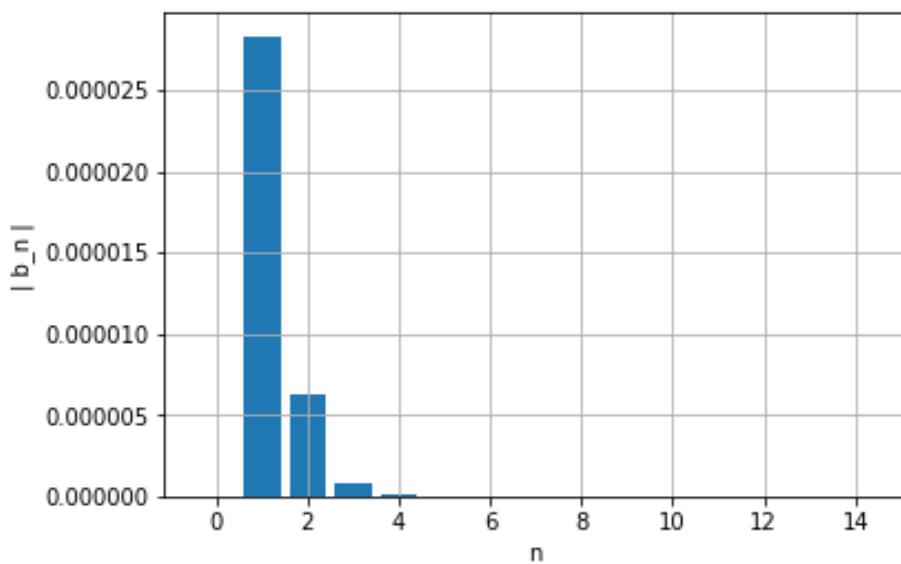
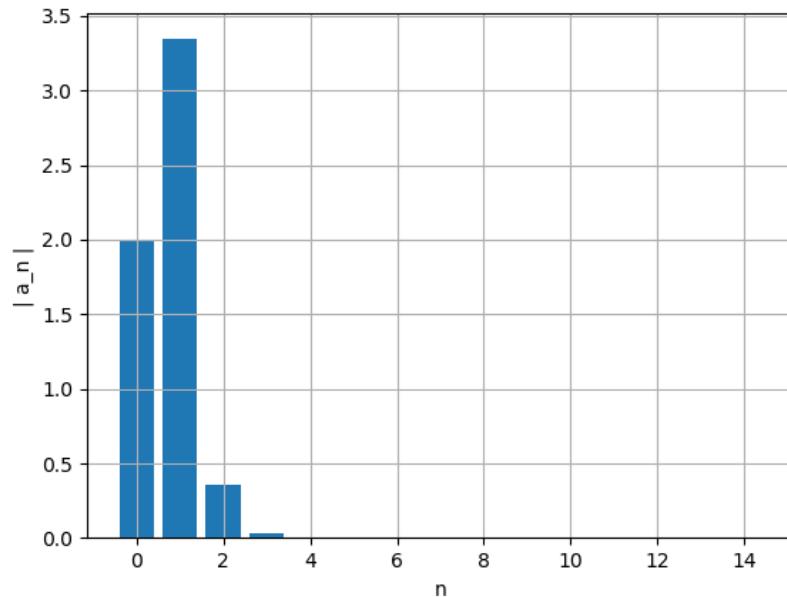
Força:  $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -k x - \alpha x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{3\alpha}{m}x^2 \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$



Podemos calcular a amplitude e o período.

E é um seno ou coseno?



Os coeficientes de Fourier são:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_1 = 3.3 \\ a_2 = 0.4 \\ a_3 = a_4 = \dots = 0 \\ b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 0 \end{array} \right.$$

A lei do movimento é agora uma soma de 3 parcelas com 2 cosenos

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t)$$

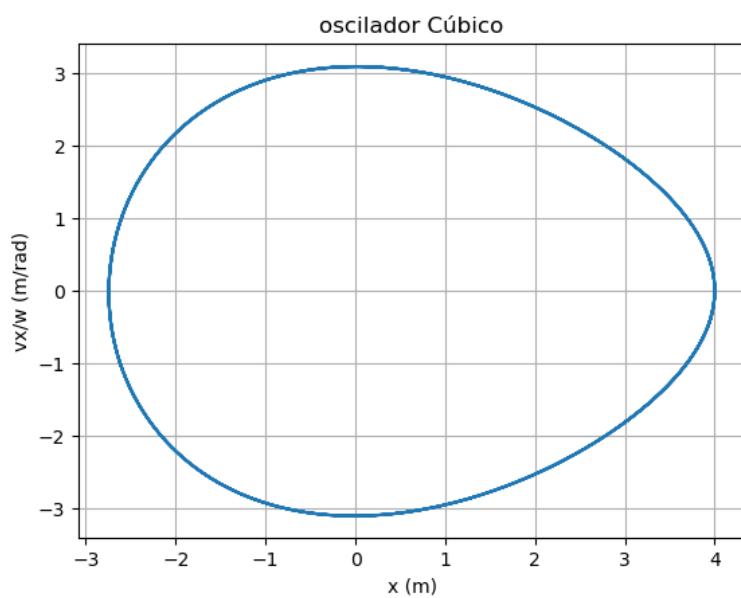
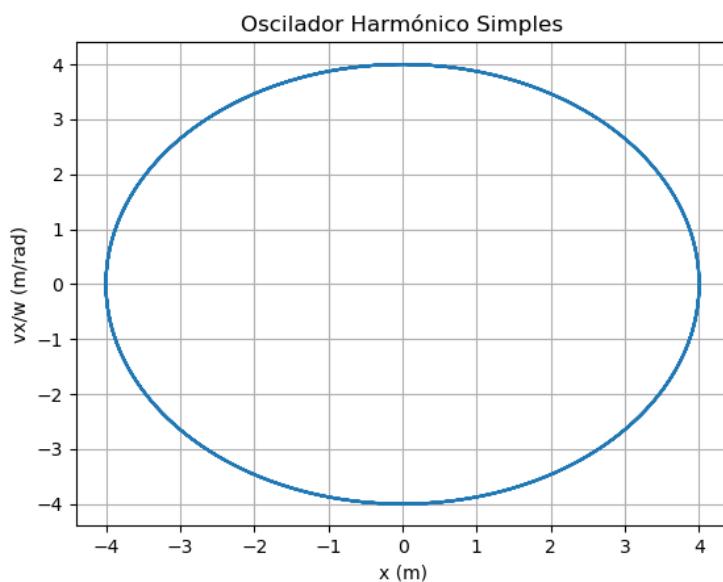
## Diferenças com o oscilador harmónico

### Espaço de fase ( $x, v_x$ )

Oscilador Harmônico Simples:

$$x^2(t) + v_x^2(t) = A^2$$

eq. circunferência raio  $A$



No espaço das fases a figura que o oscilador cúbico forma é ovalada e diferente da produzida pelo oscilador harmônico.

## O Período

período no movimento harmônico é  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ , ou seja independente da energia, mas no caso do oscilador cúbico o período depende da energia. A posição média é por definição

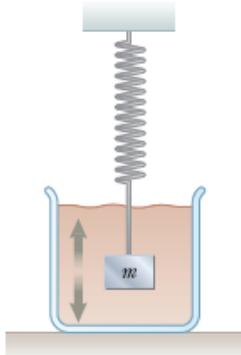
## A posição média

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t) dt = \frac{a_0}{2}$$

no caso do oscilador harmônico o valor médio é nulo, enquanto que no oscilador cúbico é não nulo e dependente da energia (ou condições iniciais).

## 7.5 Oscilador Harmônico Amortecido

Modelos mais fieis de sistema mola-corpo têm de considerar forças de resistência ao movimento. A figura abaixo mostra um sistema corpo-mola mergulhado num líquido.



Por experiências a força de resistência do líquido é proporcional à velocidade e de sentido oposto,

$$F_x^{\text{resistência}} = -b v_x$$

A força resultante e a aceleração são:

$$F_x = -k x - b v_x \Rightarrow m a_x = -k x - b v_x \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x$$

e a equação dinâmica do movimento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x \Leftrightarrow \begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x \\ \frac{dx}{dt} = v_x(t) \end{cases}$$

Se soubermos as condições iniciais da posição e da velocidade podemos calcular a lei do movimento e a lei da velocidade.

**Cálculo Analítico:**Amortecimento fraco:  $b < 2\sqrt{mk}$ 

$$F_x = -kx - bv_x \Rightarrow m a_x = -kx - bv_x \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \\ v_x(t) = -A_a \omega e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega t + \phi) - A_a \frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

em que  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$  ou  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$   $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Se soubermos  $x(0)$  e  $v_x(0)$  calcula-se  $A_a$  e  $\phi$ :

$$\phi = \arctan \left[ -\left( \frac{v_x(0)}{x(0)} + \frac{b}{2m} \right) / \omega \right]$$

$$A_a = \sqrt{x(0)^2 + \left( \left( v_x(0) + x(0) \frac{b}{2m} \right) / \omega \right)^2}$$

O movimento é sinusoidal, em que a amplitude diminui com o tempo

$$A(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}$$

e a frequência angular  $\omega$  do movimento é menor do que do oscilador sem amortecimento  $\omega_0$ . Repare-se que  $\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 > 0$  porque  $b < 2m\omega_0$ Amortecimento forte  $b > 2m\omega_0$ 

Amortecimento tão forte que o corpo desloca-se somente no sentido da posição de equilíbrio.

Amortecimento crítico (ou excepcional)  $b = 2m\omega_0 = b_c$ **Cálculo Numérico:**

Escolha do método numérico: Euler-Cromer

Amortecimento fraco:  $b < 2m\omega_0$ 

$$F_x = -kx - bv_x \Rightarrow$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

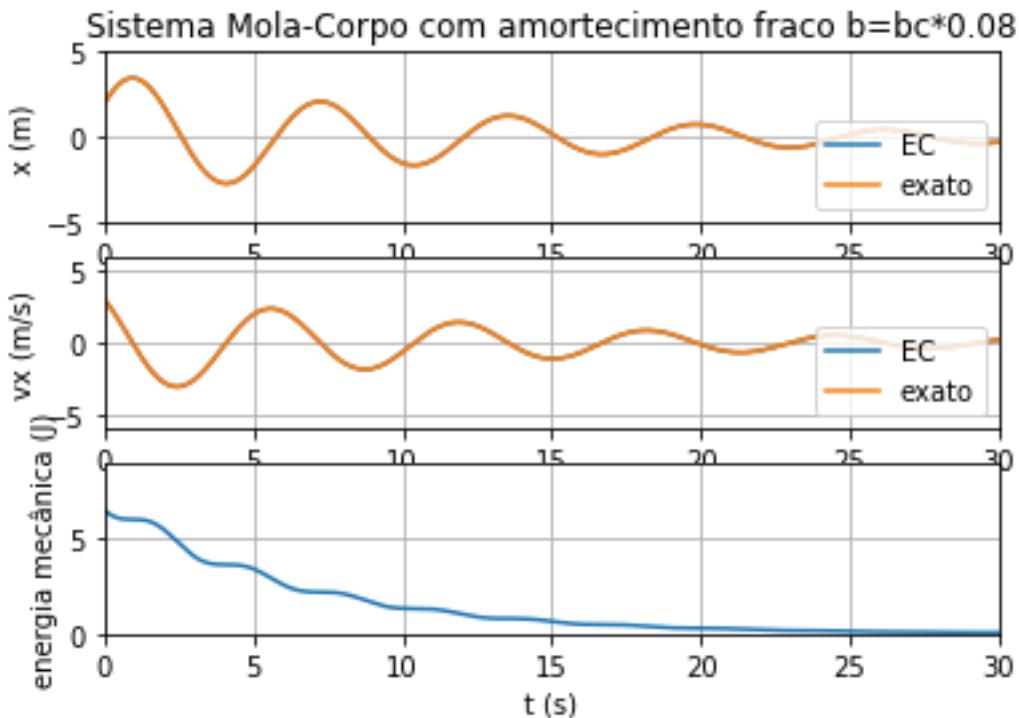
$$k = 1 \text{ N/m}$$

$$m = 1 \text{ kg} \quad \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

$$b_c = 2 \text{ kg/s}$$

$$b = b_c \times 0.08 = 0.16 \text{ kg/s}$$

Com as condições iniciais  $x(0)=2 \text{ m}$  e  $v_x(0) = 1 \text{ m/s}$ , a lei do movimento, a lei da velocidade e a energia mecânica foram obtidos usando o método de Euler-Cromer com o passo  $\delta t = 10^{-5} \text{ s}$



Da solução numérica da lei do movimento extraímos

$$T = 6.3034 \text{ s}$$

$$\omega = 0.9968 \text{ rad/s}$$

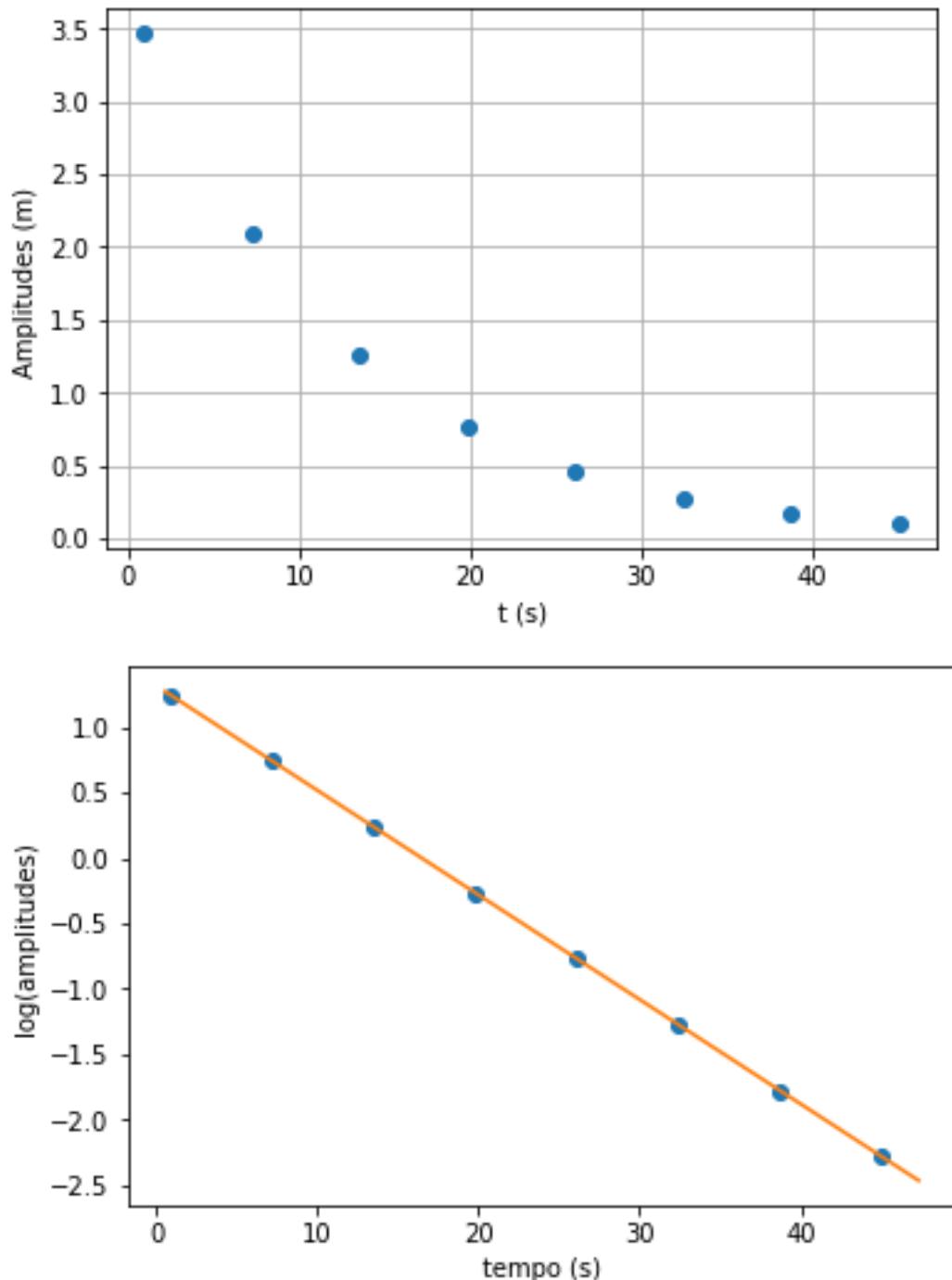
que concordam com valor analítico

$$\omega^{\text{analítico}} = 0.9968 \text{ rad/s}$$

com uma diferença relativa de  $10^{-4}$ .

Podemos analisar como as posições extremas dependem do tempo. No gráfico abaixo estão as posições extremas positivas, amplitudes  $A$ , e mostra que a relação não é linear. No gráfico seguinte está o logaritmo das amplitudes em função do tempo. Obtem-se uma reta, o que mostra uma relação exponencial

$$A = e^b e^{mt}$$



A regressão linear obtém

$$\begin{aligned}
 m &= -0.08000031898266281 \quad dm = 1.3765157967774959e-09 \\
 b &= 1.3180827347694213 \quad db = 3.737587029359997e-08 \\
 r^{**2} &= 0.9999999999999983
 \end{aligned}$$

e

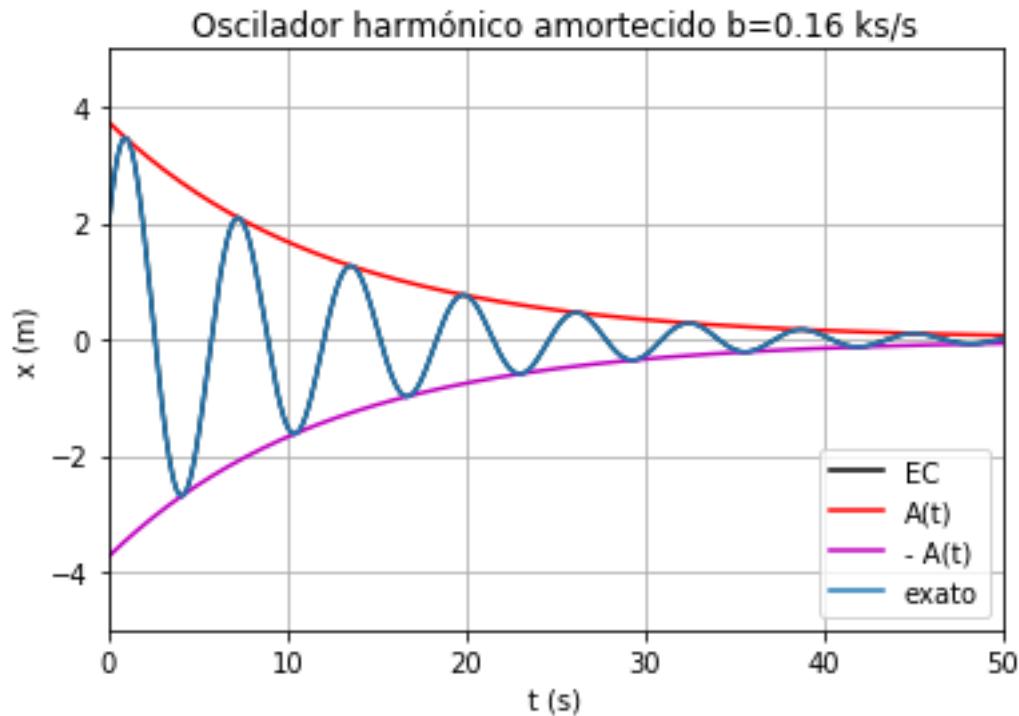
$$A = 3.736 e^{-0.0800 t} \text{ m}$$

O que concorda muito bem com a solução analítica:

$$A = 3.748 e^{-0.08 t}$$

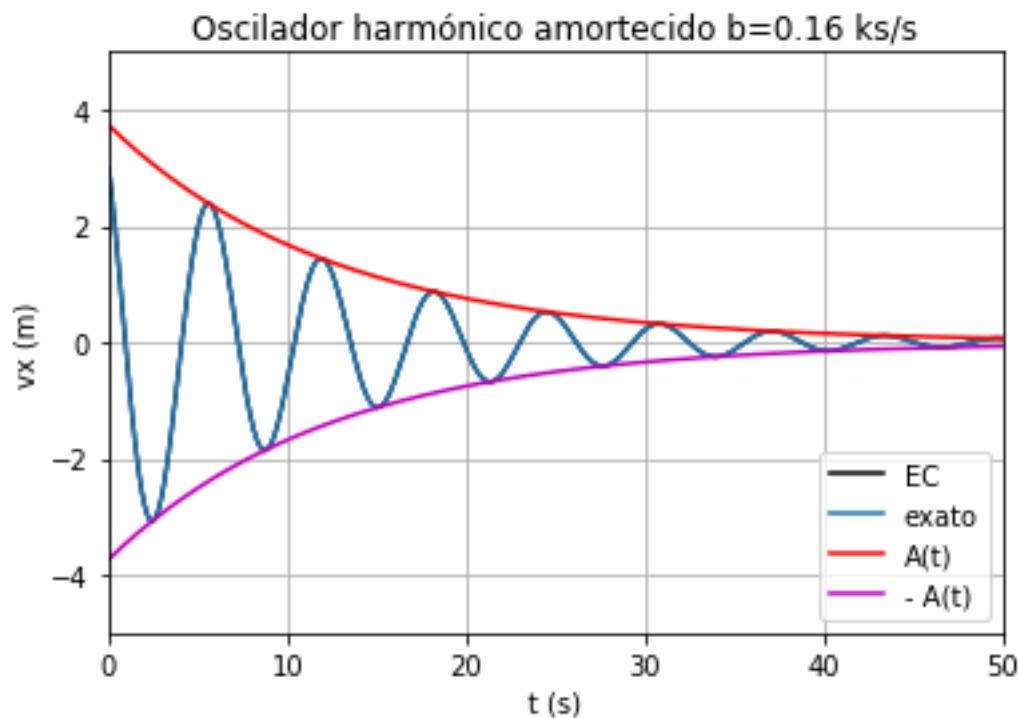
Podemos escrever de um modo compacto a lei do movimento

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi)$$



A lei da velocidade

$$v_x(t) = -A(t) \left[ \omega \sin(\omega t + \phi) + \frac{b}{2m} \cos(\omega t + \phi) \right]$$



em que

$$A(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Amortecimento forte:  $b > 2m\omega_0$

$$F_x = -kx - bv_x \Rightarrow$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

$$k = 1 \text{ N/m}$$

$$m = 1 \text{ kg} \quad \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

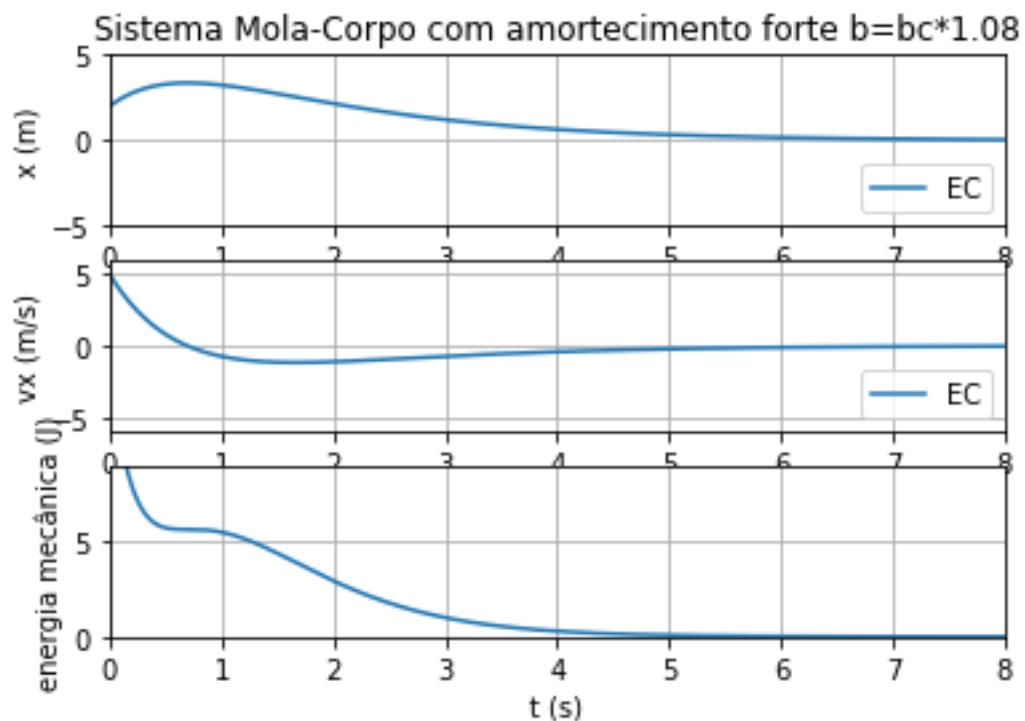
$$b_c = 2 \text{ kg/s}$$

$$b = b_c \times 1.08 = 2.16 \text{ kg/s}$$

E as condições iniciais:

$$x(0) = 2 \text{ m e } v_x(0) = 5 \text{ m/s}$$

Usando o método de Euler-Cromer obtivemos as soluções



Os gráficos acima mostram que o sistema tende sem oscilar repetidamente para a posição de equilíbrio.

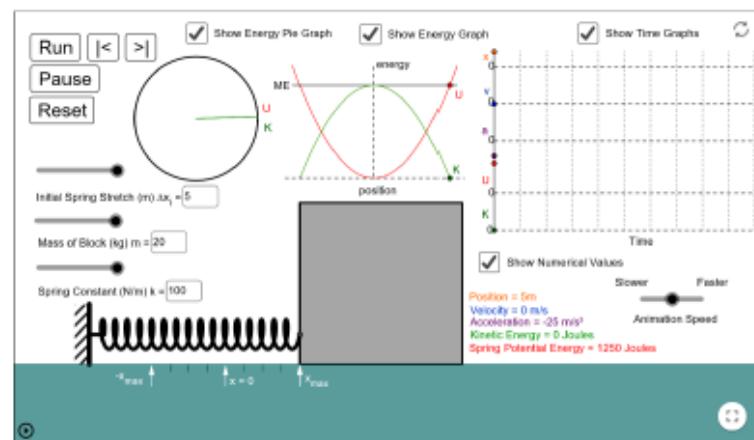
## Bibliografia

### Applets:

### Simple Harmonic Motion: Mass on a Spring

Autor: Alan Pacey, Tom Walsh

This simulation shows the oscillation of a box attached to a spring. Adjust the initial position of the box, the mass of the box, and the spring constant. Run, Pause, Reset, and Step buttons to examine the animation. Check or uncheck boxes to view/hide various information.

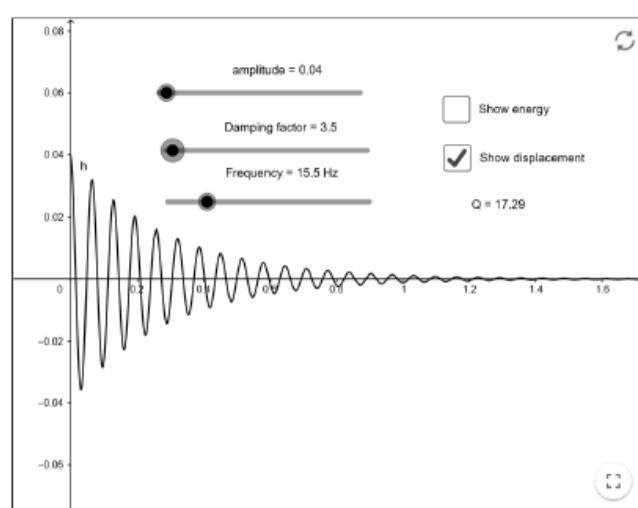


<https://www.geogebra.org/m/EGg2Pvhm>

### Damped harmonic motion

Autor: Chris Hamper

Vary the damping factor to see the change in Q value



<https://www.geogebra.org/m/ZMjkkEwU>

## Apêndice 7.A

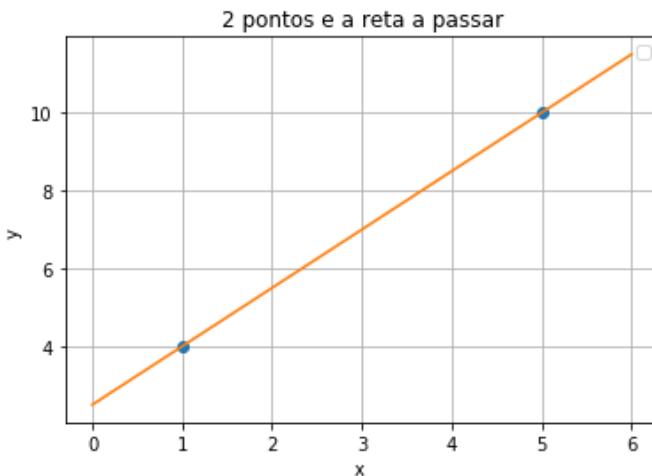
### Interpolação linear e interpolação de Lagrange. Cálculo de máximos e mínimos de uma função.

Os métodos numéricos, como o de Euler e o de Euler-Cromer, fornecem a solução na forma de pontos e não de uma expressão analítica. Este apêndice trata de retirar informação sobre outros pontos da solução, usando a interpolação a interpolação inversa e encontrar máximos e mínimos locais da função apresentada só por pontos.

#### 7.A1 Interpolação linear

Por dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  há sempre uma reta (polinómio de 1º grau) que passa nesses 2 pontos:

$$y(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}$$



#### Interpolação linear:

Entre estes 2 pontos podemos:

- Para um determinado  $x_{inp}$  obter o correspondente  $y_{out}$  (interpolação)

$$y_{out} = m x_{inp} + b$$

em que

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ e } b = \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}$$

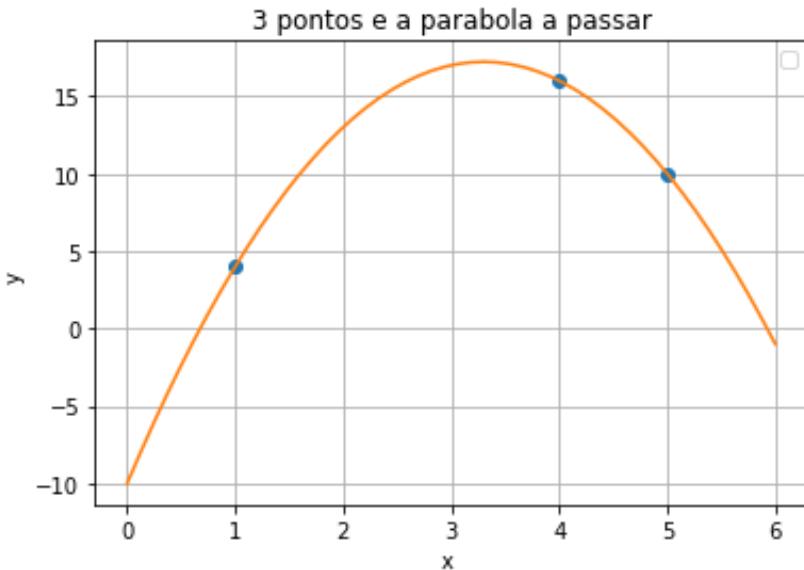
- Para um determinado  $y_{inp}$  obter o correspondente  $x_{out}$  (interpolação inversa)

$$x_{out} = \frac{y_{inp} - b}{m}$$

## 7.A2 Interpolação de Lagrange

Por três pontos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos:

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$



### Interpolação de Lagrange (não linear) permite

Entre estes 3 pontos extremos podemos também:

- Para um determinado  $x_{inp}$  obter o correspondente  $y_{out}$  (interpolação)
- Para um determinado  $y_{inp}$  obter o correspondente  $x_{out}$  (interpolação inversa)
- E também a localização de máximos e mínimos.

## Interpolação de Lagrange (quadrática)

Para um determinado  $x_{inp}$  obter o correspondente  $y_{out}$  (interpolação)

$$y_{out} = \frac{(x_{inp}-x_1)(x_{inp}-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x_{inp}-x_0)(x_{inp}-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x_{inp}-x_0)(x_{inp}-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

Esta expressão está implementada na fuction intlagv:

```
def intlagv(xinp,xm1,xm2,xm3,ym1,ym2,ym3):
    # Interpolação quadrática usando o polinómio de Lagrange
    # Dados (input): xinp, (x0,y0), (x1,y1) e (x2,y2)
    # Resultados (output): xinp, yout
    xab=xm1-xm2
    xac=xm1-xm3
    xbc=xm2-xm3
```

```

xi1=xinp-xm1
xi2=xinp-xm2
xi3=xinp-xm3

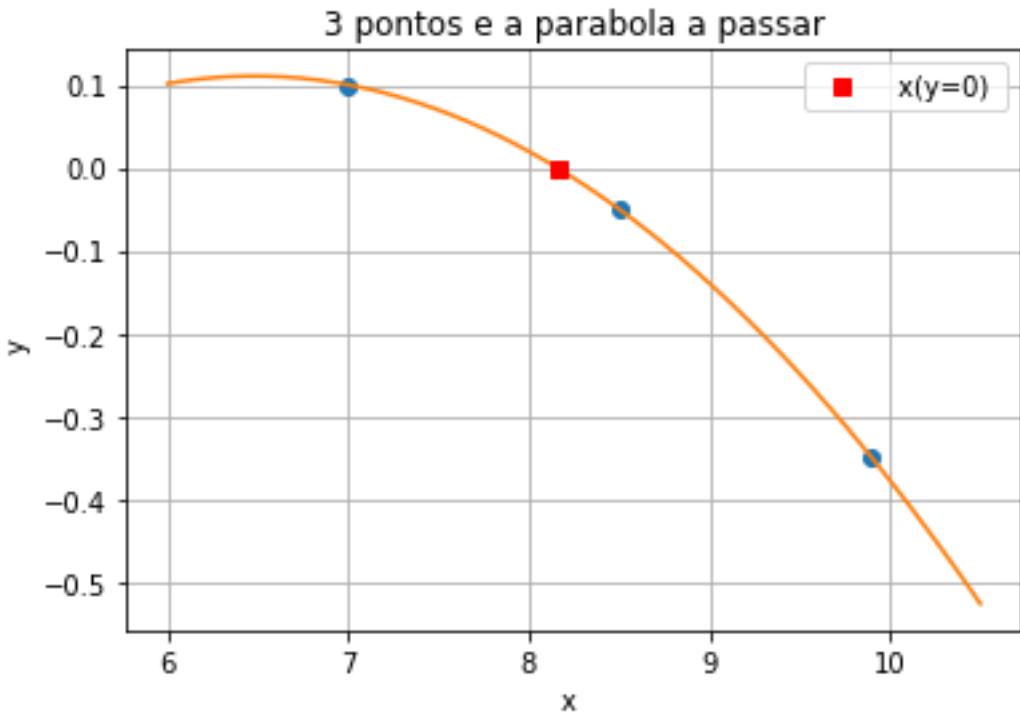
a=xi2*xi3/(xab*xac)
b=-xi1*xi3/(xab*xbc)
c=xi1*xi2/(xac*xbc)

yout=a*ym1+b*ym2+c*ym3
return xinp, yout

```

### Interpolação quadrática inversa

Quando a função está expressa por pontos, e não por uma forma analítica, o zero da função pode não coincidir com o ponto de menor  $y$ , como mostra a figura



Se usarmos o polinómio de Lagrange temos

$$y_{inp} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

para  $x(y = y_{inp}) = x_{out}$ , que é uma equação do 2º grau a uma incógnita. A solução (duas) são:

$$x_{out} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

em que

$$\begin{cases} a = e + f + g \\ b = e(x_0 + x_1) + f(x_0 + x_2) + g(x_1 + x_2) \\ c = y_{inp} + e x_0 x_1 + f x_0 x_2 + g x_1 x_2 \\ e = \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} \\ f = \frac{y_1}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} \\ g = \frac{y_0}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} \end{cases}$$

Como temos duas soluções matematicamente possíveis, a solução é a que se encontra entre as abscissas extremas – os instantes menor e maior -. Este método está implementado como *function* intlaginvv:

```
def intlaginvv(yinp,xm1,xm2,xm3,ym1,ym2,ym3):
    # interpolação inversa usando o polinómio de Lagrange
    # Dados (input):  $y_{inp}, (x_0, y_0), (x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ 
    # Resultados (output):  $x_{out}, y_{out}$ 
    xab=xm1-xm2
    xac=xm1-xm3
    xbc=xm2-xm3

    a=ym1/(xab*xac)
    b=-ym2/(xab*xbc)
    c=ym3/(xac*xbc)

    am=a+b+c
    bm=a*(xm2+xm3)+b*(xm1+xm3)+c*(xm1+xm2)
    cm=yinp+a*xm2*xm3+b*xm1*xm3+c*xm1*xm2

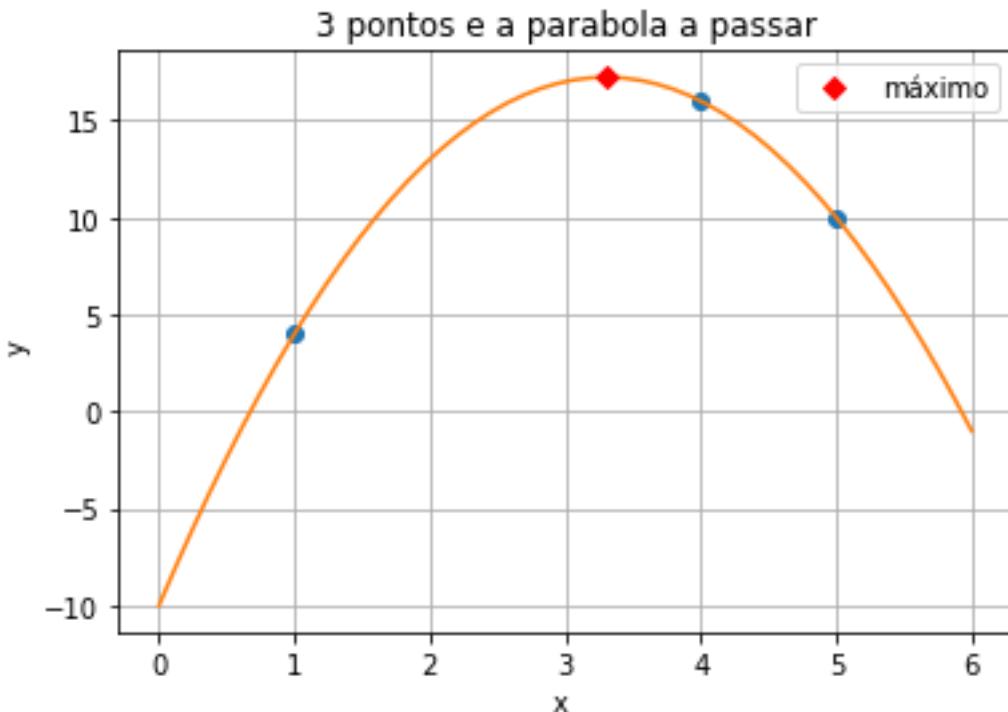
    xout=(bm+np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)
    if xm3 > xm1 and (xout < xm1 or xout > xm3):
        xout=(bm-np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)

    if xm1 > xm3 and (xout < xm3 or xout > xm1):
        xout=(bm-np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)

    xta=xout-xm1
    xtb=xout-xm2
    xtc=xout-xm3
    yout=a*xtb*xtc+b*xta*xtc+c*xta*xtb
    return xout, yout
```

### Máximos e mínimos

Quando a função está expressa por pontos, e não por uma forma analítica, o máximo da função não coincide com o ponto de maior  $y$ , como mostra a figura



Podemos usar o polinómio de Lagrange para se determinar com maior precisão o ponto mais elevado, designado  $(x_m, y_{max})$

A condição de máximo, como de mínimo, é :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{[(x-x_2)+(x-x_1)]}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{[(x-x_2)+(x-x_0)]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{[(x-x_0)+(x-x_1)]}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

$$\begin{aligned} 2x & \left( \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right) \\ &= \frac{(x_2+x_1)y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{(x_2+x_0)y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{(x_0+x_1)y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{aligned}$$

$$2x(a + b + c) = (a0 + b0 + c0)$$

$$x_m = \frac{a0 + b0 + c0}{2(a + b + c)} \quad \Rightarrow y_{max}(x_m) = \text{polinómio de Lagrange}$$

em que

$$\begin{aligned} a0 &= \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ a1 &= \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ a2 &= \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{aligned}$$

$$a = \frac{(x_2 + x_1)y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$b = \frac{(x_2 + x_0)y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$c = \frac{(x_0 + x_1)y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

O máximo ou o mínimo duma função de pontos discretos por interpolação de Lagrange.

```
def maxminv(xm1,xm2,xm3,ym1,ym2,ym3):
    # Máximo ou mínimo usando o polinómio de Lagrange
    # Dados (input): (x0,y0), (x1,y1) e (x2,y2)
    # Resultados (output): xm, ymax
    xab=xm1-xm2
    xac=xm1-xm3
    xbc=xm2-xm3

    a=ym1/(xab*xac)
    b=-ym2/(xab*xbc)
    c=ym3/(xac*xbc)

    xmla=(b+c)*xm1+(a+c)*xm2+(a+b)*xm3
    xm=0.5*xmla/(a+b+c)

    xta=xm-xm1
    xtb=xm-xm2
    xtc=xm-xm3

    ymax=a*xtb*xtc+b*xta*xtc+c*xta*xtb
    return xm, ymax
```

## Apêndice 7.B Série de Fourier

Uma função periódica  $f(t)$ , de período  $T$  ou de frequência angular  $\omega$  ( $\omega = 2\pi/T$ ), pode ser escrita pela série de Fourier, que é uma soma infinita de cosenos e senos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \end{aligned}$$

Em que os coeficientes de Fourier são:

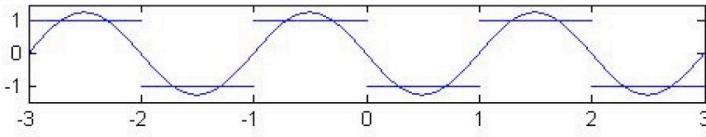
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

### Exemplo: Onda quadrada

A onda quadrada é uma função periódica, neste exemplo de período 2,

$$f(t) = \begin{cases} +1, & -1 < t < 0 \\ -1, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

como se pode ver na figura abaixo, conjuntamente a uma função seno.



Se calcularmos os coeficientes de Fourier da onda quadrada, por integração analítica, o resultado é

$$\begin{cases} a_n = 0, & n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n = 2((-1)^n - 1)/(n\pi), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

que podemos ver na figura abaixo

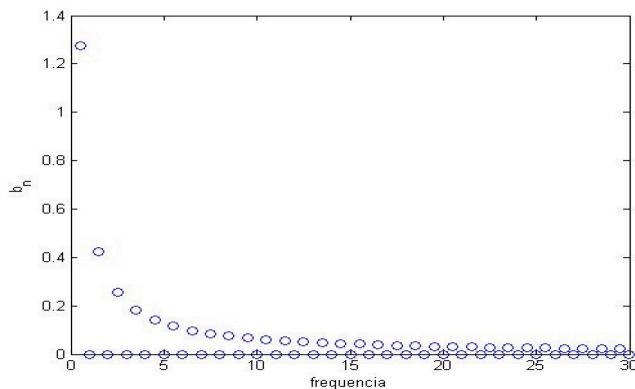


Figura 2.  
Os coeficientes de Fourier  $b_n$

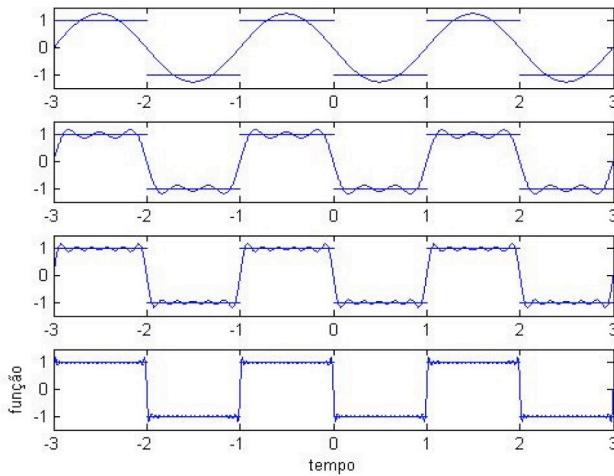


Figura 3.

A função quadrado reconstruída usando a série de Fourier com um número crescente de termos. De cima para baixo está a função reconstruída com 1, 5, 11 e 41 termos.

Os coeficientes de Fourier também podem ser calculados numericamente, pela aproximação trapezoidal. Estão implementados na function abfourier (no e-learning)

```
def abfourier(tp,xp,it0,it1,nf):
#
# cálculo dos coeficientes de Fourier a_nf e b_nf
#   a_nf = 2/T integral ( xp cos( nf w ) ) dt entre tp(it0) e tp(it1)
#   b_nf = 2/T integral ( xp sin( nf w ) ) dt entre tp(it0) e tp(it1)
# integração numérica pela aproximação trapezoidal
# input: matrizes tempo tp (abcissas)
#         posição xp (ordenadas)
#         índice inicial it0
#         final it1 (ao fim de um período)
# nf índice de Fourier
# output: af_bf e bf_nf
#
dt=tp[1]-tp[0]
per=tp[it1]-tp[it0]
ome=2*np.pi/per

s1=xp[it0]*np.cos(nf*ome*tp[it0])
s2=xp[it1]*np.cos(nf*ome*tp[it1])
st=xp[it0+1:it1]*np.cos(nf*ome*tp[it0+1:it1])
soma=np.sum(st)

q1=xp[it0]*np.sin(nf*ome*tp[it0])
q2=xp[it1]*np.sin(nf*ome*tp[it1])
qt=xp[it0+1:it1]*np.sin(nf*ome*tp[it0+1:it1])
somq=np.sum(qt)

intega=((s1+s2)/2+soma)*dt
af=2/per*intega
integq=((q1+q2)/2+somq)*dt
bf=2/per*integq
return af,bf
```

### Bibliografia

Serway, cap. 15;

A. I. Vistnes, Physics of Oscillations and Waves, cap. 2

A. I. Vistnes, Physics of Oscillations and Waves, cap. 5 (Análise de Fourier)

## Problemas

**1.** Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ .

- a) Mostre que a lei do movimento  $x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$  é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que  $A$  e  $\phi$  são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?
- b) Calcule  $A$  e  $\phi$ , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.
- c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

**2.** Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ .

- a) Mostre que a lei do movimento  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , com  $\omega = \sqrt{k/m}$ , é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que  $A$  e  $\varphi$  são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?
- b) Calcule  $A$  e  $\varphi$ , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.
- c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

**3.** Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ .

- a) Mostre que a lei do movimento  $x(t) = C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$  é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que  $C$  e  $D$  são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?
- b) Calcule  $C$  e  $D$ , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.
- c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

**4.** Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ . A mesma lei do movimento é descrita quer por

$$x(t) = A \sin(\sqrt{k/m}t + \varphi),$$

quer por

$x(t) = C \cos(\sqrt{k/m} t) + D \sin(\sqrt{k/m} t)$ . Encontre a relação entre as constantes  $A, \varphi$  e  $C, D$ .

Note:  $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

**5.** Um objeto de 500 g, preso a uma mola com  $k = 8 \text{ N/m}$ , oscila num movimento com amplitude  $A = 10 \text{ cm}$ . Calcule:

- a) a velocidade e aceleração máximas.
- b) a velocidade e aceleração quando o objeto dista 6 cm da posição de equilíbrio.
- c) o tempo necessário para o objeto partir de  $x=0$  e chegar a  $x=8 \text{ cm}$ .

**6.** Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ . Considerando a lei do

movimento  $x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$  calcule  $A$  e  $\phi$ , sabendo:

- a) que a velocidade inicial é nula e a posição inicial é 4 m.
- b) que a velocidade inicial é -2 m/s e a posição inicial é 4 m.
- c) que a velocidade inicial é 2 m/s e a posição inicial é 4 m.
- d) que a velocidade inicial é -2 m/s e a posição inicial é 0 m.

R: a) 4m, 0 rad; b) 4.472 m, 0.463 rad; c) 4.472 m, 5.820 rad; d) 2 m,  $\frac{\pi}{2}$  rad

**7.** Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ .

- a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.
- b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período, usando os resultados numéricos.
- c) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?
- d) Calcule os coeficientes de Fourier e mostre que a lei do movimento é expressa pela função seno e/ou cosseno.

**8.** Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ .

- a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial -3 m/s e a posição inicial 2 m.

- b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período.
- c) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?
- d) Calcule os coeficientes de Fourier e mostre que a lei do movimento é expressa pela função seno e/ou cosseno.

### Osciladores Não harmónicos

**9.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador cúbico. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo  $x_{eq} = 0$  m, o oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \alpha x^3$$

exerce no corpo a força

$$F_x = -k x - 3\alpha x^2$$

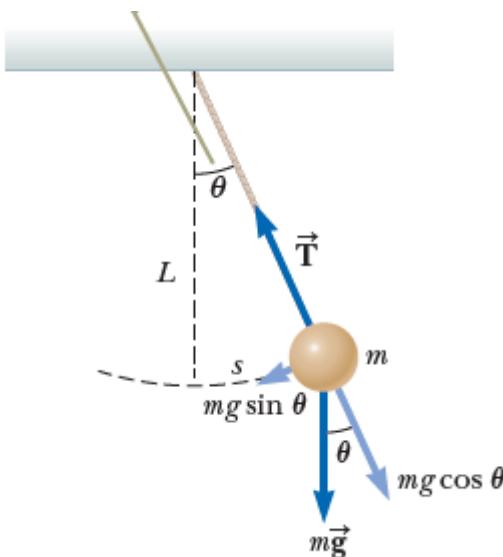
Considere  $k = 1$  N/m e  $\alpha = -0.01$  N/m<sup>2</sup>.

- a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 1 J?
- b) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 1.3 m e a velocidade inicial nula? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?
- c) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 2.9 m e a velocidade inicial nula? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?
- d) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea c)
- f) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)

**10.** Uma massa suspensa do teto por um fio de comprimento  $L = 1$  m oscila à volta da sua posição de equilíbrio expressa por  $\theta = 0$  rad, de acordo com a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

$\theta$  é o ângulo que o fio faz com a vertical.



Calcule o período do movimento, com a precisão de 4 algarismos, quando for largado

$(\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0} = 0)$  e o ângulo inicial for:

- a)  $1^\circ$
- b)  $5^\circ$
- c)  $10^\circ$
- d)  $15^\circ$
- e)  $20^\circ$
- f)  $30^\circ$

**11.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador duplo, com dois pontos de equilíbrio,  $x_{eq} = 2$  m. O oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k(|x| - x_{eq})^2$$

exerce no corpo a força

$$F_x = \begin{cases} -(x - x_{eq}) & x > 0 \\ (-x - x_{eq}) & x < 0 \end{cases}$$

onde  $k = 1$  N/m. A mola é esticada até à posição 3 m, e de seguida é largado.

- a) Qual a sua energia mecânica?
- b) Faça o gráfico da lei do movimento. Qual é o seu período?
- c) Calcule a lei do movimento, quando a energia total for 0.75 J. Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

- d) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 1.5 J? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?
- e) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 3.0 J? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?
- f) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea a)
- g) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea c)
- h) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)
- i) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea d)

**12.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador duplo, com dois pontos de equilíbrio,  $x_{eq} = 1.5$  m. O oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k(x^2 - x_{eq}^2)^2$$

exerce no corpo a força

$$F_x = -2k(x^2 - x_{eq}^2)x$$

onde  $k = 1$  N/m.

- a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 1 J?
- b) Calcule a lei do movimento, quando a energia total for 0.75 J. Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?
- c) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 3.0 J? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?
- d) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea b)
- e) Faça a análise de Fourier das solução encontrada na alínea c)

### Osciladores Harmónicos Amortecidos

**13.** Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola ( $k = 100$  N/m) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

- a) Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais.
- b) Determine o primeiro instante de tempo e a posição respetiva em que isso acontece.

c) De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento ( $b = 2 \text{ kg/s}$ ). Determine a variação de energia mecânica no segundo ( $\Delta t = 1 \text{ s}$ ) seguinte.

**14.** Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola ( $k = 1 \text{ N/m}$ ) oscila num meio de constante de amortecimento  $b = 0.16 \text{ kg/s}$ . Se for largada da posição +2 m, com a velocidade +3 m/, calcule

- A frequência angular da oscilação se o sistema corpo-mola não estivesse num meio com amortecimento.
- A frequência angular da oscilação considerando agora que o amortecimento afeta a oscilação.
- A lei do movimento até ao instante 50 s. Sobreponha a solução encontrada com a solução analítica.
- Registe as posições máximas que surgem na lei do movimento. Que função seguem as posições limite? Compare com o valor analítico.

### **15. (problema 9 com amortecimento)**

Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador cúbico e num meio de constante de amortecimento  $b = 0.16 \text{ kg/s}$ . Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo  $x_{eq} = 0 \text{ m}$ , o oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k x^2 + \alpha x^3$$

exerce no corpo a força

$$F_x = -k x - 3\alpha x^2$$

Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $\alpha = -0.2 \text{ N/m}^2$ .

- Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 1.3 m e a velocidade inicial nula.
- Entre que limites se efetua o movimento?

# **Capítulo 8**

## **Osciladores Forçados: Ressonância e Caos**

Sumário

Oscilador harmônico Forçado: regime transitivo e regime estacionário

Osciladores Forçados

Ressonância.

Caos

Métodos Numéricos

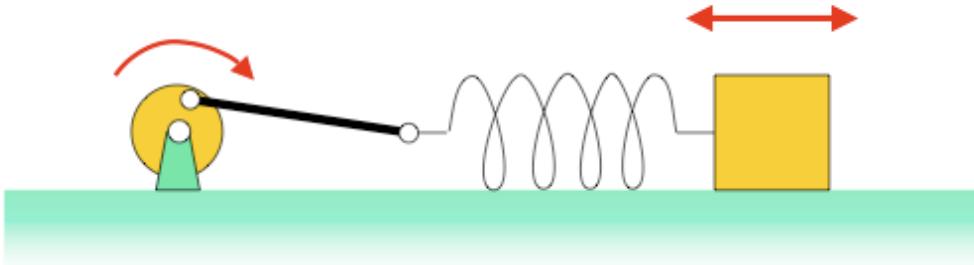
Método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem

## 8.1 Introdução

Casos mais frequentes de sistemas físicos que envolvem oscilações são os que sofrem uma força exterior, os osciladores forçados. Este assunto transcende os sistemas mola-corpo, pois muitas quantidades físicas evolvem no tempo em oscilações à volta de uma posição intermédia.

Os osciladores forçados, sob certas condições, apresentem fenômenos de ressonância, onde pequenas forças exteriores provocam grandes amplitudes, e o comportamento caótico em sistemas, para os quais não é possível determinar univocamente a sua evolução no tempo, apesar de o sistema ter só uma solução.

## 8.2 Oscilador Harmônico Forçado com amortecimento fraco



$$F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$$

$$F_x = -k x - b v_x + F_0 \cos(\omega_f t) \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t) \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t) \\ \frac{dx}{dt} = v_x(t) \end{array} \right. \end{aligned}$$

### Cálculo analítico

A solução analítica é formada de 2 parcelas: Uma é a solução da equação dinâmica sem a força exterior, a solução do oscilador harmônico amortecido,

$$x_{OHA}(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_a t + \phi)$$

e a outra parcela é uma solução particular da equação dinâmica,

$$x_p(t) = A(\omega_f) \cos(\omega_f t + \alpha)$$

em que

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

e

$$\alpha = \arctan \frac{b\omega/m}{\omega_f^2 - \omega_0^2}$$

A solução analítica é

$$x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_a t + \phi) + A(\omega_f) \cos(\omega_f t + \alpha)$$

A 1ª parcela tende para zero ou seja para a posição de equilíbrio e é chamada parte transiente.

A 2ª parcela permanece no tempo e chama-se parte estacionária do movimento.

Ou seja, ao fim de algum tempo, o movimento do oscilador harmônico forçado é um movimento harmônico simples

$$x(t) = A(\omega_f) \cos(\omega_f t + \alpha)$$

de frequência angular igual à da força exterior,  $\omega_f$ , e de amplitude

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

Mas a **amplitude depende da frequência  $\omega_f$**  da força exterior e da sua intensidade  $F_0$  e do sistema mola-corpo-meio expresso por  $\omega_0$ ,  $k$ ,  $m$ , e  $b$ .

## Cálculo numérico

A solução numérica é obtida usando o método de Euler-Cromer.  
A aceleração é

$$a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t)$$

Com as condições iniciais

$$x(t=0) = 4 \text{ m}$$

$$v_x(t=0) = 0$$

E as características do sistema corpo-mola, meio e força exterior:

$$k = 1 \text{ N/m}$$

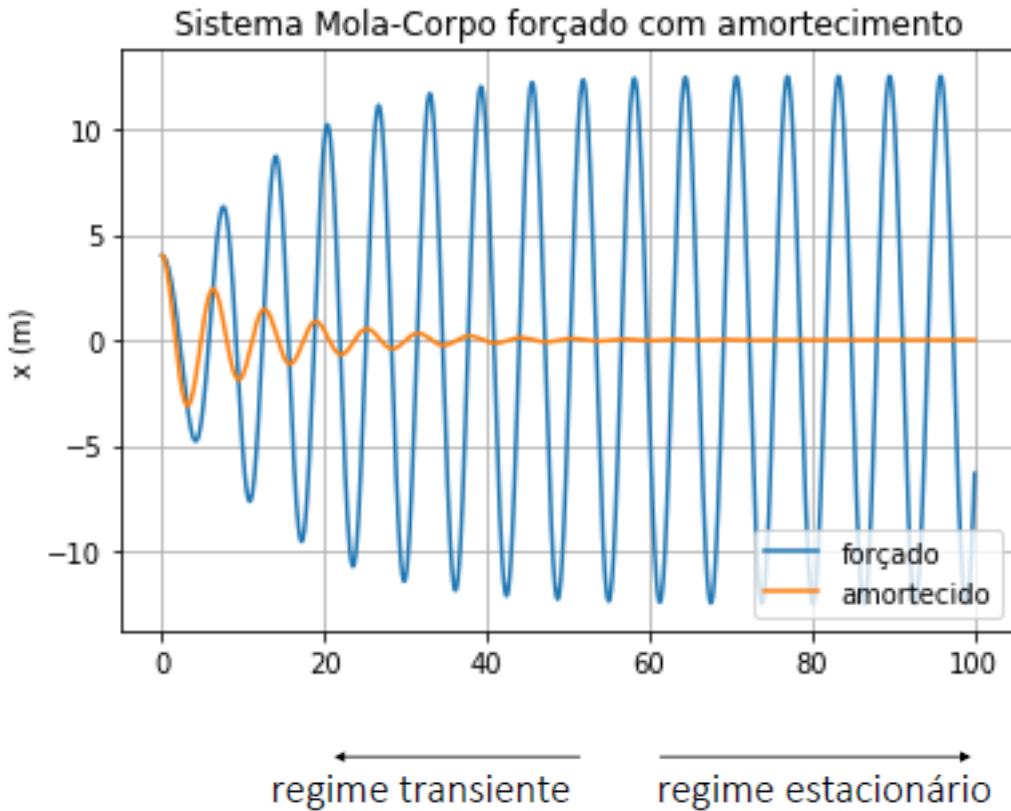
$$m = 1 \text{ kg} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$b = 0.16 \text{ kg/s} < b_c = 2 \text{ m} \quad \omega_0 = 2 \text{ kg/s}$$

$$F_0 = 2 \text{ N}$$

$$\omega_f = 1 \text{ rad/s},$$

A solução está no gráfico abaixo, que também mostra a solução amortecida não forçada.



### Amplitude no regime estacionário e Ressonância

No regime estacionário a amplitude do movimento

$$A(\omega_f) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b \omega_f}{m}\right)^2}}$$

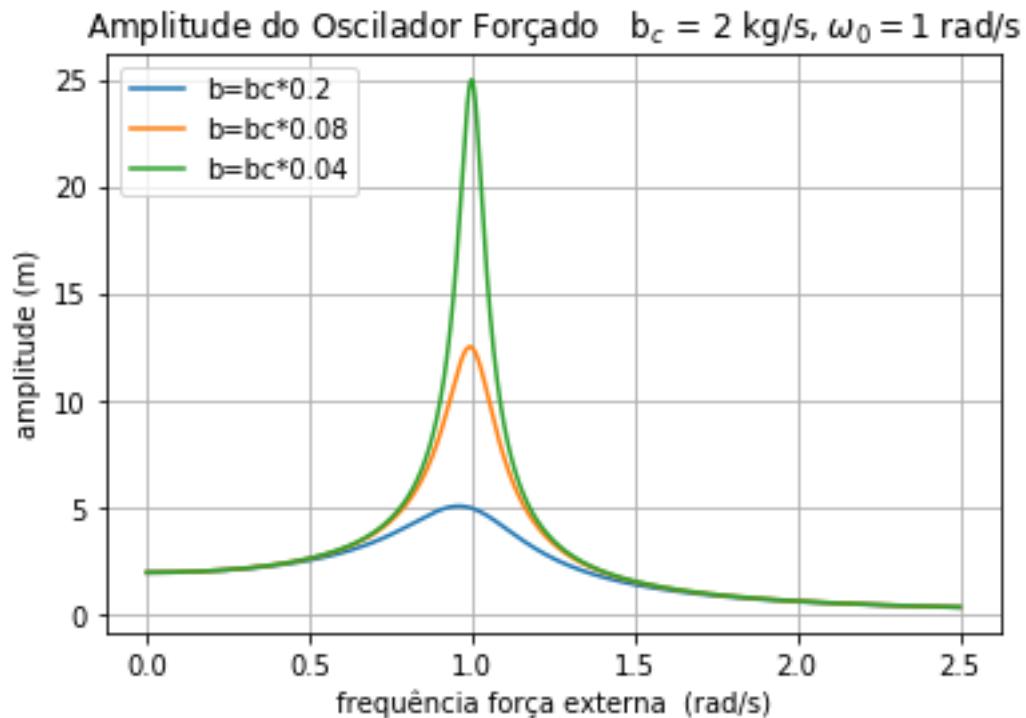
apresenta, como se pode ver no gráfico abaixo, para 3 valores de  $b$ ,

$$1. \quad A(\omega_f = 0) = \frac{F_0}{k} \neq 0,$$

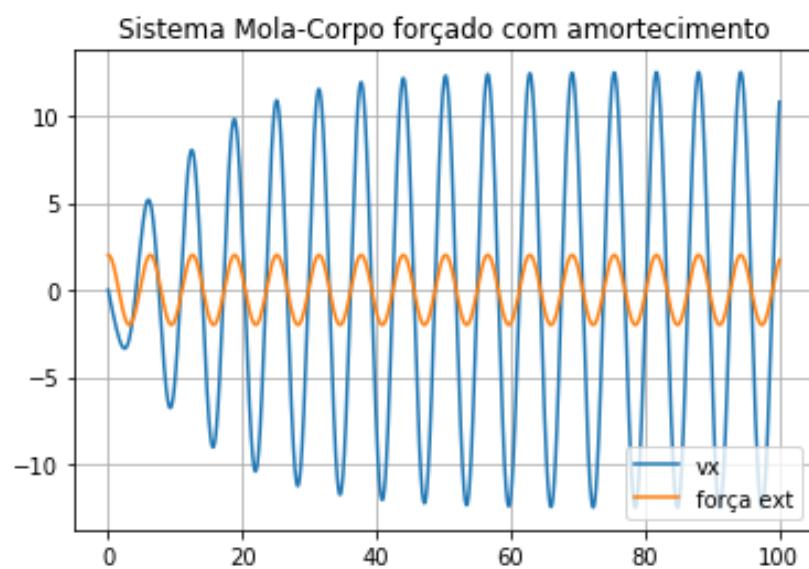
$$2. \quad \lim_{\omega_f \rightarrow \infty} A(\omega_f) = 0,$$

3. um máximo  $A(\omega_f) \approx \frac{F_0}{b \omega_0}$  quando  $\omega_f \approx \omega_0$ , ou seja, quando a frequência angular da força exterior for igual à frequência angular natural do sistema corpo-mola  $\omega_0$ .
4. não dependência nas condições iniciais.

5. O máximo da amplitude diminui com o coeficiente de amortecimento  $b$ , figura seguinte



Quando  $\omega_f \approx \omega_0$  a amplitude é máxima. Neste caso o oscilador forçado está no regime de **ressonância**, podendo ser muito maior do que os valores vizinhos. O gráfico da velocidade e da força exterior em função do tempo mostra o mecanismo de ressonância. No regime estacionário, a velocidade e a força exterior estão em fase. Ou seja, a força exterior empurra o corpo sempre a favor (ou no sentido) da velocidade.



No regime estacionário, durante um período,

$$F_x v_x > 0$$

o que faz a potência fornecida pelo motor que produz a força exterior

$$F_x v_x = P_o > 0$$

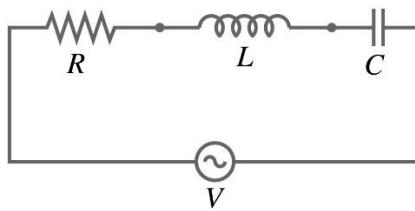
seja sempre positiva, e tomará o seu valor máximo, devido à velocidade tomar o seu valor máximo na ressonância, o que faz:

A energia mecânica       $E = \frac{1}{2} k A^2$  é máxima

A energia perdida devida à resistência do meio é a energia fornecida pelo motor e é máxima.

### 8.3 Osciladores Elétricos

Um circuito elétrico constituído por uma bobina, uma resistência e um condensador em série alimentado por uma fonte externa é um sistema onde os eletrões estão sujeitos a oscilações harmónicas amortecidas e forçadas.  $R$  é a resistência,  $L$  a indutância da bobina e  $C$  a capacidade do condensador.  $V = V_0 \sin(\omega t + \phi)$  é o potencial elétrico aplicado, que nas tomadas das nossas casas é caracterizado por  $\omega = 2\pi \times 40$  Hz e  $V_0 = \sqrt{2} \times 220$  V.



A carga elétrica  $Q(t)$  neste circuito varia (oscila) de acordo com a equação diferencial de 2ª ordem

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Se compararmos esta eq. diferencial do circuito RLC em série, com a eq. diferencial do oscilador harmônico amortecido e forçado, podemos fazer a equivalência das

variáveis e dos parâmetros do sistema elétrico ( $L$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $V_0$  e  $\omega$ ) e do sistema mecânico ( $k$ ,  $m$ ,  $b$ ,  $F_0$  e  $\omega_f$ ), como está na tabela seguinte

Tabela. As equações diferenciais dos sistema corpo-mola forçado e amortecido e dum circuito elétrico LRC em série e a equivalência dos seus coeficientes

<b>Sistema corpo-mola-motor</b>	<b>Círcuito elétrico</b>
$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv_x + F_0 \cos(\omega_f t)$	$L \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$
$t$	$t$
$x(t)$	$Q(t)$
$v_x = \frac{dx(t)}{dt}$	$\frac{dQ(t)}{dt}$
$m$	$L$
$k$	$\frac{1}{C}$
$b$	$R$
$F_0$	$V_0$
$\omega_f$	$\omega$

Se fizermos as substituições de acordo com a tabela acima, as equações diferenciais de sistema corpo-mola-motor e de um circuito elétrico RLC em série transformam-se uma na outra. As equações são equivalentes. Se soubermos, como sabemos, a solução de uma delas, sabemos também a solução da outra equação.

Exemplificando, o circuito elétrico entra em ressonância, ou seja a maior quantidade de carga elétrica oscila no circuito elétrico quando este entra em ressonância, sendo a frequência angular

$$\text{No corpo-mola-motor} \quad \omega_f \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

o que corresponde no circuito elétrico RLC em série quando a frequência do potencial elétrico aplicado for

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

## 8.4 Efeitos de ressonância

Um rádio recebe todas as ondas eletromagnéticas emitidas pelas estações de rádio.

O fenómeno ressonância permite amplificar no rádio a estação de rádio pretendida, mudando os valores das componentes do circuito elétrico, ou seja sintonizando a frequência  $\omega_0$  até coincidir com a frequência da emissora que se pretende ouvir.

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo partes da ponte oscilarem com grandes amplitudes com  $\omega \approx$  frequência de ressonância!

<https://www.youtube.com/watch?v=XggxeuFDaDU>



## 8.5 Oscilador Quártico Forçado com amortecimento fraco

Vamos analisar um oscilador não harmônico forçado e amortecido.

Escolhemos o Oscilador Quártico de energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 (1 + \alpha x^2)$$

em que o parâmetro  $\alpha$  indica o afastamento ao oscilador harmônico simples. A força aplicada é

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -k x (1 + 2\alpha x^2) - b v_x + F_0 \cos(\omega_f t)$$

E a equação dinâmica de Newton fornece

$$a_x = -\frac{k}{m} (1 + 2\alpha x^2) x - \frac{b}{m} v_x + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t)$$

Para este caso não é possível integrar analiticamente. Vamos usar só o método numérico de Euler-Cromer, com as condições iniciais

$$x(t = 0) = 3 \text{ m}$$

$$v_x(t = 0) = 0$$

E as características do sistema corpo-mola, meio e força exterior:

$$k = 1 \text{ N/m}$$

$$m = 1 \text{ kg}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$$

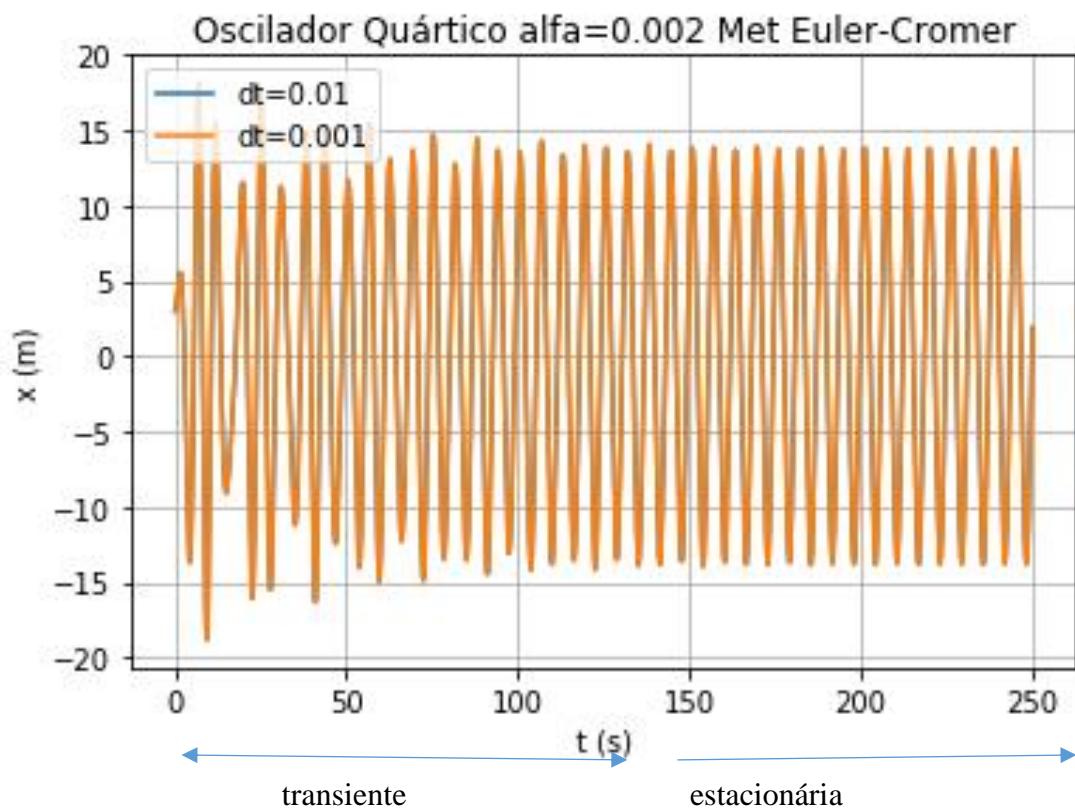
$$b = 0.05 \text{ kg/s}$$

$$\alpha = 0.002 \text{ m}^{-2}$$

$$F_0 = 7.5 \text{ N}$$

$$\omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

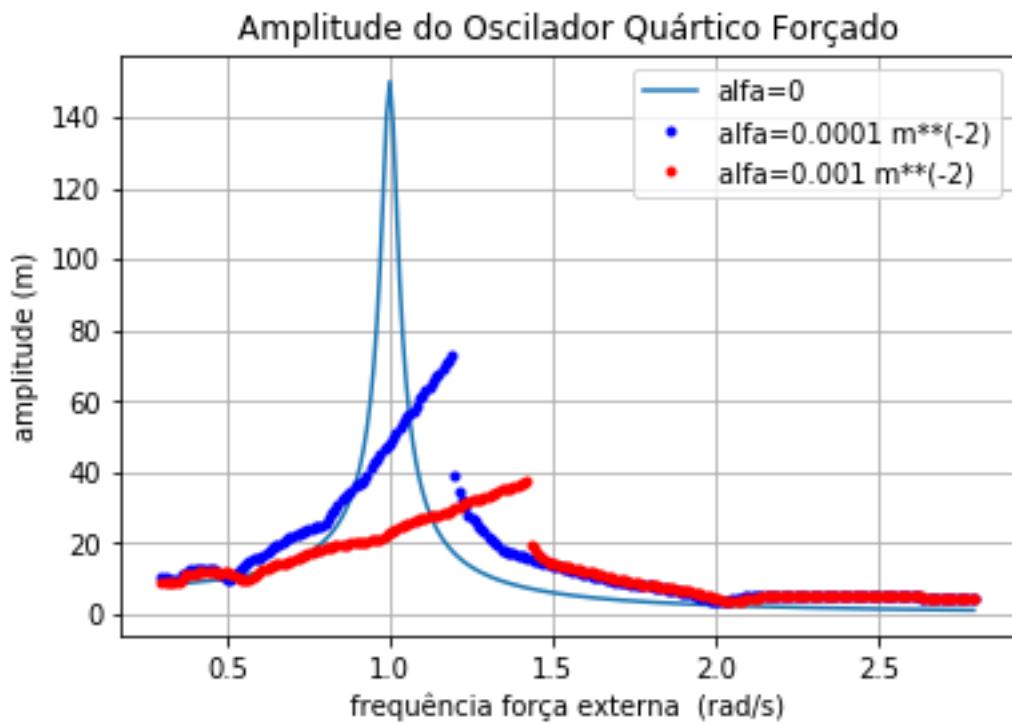
A solução obtida está no gráfico abaixo



e podemos constatar:

1. A solução obtida pelo Método de Euler-Cromer convergiu. Usamos dois passos temporais e a solução é idêntica.
2. Nos primeiros instantes temos uma solução irregular, transitória, seguida de uma solução estacionária, que se mantém periódica e sempre com os limites de oscilação iguais.

Vamos estudar como a amplitude varia quer com a frequência da força exterior  $\omega_f$  quer com o parâmetro que caracteriza a afastamento ao oscilador harmônico  $\alpha$ .



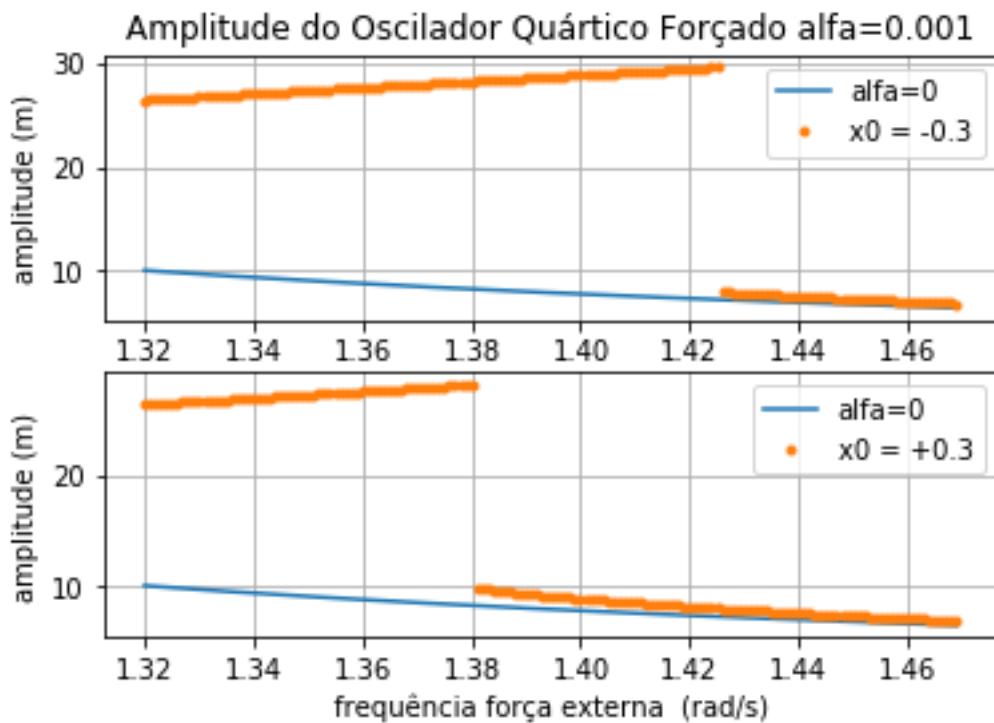
Dos gráficos acima também se vê que a amplitude da parte estacionária tem características semelhantes às do oscilador harmónico, em que:

1. A amplitude tende para zero quando a frequência da força exterior aumenta
2. A amplitude é não nula para  $\omega_f \approx 0$
3. Perto da frequência própria do sistema corpo-mola,  $\omega_0$ , este encontra-se em ressonância.

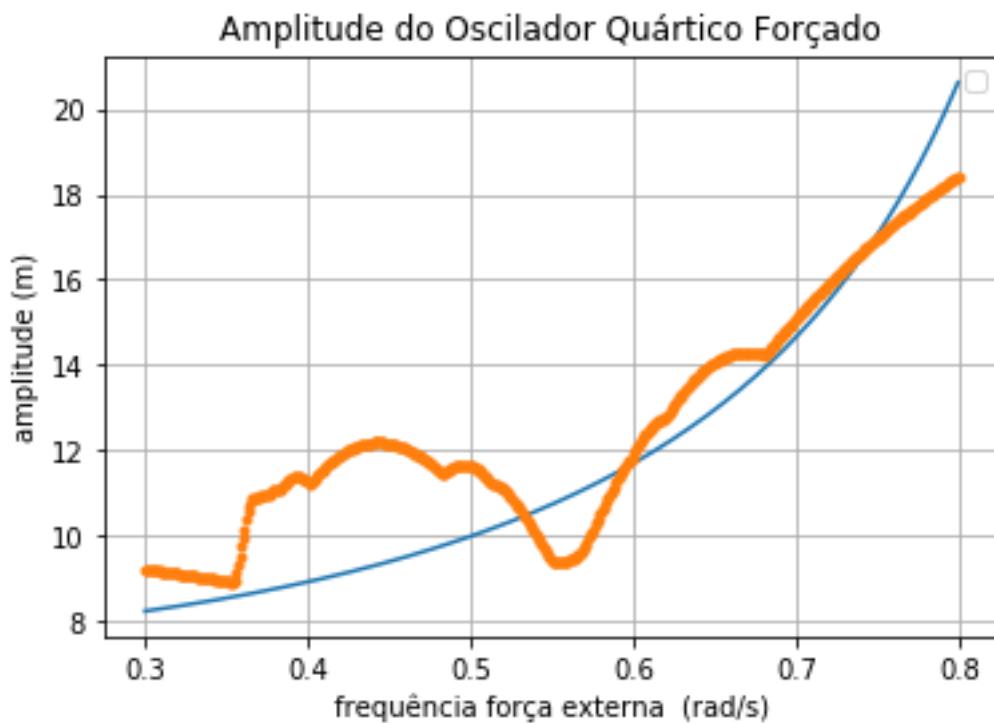
Mas existem diferenças qualitativas grandes em:

1. Amplitude de ressonância diminui com o aumento de  $\alpha$ , ou o aumento da não harmonicidade.
2. A frequência angular de ressonância aumenta com o aumento de  $\alpha$ .
3. Na frequência angular de ressonância a amplitude apresenta uma descontinuidade e a frequência de ressonância depende das condições iniciais. Considerando  $v_{x0} = +3$  m/s, nas duas soluções na figura abaixo, a única diferença é terem iniciado em  $x_0 = -3$  m e  $x_0 = +3$  m.

amplitude, ou seja outra ressonância, mas mais pequena.

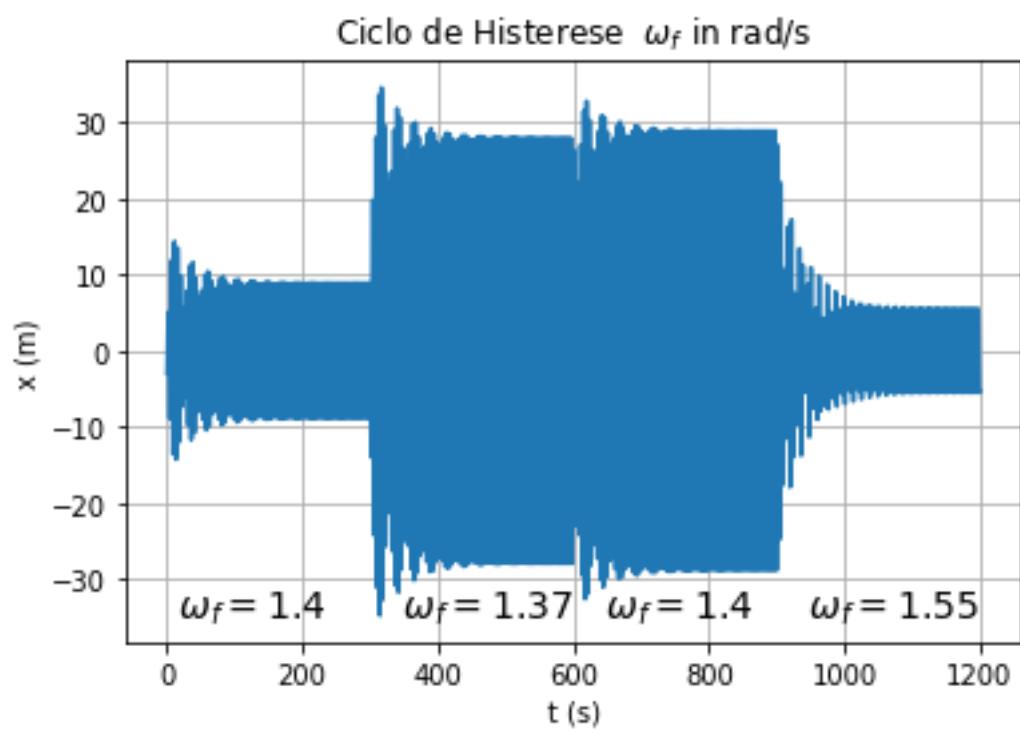
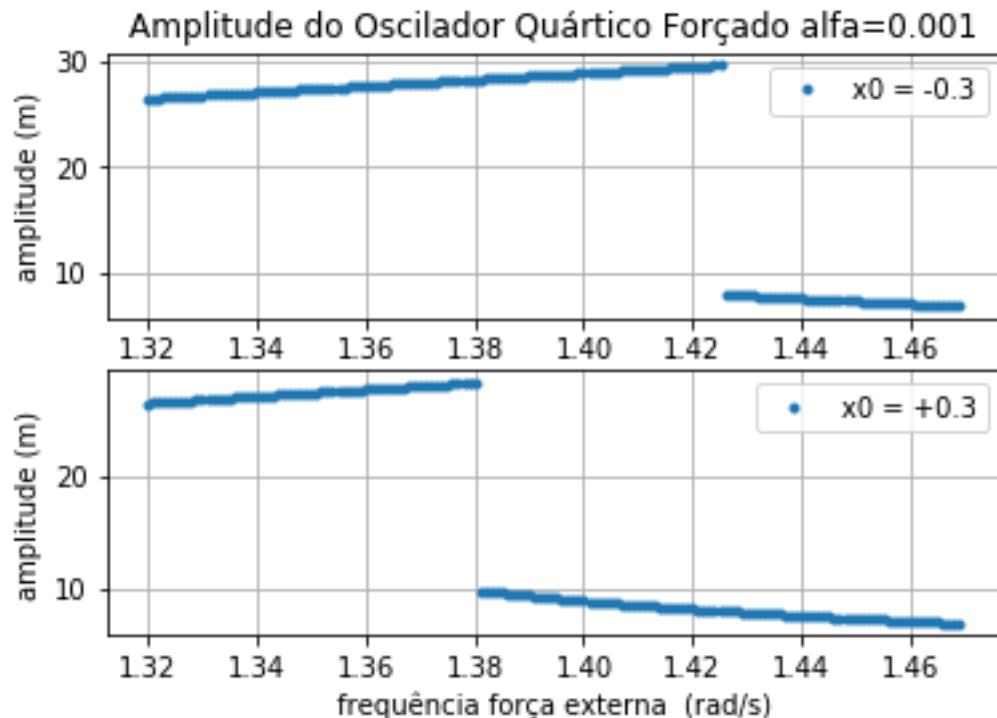


4. Para  $\alpha = 0.001 \text{ m}^{-2}$  obtém-se variações rápidas na zona  $0.25 < \omega_f < 0.50 \text{ rad/s}$ . O gráfico seguinte é um aumento dessa zona. Podemos ver um outro máximo da amplitude para  $\omega_f \approx 0.44 \text{ rad/s}$ . É um máximo inferior ao máximo principal, e  $\omega_f$  é inferior à frequência de ressonância  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ . É por isso é chamada ressonância sub harmónica.



## Histerese

**Uma gama de valores iniciais origina soluções diferentes num pequeno intervalo da frequência da força exterior, origina um mecanismo de histerese, em que a força exterior provoca um aumento grande da amplitude, e uma vez removida ou invertida a força exterior, essa amplitude grande permanece.**



## 8.6 Caos

Consideremos um oscilador quârtico, em que a energia potencial só depende do termo quârtico

$$E_p = \alpha x^4$$

Vamos estudar a solução de condições iniciais

$$x(t=0) = 3.0000 \text{ m}$$

$$v_x(t=0) = 0$$

E as características do sistema corpo-mola, meio e força exterior:

$$k = 1 \text{ N/m};$$

$$m = 1 \text{ kg}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$$

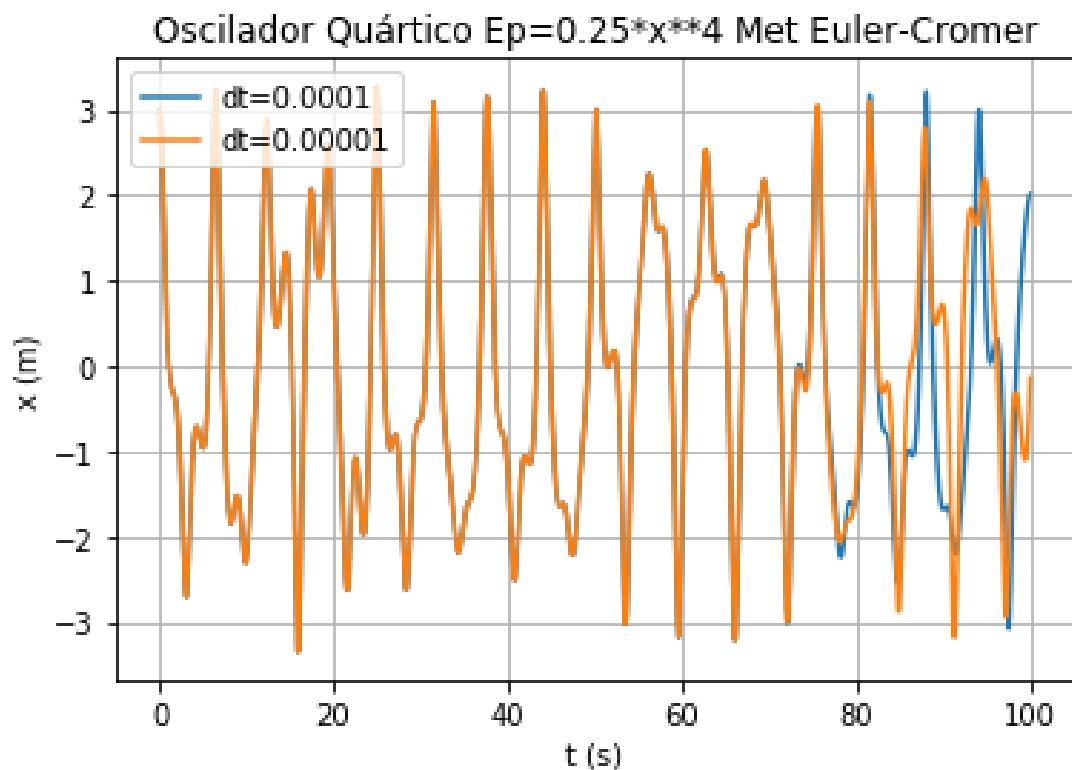
$$b = 0.05 \text{ kg/s}$$

$$\alpha = 0.25 \text{ m}^{-2}$$

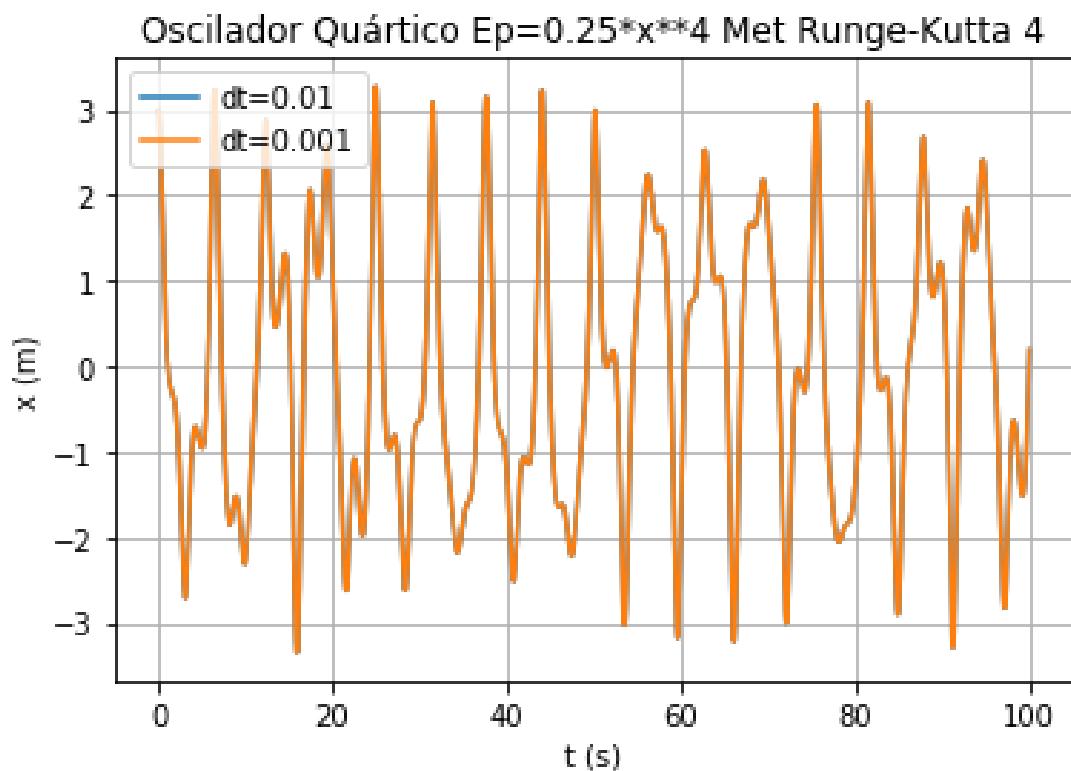
$$F_0 = 7.5 \text{ N}$$

$$\omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

Vamos usar o método de Euler-Cromer para encontrar a solução. Usamos dois passos temporais muito pequenos. O gráfico abaixo mostra que a solução não converge para  $t > 70$  s.

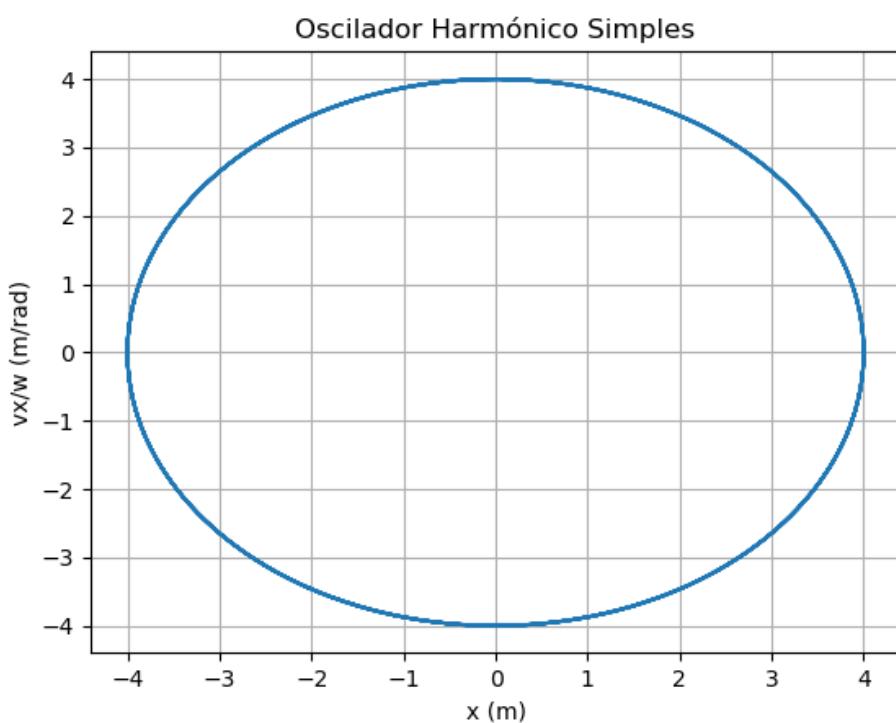
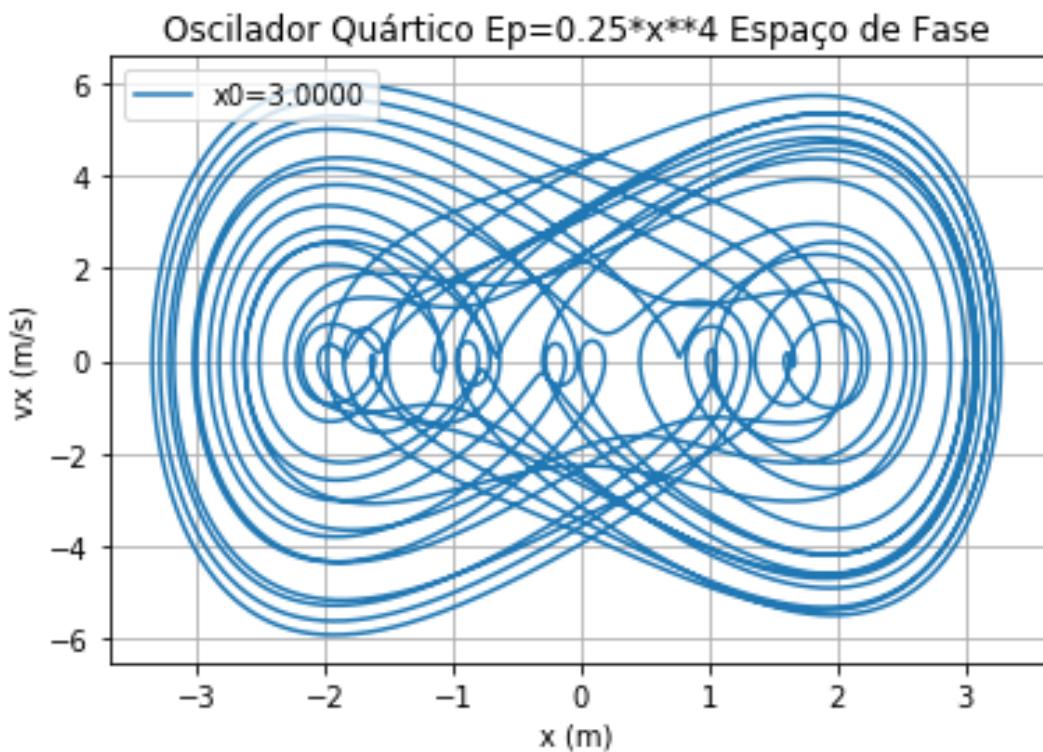


Como o método de Euler-Cromer mostra não ser fiável para este problema, vamos usar um método que tenha um erro de truncatura melhor que  $\sigma(\delta t)$ . O método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem apresenta um erro global  $\sigma(\delta t^4)$  e pode ser consultado no apêndice 8.A. Usando este novo método, a solução converge como se vê na figura abaixo, para passos temporais de valor razoável.



#### **Características:**

- A amplitude (posição máxima e mínima) não se mantêm constante
- O intervalo de tempo entre dois máximos de amplitude), o período, não se mantêm constante
- No Espaço de Fase obtemos figuras complexas, ao contrário do Osciladores simples, quer harmônico, quer não harmônico.



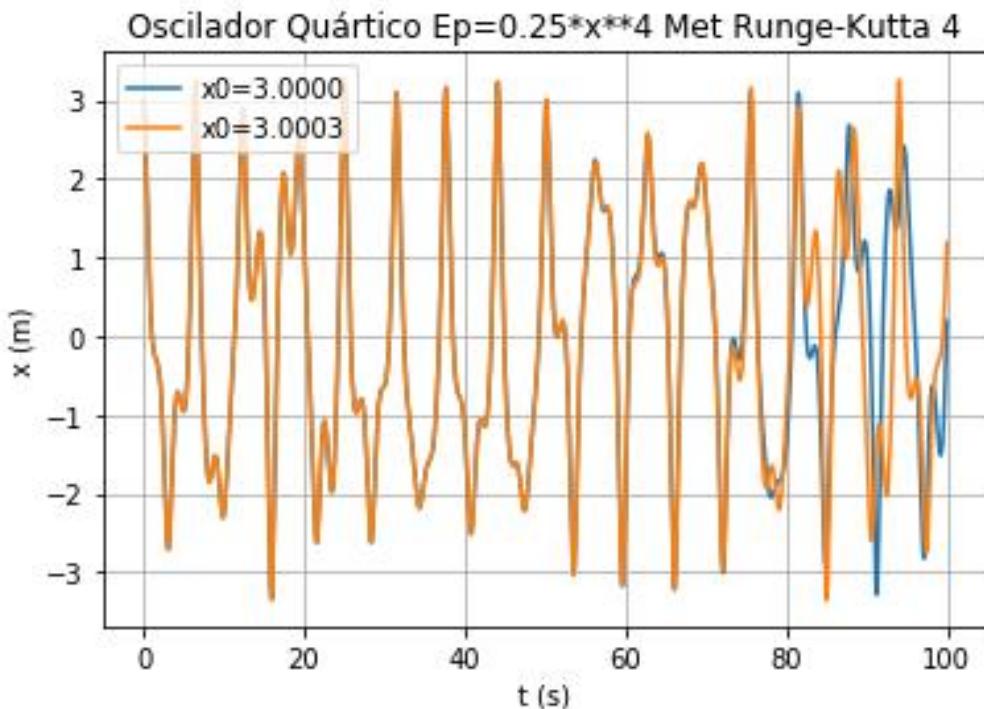
As duas trajetórias no espaço das fases contrastam imenso!

Harmônico Forçado: Trajetória fechada (parte estacionária)

Quártico Forçado: A trajetória nunca se fecha!

### Extrema sensibilidade às condições iniciais.

Vamos estudar a influência das condições iniciais. Vamos continuar com o oscilador quártico de energia potencial  $E_p = \frac{1}{4}\alpha x^4$  com as mesmas características e a mesma  $v_x(t = 0) = 0$ . Vamos determinar as soluções correspondentes condições iniciais muito próximas, (i)  $x(t = 0) = 3.0000$  m e (ii)  $x(t = 0) = 3.0003$  m. vamos usar o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem , que para um passo de  $\delta t = 0.001$  s a solução converge. No gráfico abaixo estão as duas soluções.



O resultado é que as duas soluções para condições iniciais diferentes, mas muito próximas, são inicialmente iguais, mas passado algum intervalo de tempo, as soluções tornam-se completamente diferentes, embora oscilem no mesmo intervalo. Ou seja

- Soluções com condições iniciais extramente próximas DIVERGEM!
- As condições iniciais, que são medidas, estão sempre afetadas de um erro experimental. Cada condição inicial ligeiramente diferente produz uma evolução temporal diferente.

**Por isso não se consegue calcular (prever) a evolução a médio prazo - CAOS** - apesar de a solução ser ÚNICA (para uma condição inicial exata),

## Equações de Lorenz

A extrema sensibilidade às condições iniciais foi descoberto por Lorenz durante o estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples. Foi conduzido a 3 equações diferenciais de 1ª ordem.

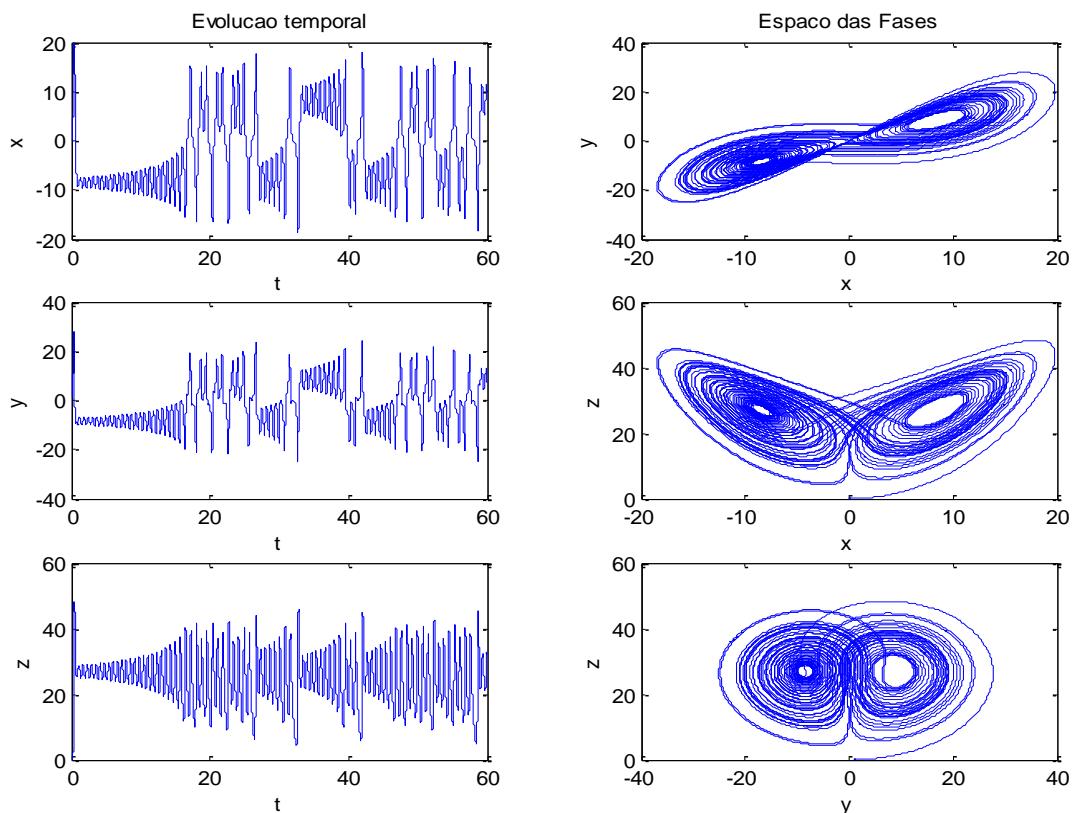
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \\ x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = y_0 \\ z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

em que as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  não possuem significado físico direto.

Com os valores  $\sigma = 10$ ;  $b = \frac{8}{3}$ ;  $r = 28$ ;

e as condições iniciais:  $x(0) = z(0) = 0$ ;  $y(0) = 1$ ,

obteve as seguintes soluções:



Constata-se que as soluções são oscilações irregulares e formam figuras complexas no espaço de fase. E também são extremamente sensíveis às condições iniciais.

Osciladores Forçados:

- Insensíveis às condições iniciais

Ex.: Oscilador Harmónico Amortecido e Forçado no regime estacionário)

- Extrema sensibilidade às condições iniciais – CAOS

Ex.:\_Oscilador Quártico Amortecido e Forçado, e em geral osciladores não harmónicos (para alguns parâmetros)

### **Teorema de Poincaré-Bendixon:**

O caos não pode ser observado em sistemas autónomos bidimensionais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Note: as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  não dependem do tempo, a variável independente.

As 3 equações de Lorenz não são um sistema autónomo bidimensional, assim como o Oscilador Quártico Amortecido e Forçado (são 2 equações não autónomas ( ou 3 autónomas com  $\frac{dt}{dt} = 1$ ))

### Apêndice 8.A Método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem

#### 8.A1 Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t = 0) = v_{x0} \end{cases}$$

Método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6} [c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

em que

$$\begin{aligned} c_1 &= a_x(t, v_x(t)) \\ c_2 &= a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1 \frac{\delta t}{2}\right) \\ c_3 &= a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2 \frac{\delta t}{2}\right) \\ c_4 &= a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3 \delta t) \end{aligned}$$

Este método apresenta um erro global  $\sigma(\delta t^4)$ .

No e-learning está a função `function_rk4` que implementa este método de integração de uma equação diferencial de 1<sup>a</sup> ordem

```
"""
Created on Mon Jun 21 10:00:37 2021
@author: vitor.torres
"""

def rk4(t,vx,acelera,dt):
    """
    Integração numérica de equação diferencial de 2a ordem respeitante ao movimento
    acelera=dvx/dt=Força(t,x,vx)/massa      com vx=dx/dt  (acelera é uma função)
    input: t = instante de tempo
           vx(t) = velocidade
           dt = passo temporal
    output: vxp = vx(t+dt)
    """

    ax1=acelera(t,vx)
    c1v=ax1*dt
    ax2=acelera(t+dt/2.,vx+c1v/2.)
    c2v=ax2*dt                      # predicto: vx(t+dt) * dt
    ax3=acelera(t+dt/2.,vx+c2v/2.)
    c3v=ax3*dt
    ax4=acelera(t+dt,vx+c3v)
    c4v=ax4*dt

    vxp=vx+(c1v+2.*c2v+2.*c3v+c4v)/6.
    return vxp
```

#### Problema 8.5

Implemente o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem para calcular a velocidade que um volante de badminton atinge 2 s depois de ser largado. A velocidade terminal do volante é de 6.80 m/s, e a aceleração é

$$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2} |v_y| v_y .$$

Compare o valor obtido com o valor exato, de acordo com a lei  $v_y(t) = v_T \tanh(\frac{gt}{v_T})$ .

### 8.A2 Equação diferencial de 2<sup>a</sup> ordem de valor inicial

Uma equação diferencial de 2<sup>a</sup> ordem, como por exemplo

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = a_x(t, x, v_x) \\ v_x(t = 0) = v_{x0} \\ x(t = 0) = x_0 \end{cases}$$

em que

$$a_x(t, x, v_x) = \frac{F_x(t, x, v_x)}{m} - \frac{b}{m} \frac{dx}{dt}$$

Pode ser transformada em 2 equações diferenciais de 1<sup>a</sup> ordem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) \\ \frac{dv_x}{dt} = a_x(t, x, v_x) \\ v_x(t = 0) = v_{x0} \\ x(t = 0) = x_0 \end{cases}$$

e aplica-se a cada equação diferencial o método numérico conveniente.

No e-learning está a função function\_rk4\_x\_vx que implementa este método de integração de uma equação diferencial de 2<sup>a</sup> ordem

```
"""
Created on Mon Jun 21 09:52:29 2021
@author: vitor.torres
"""

def rk4(t,x,vx,acelera,dt):
    """
    Integração numérica de equação diferencial de 2a ordem respeitante ao movimento
    acelera=dvx/dt=Força(t,x,vx)/massa com vx=dx/dt (acelera é uma função)
    input: t = instante de tempo
           x(t) = posição
           vx(t) = velocidade
           dt = passo temporal
    output: xp = x(t+dt)
            vxp = vx(t+dt)
    """

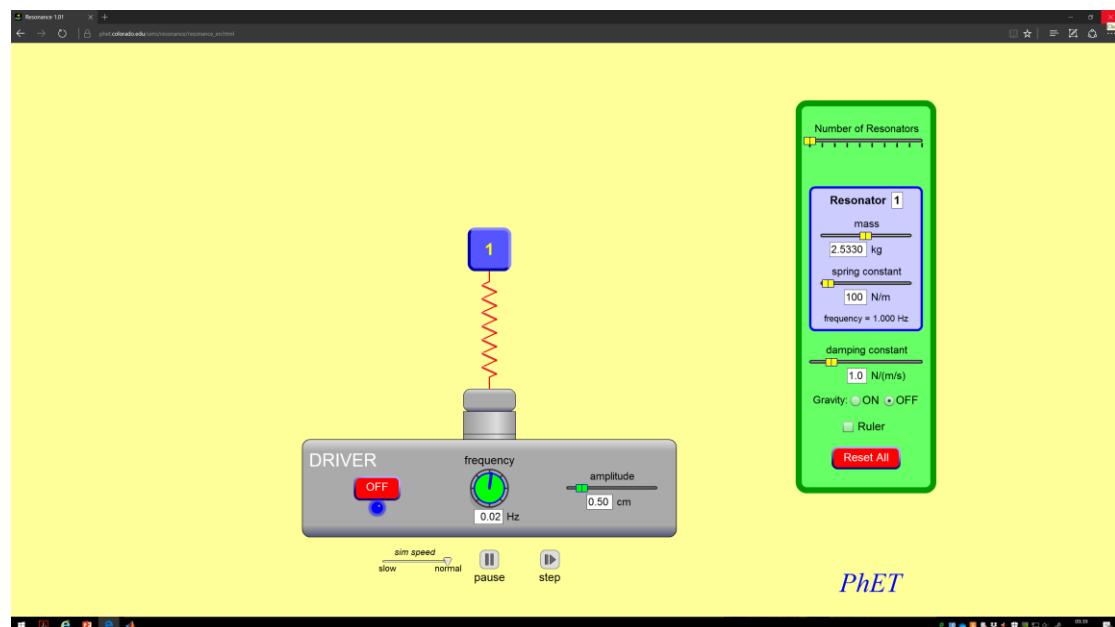
    ax1=acelera(t,x,vx)
    c1v=ax1*dt
    c1x=vx*dt
    ax2=acelera(t+dt/2.,x+c1x/2.,vx+c1v/2.)
    c2v=ax2*dt
    c2x=(vx+c1v/2.)*dt # predicto: vx(t+dt) * dt
    ax3=acelera(t+dt/2.,x+c2x/2.,vx+c2v/2.)
    c3v=ax3*dt
    c3x=(vx+c2v/2.)*dt
    ax4=acelera(t+dt,x+c3x,vx+c3v)
    c4v=ax4*dt
    c4x=(vx+c3v)*dt

    xp=x+(c1x+2.*c2x+2.*c3x+c4x)/6.
    vxp=vx+(c1v+2.*c2v+2.*c3v+c4v)/6.
    return xp,vxp
```

**Bibliografia**

Serway, cap. 15;

A. I. Vistnes, Physics of Oscillations and Waves, cap. 3



[https://phet.colorado.edu/sims/resonance/resonance\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/resonance/resonance_en.html)

**QUESTION 15.1** Cleo Laine can break a wine glass by singing at it.

- i) How is it possible?
- ii) Can you do it?

All structures have natural frequencies of vibration. If an external agent causes them to vibrate at or near one of these frequencies, large oscillations are seen to build up. This phenomenon is called *resonance*. Over the years there have been several well-known instances of resonance occurring with dramatic and destructive effect:

- In 1963 a cooling tower at the Ferrybridge power station near Leeds collapsed. It had been caused to vibrate violently by vortices formed when the wind blew past a row of towers in front of it.
- In 1940 a wind of moderate speed caused large oscillations in the Tacoma Narrows bridge in Washington, USA. The bridge eventually collapsed into the river below.
- In 1831 a column of soldiers marching over the Broughton suspension bridge, near Manchester, set up a forced vibration which had a frequency close to one of the natural frequencies of the bridge. The bridge collapsed. Since this disaster, it has become normal for troops to break step when crossing a bridge.

Copyrighted material

## DAMPED AND FORCED OSCILLATIONS 343

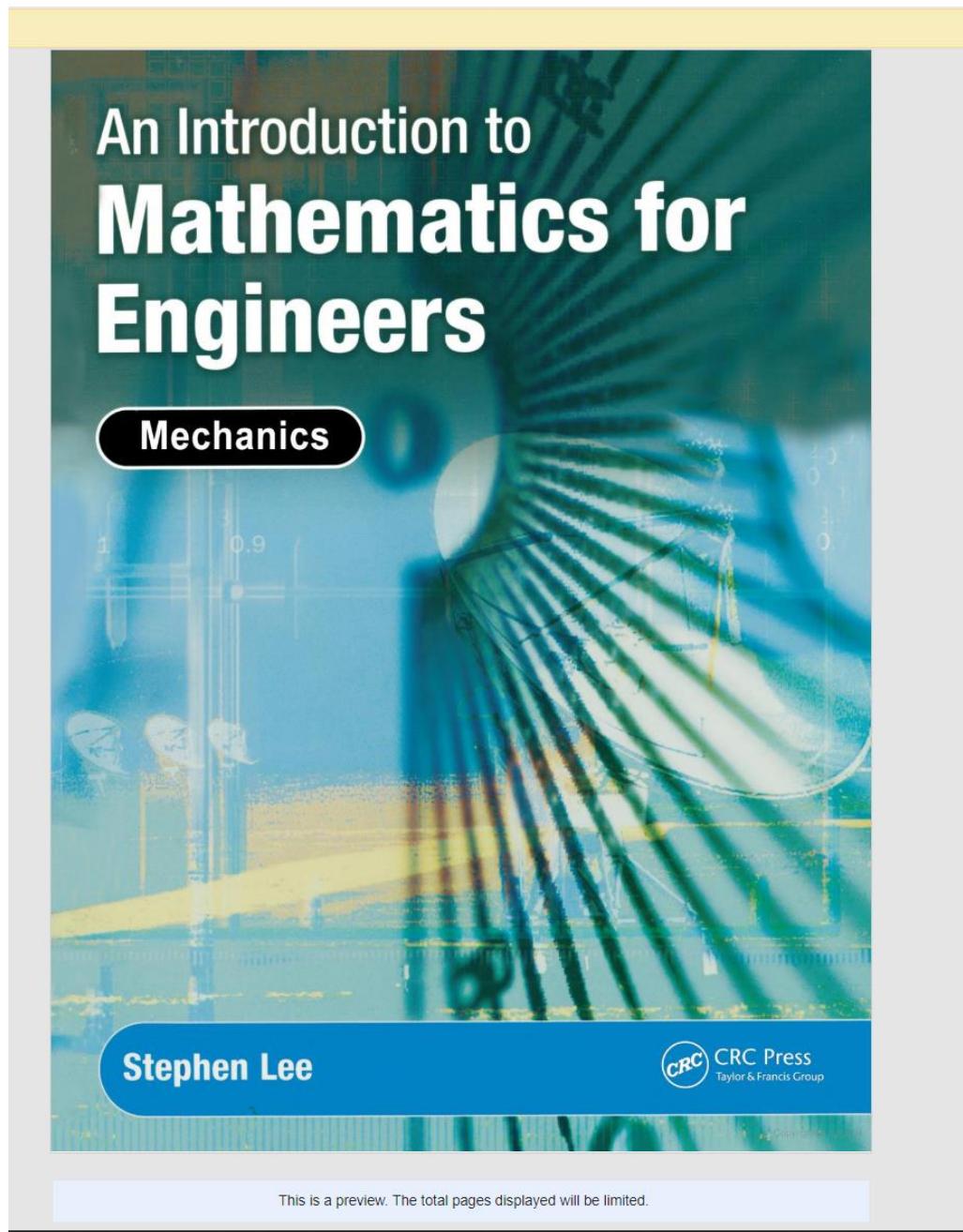
- In biblical times, after camping outside the walled town of Jericho for seven days, Joshua gave orders which brought the siege to an end in a curious way:

*So they blew trumpets, and when the army heard the trumpet sound, they raised a great shout, and down came the walls.*

Could this, too, have been the effect of forced vibrations?



These instances show how important it is for engineers to be able to predict the natural frequencies of any structures they are designing, and the frequencies of any possible forcing agents. Nor is this a matter for civil engineers alone: engines which run at



## Problemas

### Osciladores Harmónicos Forçados

- 1.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo  $x_{eq} = 0$  m, o oscilador harmónico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k x$$

O oscilador é amortecido pela força  $-bv_x$  e sujeito à força externa  $F_0 \cos(\omega_f t)$ .

Considere  $k = 1$  N/m,  $b = 0.05$  kg/s,  $F_0 = 7.5$  N e  $\omega_f = 1.0$  rad/s.

- a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m. Tem confiança no seu resultado?
- b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.
- c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -4 m/s e a posição inicial -2 m.
- d) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.
- e) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?
- f) Calcule os coeficientes de Fourier do movimento do regime estacionário nas condições das alíneas a) e c). Que conclusões retira da lei do movimento do regime estacionário?

- 2.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo  $x_{eq} = 0$  m, o oscilador harmónico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k x$$

O oscilador é amortecido pela força  $-bv_x$  e sujeito à força externa  $F_0 \cos(\omega_f t)$ .

Considere  $k = 1$  N/m,  $b = 0.05$  kg/s, e  $F_0 = 7.5$  N e  $\omega_f = 2.0$  rad/s.

- a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.
- b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.
- c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -3 m/s e a posição inicial -4 m..
- d) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.

**3.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo  $x_{eq} = 0$  m, o oscilador harmónico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k x$$

O oscilador é amortecido pela força  $-bv_x$  e sujeito à força externa  $F_0 \cos(\omega_f t)$ . Considere  $k = 1$  N/m,  $b = 0.05$  kg/s, e  $F_0 = 7.5$  N. Qual a frequência angular  $\omega_f$  da força externa para se alcançar uma amplitude de 50.00 m no regime estacionário? Apresente o resultado com precisão de 4 algarismos.

Pista: Encontre as raízes (zeros) de  $A(\omega_f) - 50.00 = 0$  rad/s.

### Oscilador Não harmónico Forçado

**4.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quârtico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo  $x_{eq} = 0$  m, o oscilador quârtico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2(1 + \alpha x^2)$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k x (1 + 2\alpha x^2).$$

O oscilador é amortecido pela força  $-bv_x$  e sujeito à força externa  $F_0 \cos(\omega_f t)$ . Considere  $k = 1$  N/m,  $b = 0.05$  kg/s,  $\alpha = 0.002$  N/m<sup>2</sup>,  $F_0 = 7.5$  N e  $\omega_f = 1.0$  rad/s.

- a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 3 m. Tem confiança no seu resultado?
- b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.
- c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -4 m/s e a posição inicial -2 m.
- d) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.
- e) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?
- f) Calcule os coeficientes de Fourier do movimento do regime estacionário nas condições das alíneas a) e c). Que conclusões retira da lei do movimento do regime estacionário?

**5.** Implemente o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem para calcular a velocidade com que um volante de badminton atinge 2 s depois de ser largado. A velocidade terminal do volante é de 6.80 m/s, e a aceleração é

$$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2} |v_y| v_y .$$

Compare o valor obtido com o valor exato, de acordo com a lei  $v_y(t) = v_T \tanh(\frac{gt}{v_T})$ .

O método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem determina a velocidade num instante posterior usando a seguinte aproximação:

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6} [c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

em que  $c_1 = a_x(t, v_x(t))$

$$c_2 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1 \frac{\delta t}{2}\right)$$

$$c_3 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2 \frac{\delta t}{2}\right)$$

$$c_4 = a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3 \delta t)$$

a partir da equação diferencial  $\begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t = 0) = v_{x0} \end{cases}$

**6.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quârtico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo  $x_{eq} = 0$  m, o oscilador quârtico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k x^2(1 + \alpha x^2)$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k x (1 + 2\alpha x^2).$$

O oscilador é amortecido pela força  $-bv_x$  e sujeito à força externa  $F_0 \cos(\omega_f t)$ .

Considere  $k = 1$  N/m,  $b = 0.05$  kg/s,  $\alpha = 1.00$  N/m<sup>2</sup>,  $F_0 = 7.5$  N e  $\omega_f = 1.0$  rad/s.

- a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 3 m. Tem confiança no seu resultado?
- b) Se existir regime estacionário, calcule os limites do movimento (amplitude), o seu período, faça o gráfico no espaço da fase e a análise de Fourier.
- c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial -3 m/s e a posição inicial -3 m.
- d) Se existir regime estacionário, calcule os limites do movimento (amplitude), o seu período, faça o gráfico no espaço da fase e a análise de Fourier.
- e) Calcule a energia mecânica nos casos da alínea a) e b). É constante ao longo do tempo?
- f) Face aos resultados obtidos como caracteriza as soluções deste oscilador forçado?

**7.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quârtico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo  $x_{eq} = 0$  m, o oscilador quârtico tem a energia potencial

$$E_p = \alpha x^4$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -4\alpha x^3.$$

O oscilador é amortecido pela força  $-bv_x$  e sujeito à força externa  $F_0 \cos(\omega_f t)$ .

Considere  $k = 1$  N/m,  $b = 0.05$  kg/s,  $\alpha = 0.25$  N/m<sup>2</sup>,  $F_0 = 7.5$  N e  $\omega_f = 1.0$  rad/s.

Este oscilador pode apresentar regime caótico. Calcule até que instante pode calcular univocamente a lei do movimento, sabendo que a posição inicial é  $3.000 \pm 0.001$  m e a velocidade inicial é nula. Considere todas as quantidades, exceto a posição inicial, medidas com uma precisão elevada.

**8.** Diga quais dos seguintes sistemas modelados pelas equações diferenciais de valor inicial:

a) Oscilador Harmônico Amortecido

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

b) Oscilador Harmônico Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t)$$

c) Oscilador Quártico Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\alpha x^3 - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t)$$

d) Oscilador de Lorenz

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

e) Oscilador de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - \varepsilon(x^2 - 1) \frac{dx}{dt}$$

f) Pêndulo Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t)$$

g) oscilador de uma palheta de clarinete

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \alpha \frac{dx}{dt} - \beta \left( \frac{dx}{dt} \right)^3$$

Podem apresentar soluções caóticas?

**9.** Ao modelar a dinâmica da convecção dum fluido por um modelo muito simples, Edward Lorenz, obteve três equações diferenciais de 1ª ordem de valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \\ x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = y_0 \\ z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

em que os coeficientes e as variáveis não têm um significado físico direto. Determine a evolução temporal, quando  $\sigma = 10$ ;  $b = \frac{8}{3}$ ;  $r = 28$  e  $x(t=0) = z(t=0) = 0$  e

$y(t=0) = 1$ . Tem confiança nos seus resultados?

# **Capítulo 9**

## **Osciladores Acoplados: Modos Normais e Ondas**

### **Sumário**

Dois Osciladores harmônico acoplados: Modos Normais

Dois Osciladores harmônico amortecidos acoplados

Dois Osciladores harmônico forçados acoplados

Três Osciladores harmônico forçados acoplados

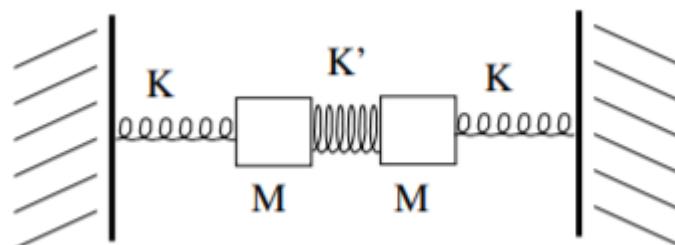
## 9.1 Introdução

## 9.2 Dois osciladores harmónicos acoplados

(sobreposição de ondas, batimentos ??????)  
Alcançar ondas por meio de osciladores acoplados?

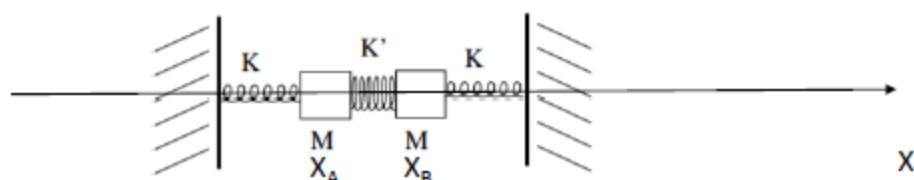
Transferência de energia: Forçar corpo A e ver como a energia se propaga (número muito grande de osciladores)???

**2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica  $k'$ , e  
Ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k  
Como são as oscilações? Que frequências?**



Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 2 corpos.

- Que forças aplicada a cada um dos corpos?
- Equação dinâmica de Newton para cada corpo
- Resolver a eq. dinâmica pelo método de Euler-Cromer (oscilações)



Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 2 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

- Que forças aplicada a cada um dos corpos?

$$\text{Corpo A} \quad F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$$

$$\text{Corpo B} \quad F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$$

- Equação dinâmica de Newton para cada corpo

$$\text{Corpo A} \quad m \frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$$

$$\text{Corpo B} \quad m \frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$$

$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$$

$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$$

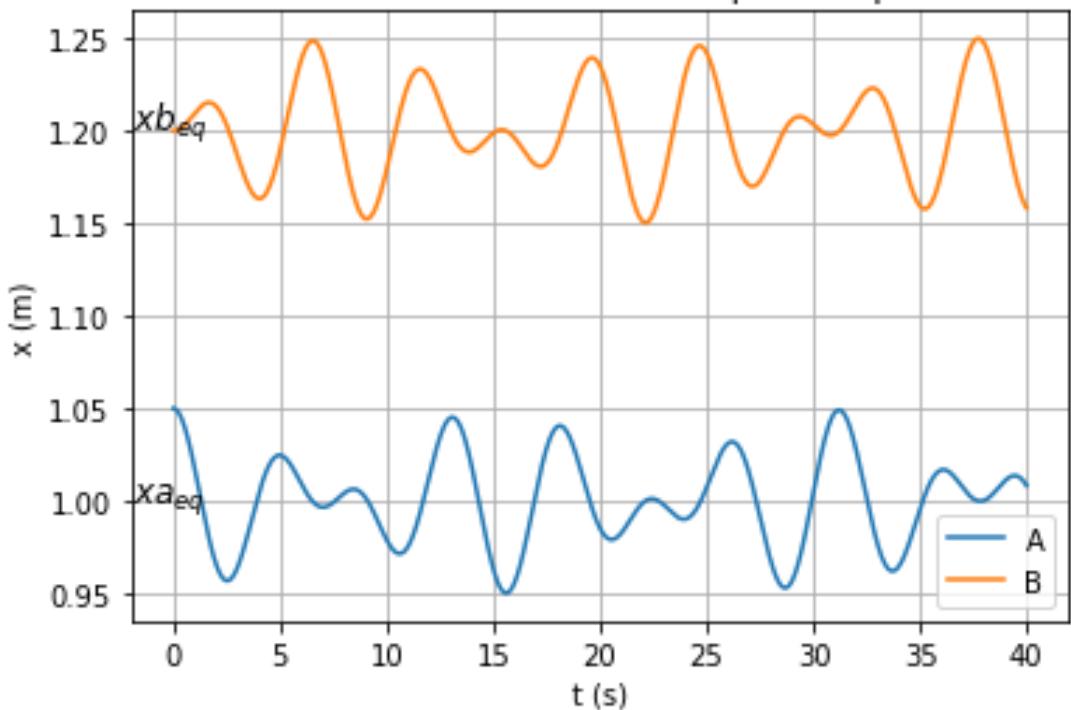
$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$

Movimento não periódico

### 2 Osciladores Harmónicos Simples Acoplados



Colocar gráfico energia total e parcial (validação do método numérico de integração )

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq} + 0.05 \text{ m}$$

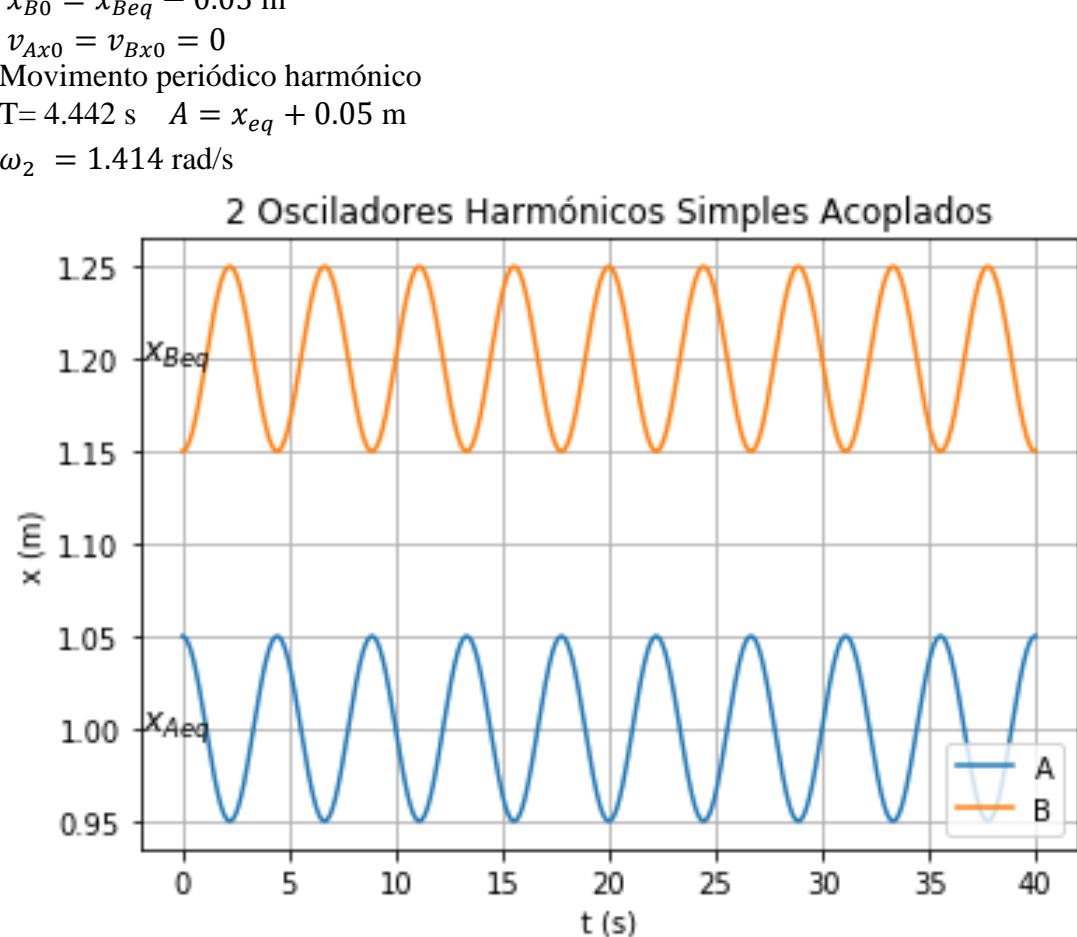
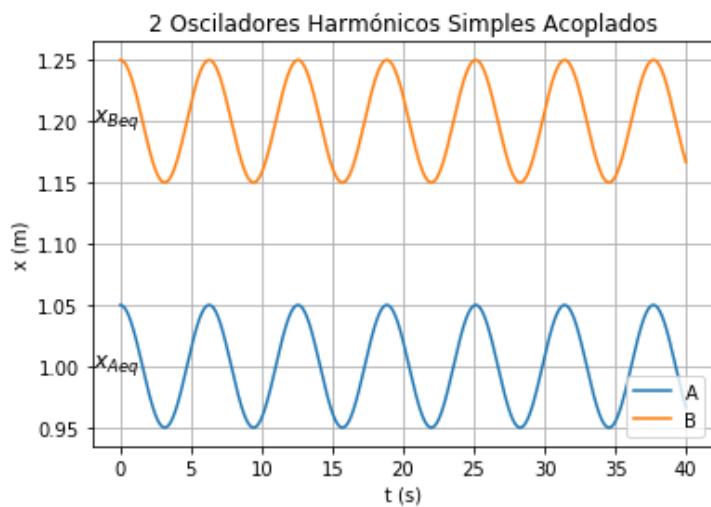
$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$

A mola do meio não interfere (no início)

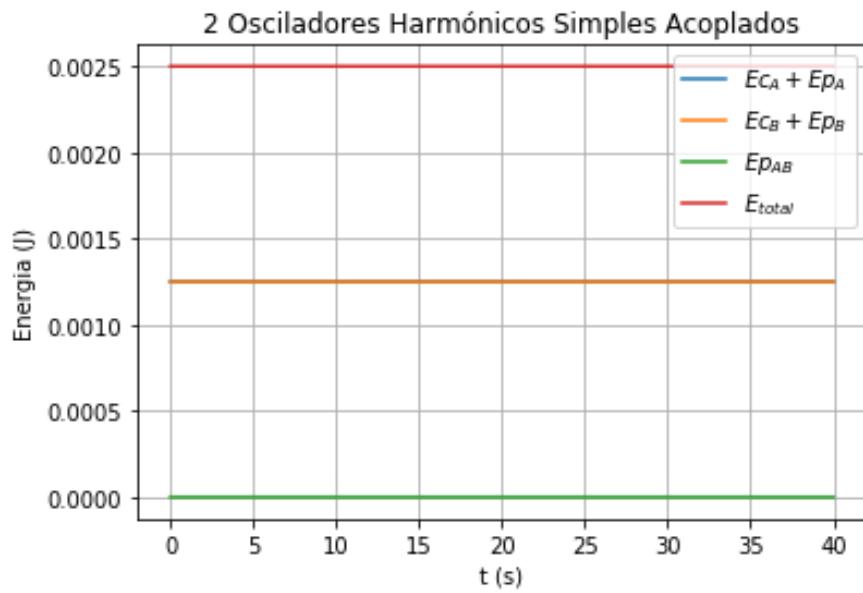
Movimento periódico harmónico

$$T = 6.283 \text{ s} \quad A = x_{eq} + 0.05 \text{ m}$$

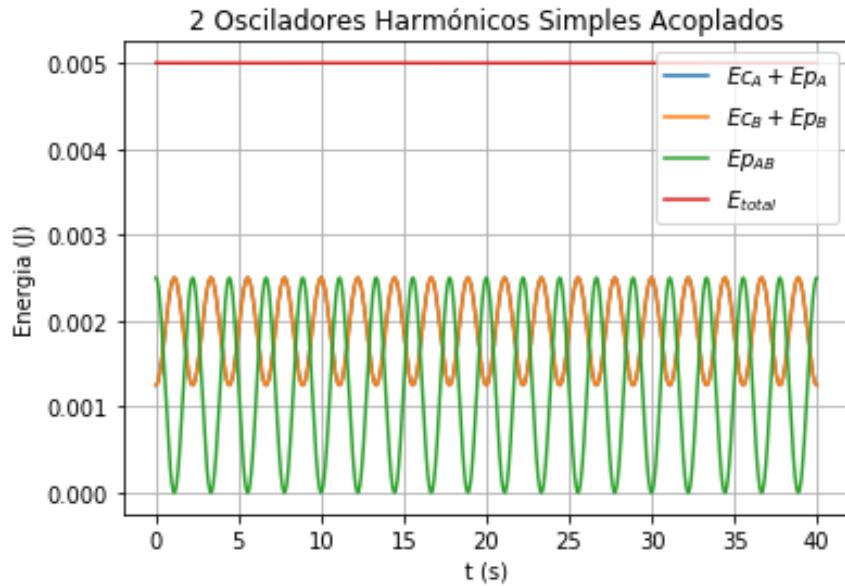
$$\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$$



Modo normal 1       $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$



Modo normal 2     $\omega_2 = 1.414 \text{ rad/s}$

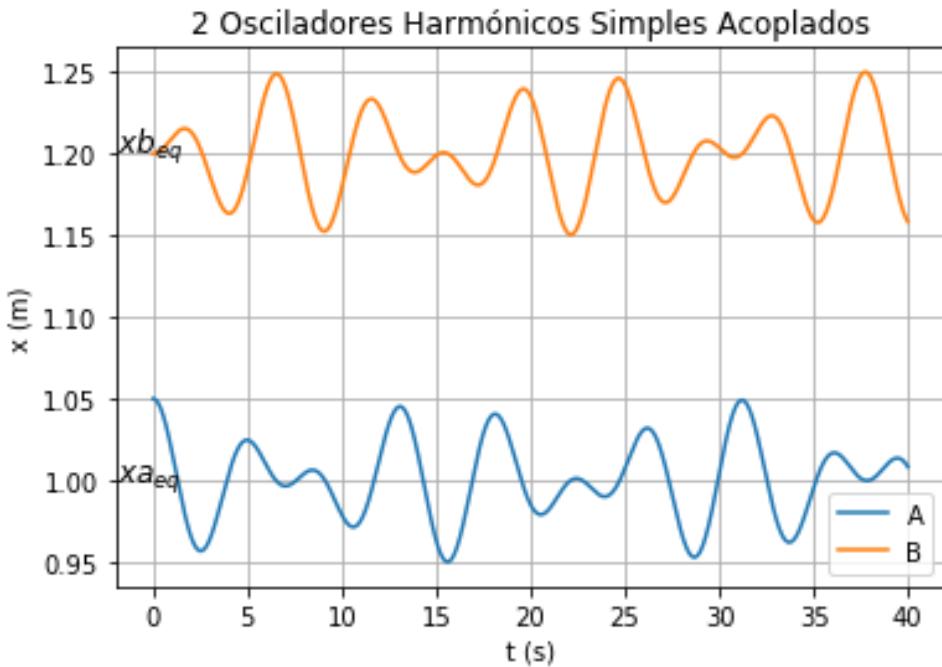


$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Aeq} = 1.2 \text{ m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$



Movimento não periódico

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} ?$$

Corpo A       $m \frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

Corpo B       $m \frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

Substituindo

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Obtém-se (problema de valores e vetores próprios)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$$

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ v_{xA} = -\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ v_{xB} = -\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

para  $t = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{eqA} + 0.05 = x_{eqA} + A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2) \\ x_{eqB} = x_{eqB} + A_1 \cos(\phi_1) - A_2 \cos(\phi_2) \\ 0 = -\omega_1 A_1 \sin(\phi_1) - \omega_2 A_2 \sin(\phi_2) \\ 0 = -\omega_1 A_1 \sin(\phi_1) + \omega_2 A_2 \sin(\phi_2) \end{array} \right.$$

4 equações a 4 incógnitas.  
 $\phi_1 = \phi_2 = 0$  e  $A_1 = A_2 = 0.025$  m

Movimento não periódico       $\left\{ \begin{array}{l} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{array} \right.$

Certo! Com  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  e  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$

Mas é uma sobreposição de 2 movimentos harmónicos

Qualquer movimento de 2 corpos acoplados por interação elástica é uma sobreposição de MODOS NORMAIS

### Problema: (está na lista? =

Obter a evolução dos corpos A e B usando a sobreposição dos modos normais

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{array} \right.$$

Com  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  e  $A_1 = A_2 = 0.025$  m

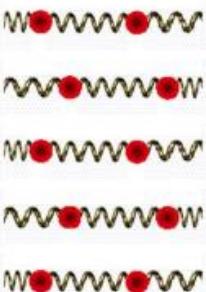
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = 1.414 \text{ rad/s}$$

X
⋮
<
>

## NORMAL MODES

Each mass vibrates with the same frequency

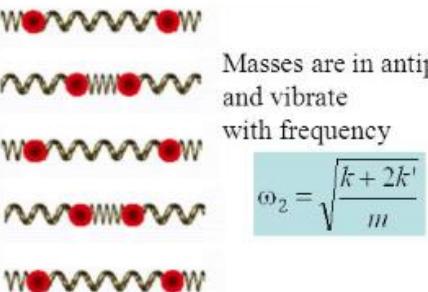
**NORMAL MODE 1**



Masses are in phase and vibrate with frequency

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**NORMAL MODE 2**



Masses are in antiphase and vibrate with frequency

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_1 = -x_2 = \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Aqui:  $x_1 = x_A - x_{Aeq}$  e  $x_2 = x_B - x_{Beq}$

## 9.3 Dois osciladores harmónicos amortecidos acoplados

### Amortecido:

$$\text{Corpo A} \quad m \frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) - bv_{Ax}$$

$$\text{Corpo B} \quad m \frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) - bv_{Bx}$$

$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$$

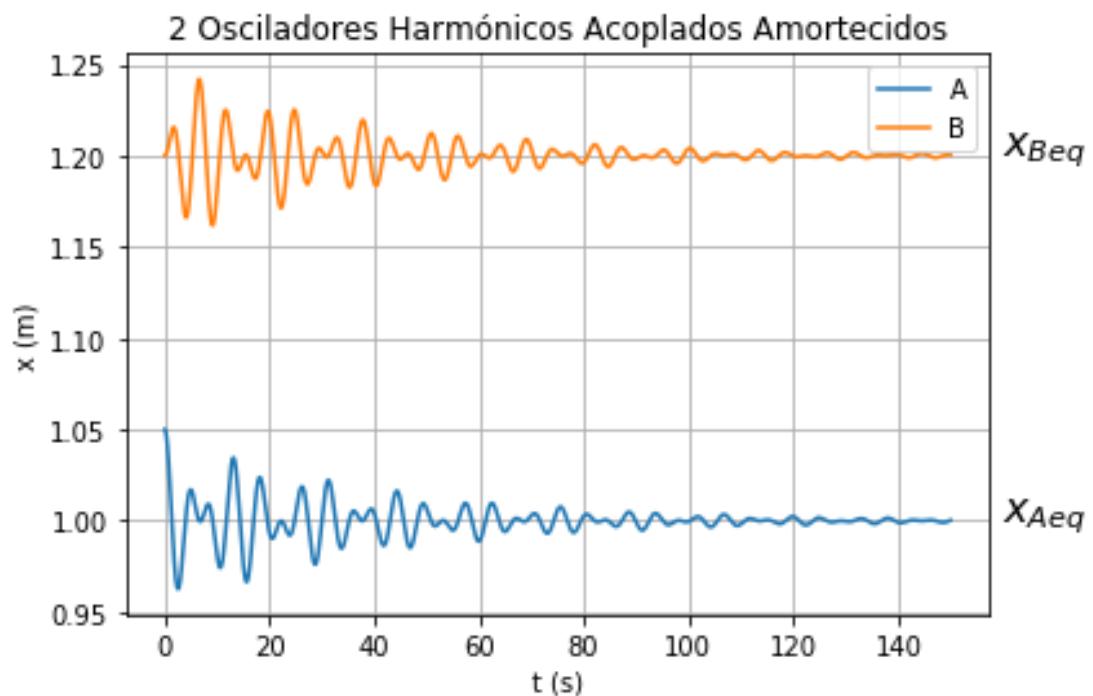
$$b = 0.05$$

$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Aeq} = 1.2 \text{ m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$



## 9.4 Dois osciladores harmónicos forçados acoplados

**Forçado** no corpo A:

Corpo A

$$m \frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) - bv_{Ax} + F_0 \cos(\omega_f t)$$

Corpo B

$$m \frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) - bv_{Bx}$$

$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$$

$$b = 0.05 \text{ kg/s}$$

$$F_0 = 0.005 \text{ N}; \omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

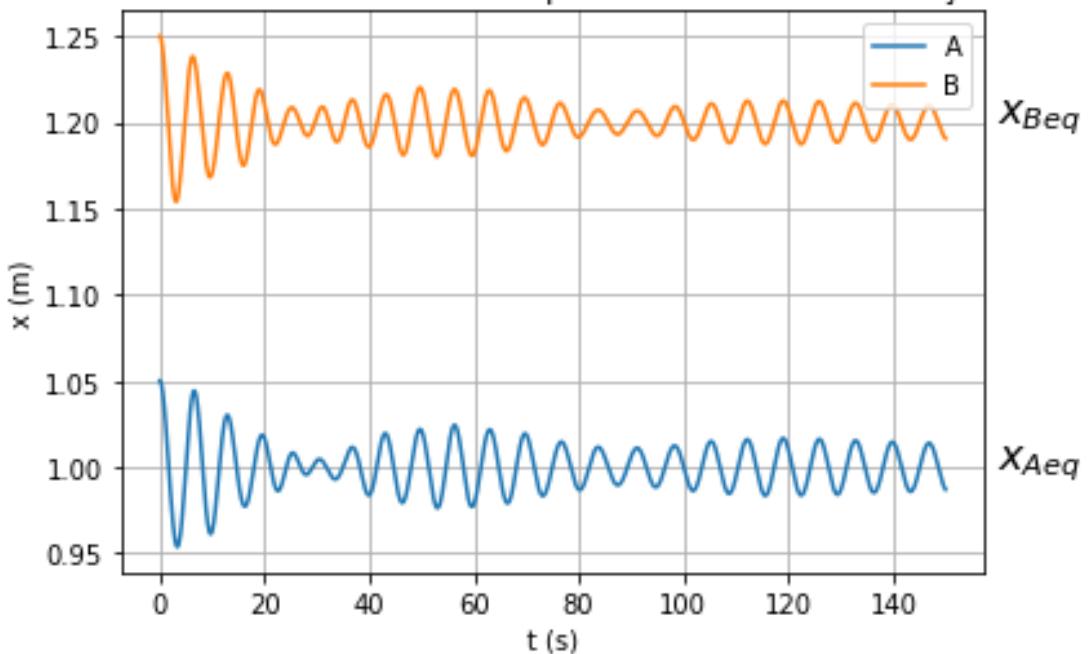
$$x_{B0} = x_{Beq} + 0.05 \text{ m}$$

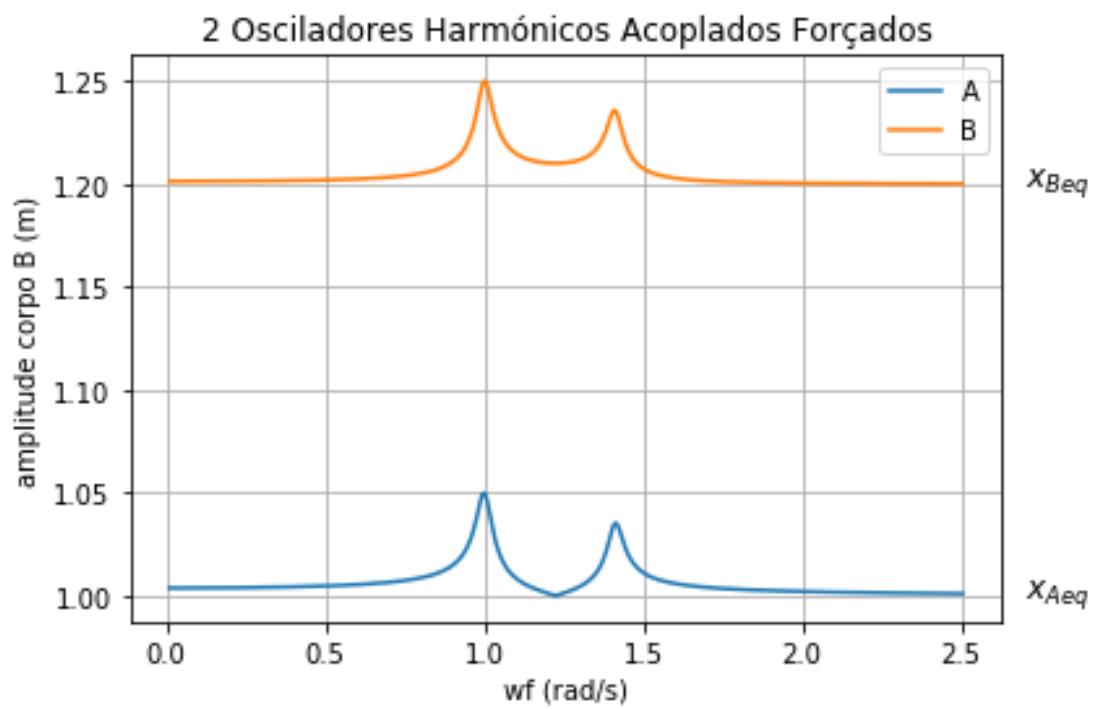
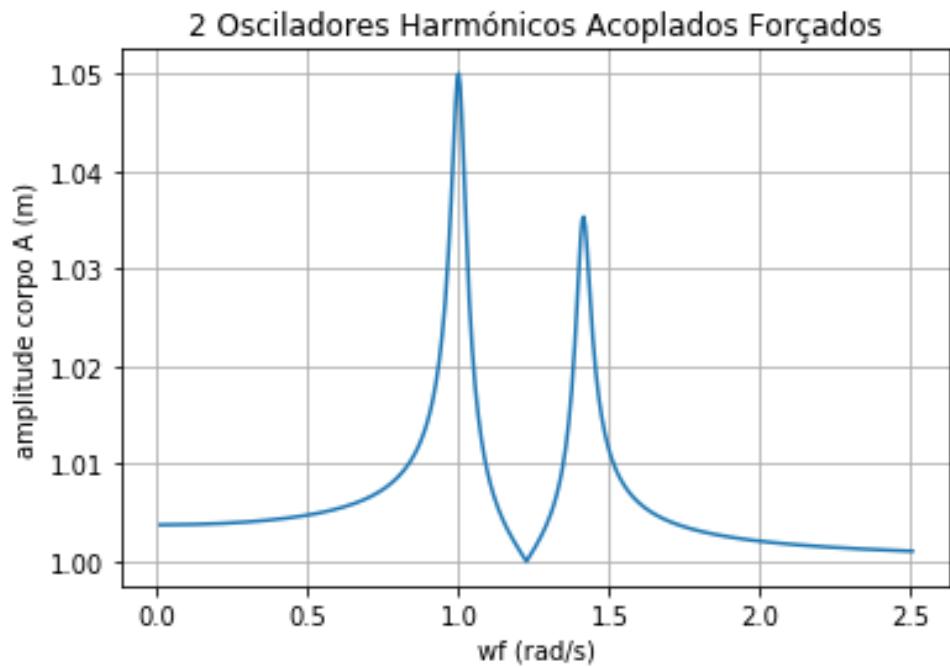
$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$

**Ressonância** nos dois corpos na **frequência dos modos normais**  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$

$$\text{rad/s e } \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = 1.414 \text{ rad/s}$$

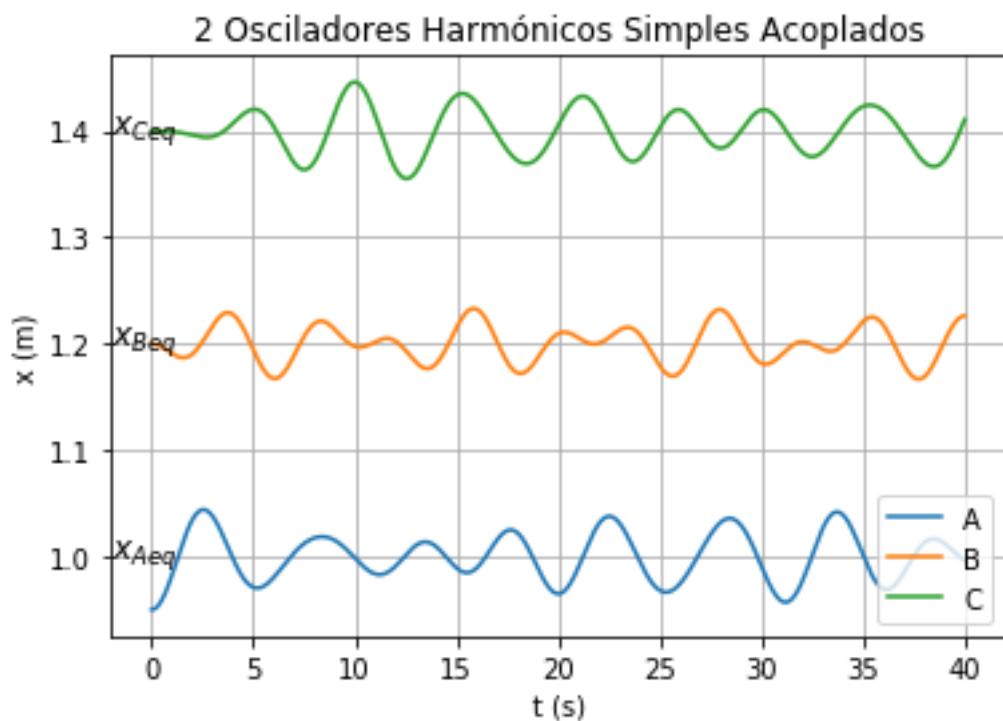
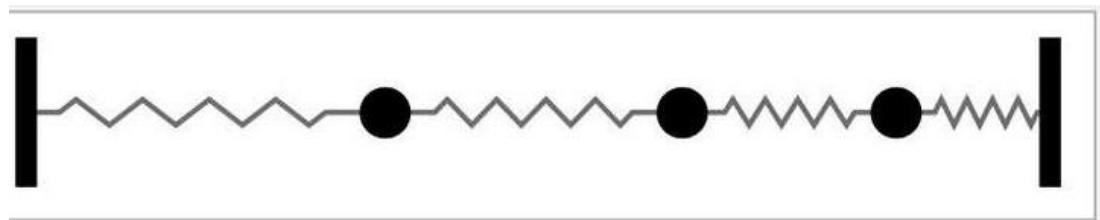
2 Osciladores Harmónicos Acoplados Amortecidos e Forçados

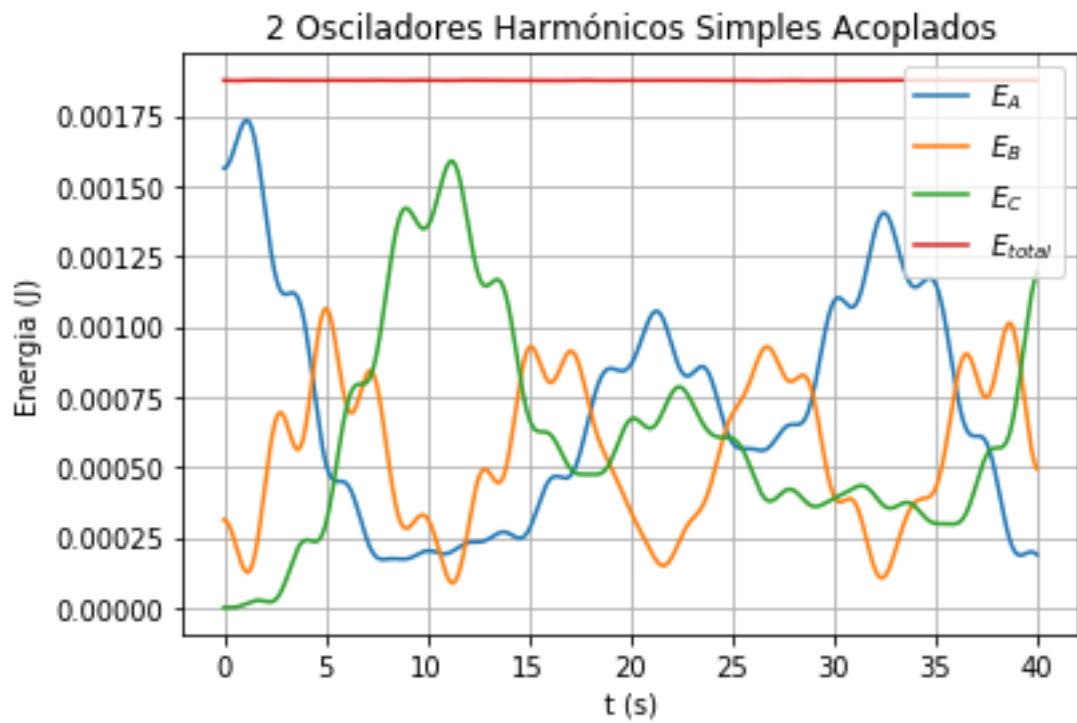




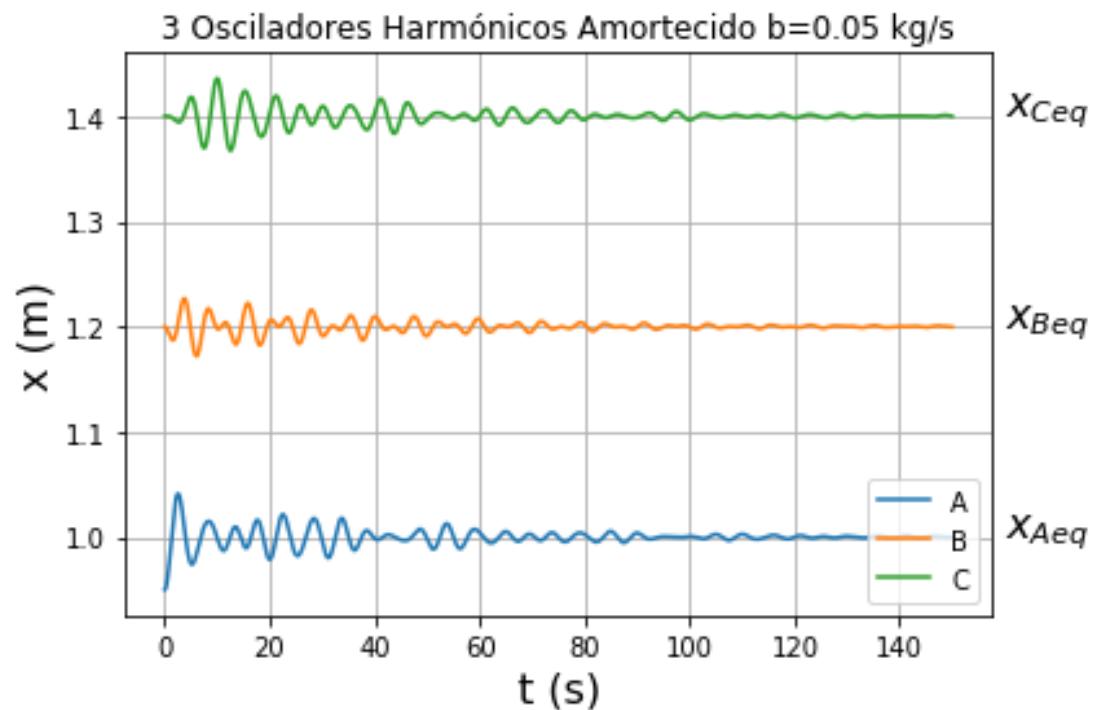
## 9.5 Três osciladores harmónicos amortecidos acoplados

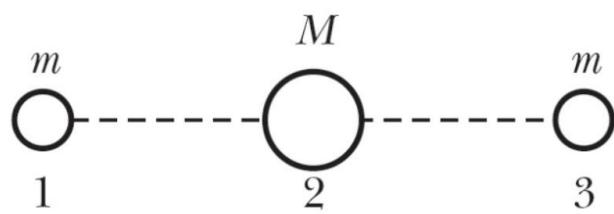
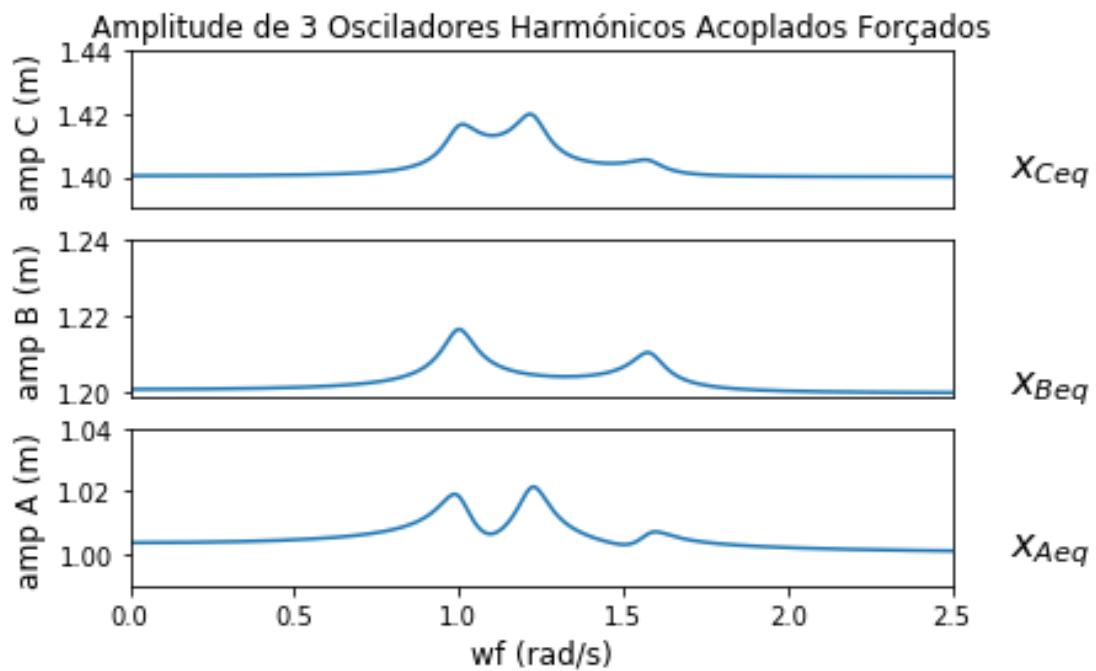
Três corpos acoplados





**Acoplamentos de osciladores: Transmissão de energia, não instantânea**

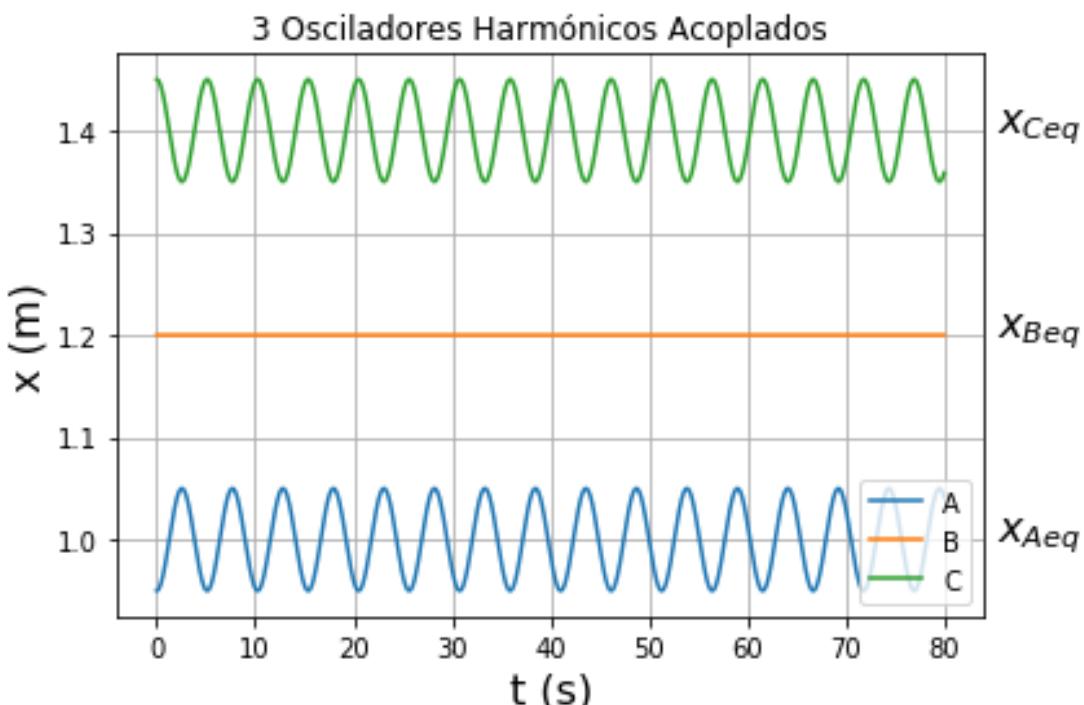




(a) Linear triatomic molecule



(c) Longitudinal normal modes



$T=5.130$  s e  $\omega = 1.225$  rad/s

### Ressonância:

Quando são forçados por uma força exterior, apresentam Ressonância quando a frequência da força externa for igual à frequência dos modos normais.

### Modos normais são:

- Medidos
- Calculados, ou por modelos ou por equações fundamentais da Física.

São usados no estudo da estrutura da matéria: Moléculas, Cristais, Sólidos, ...

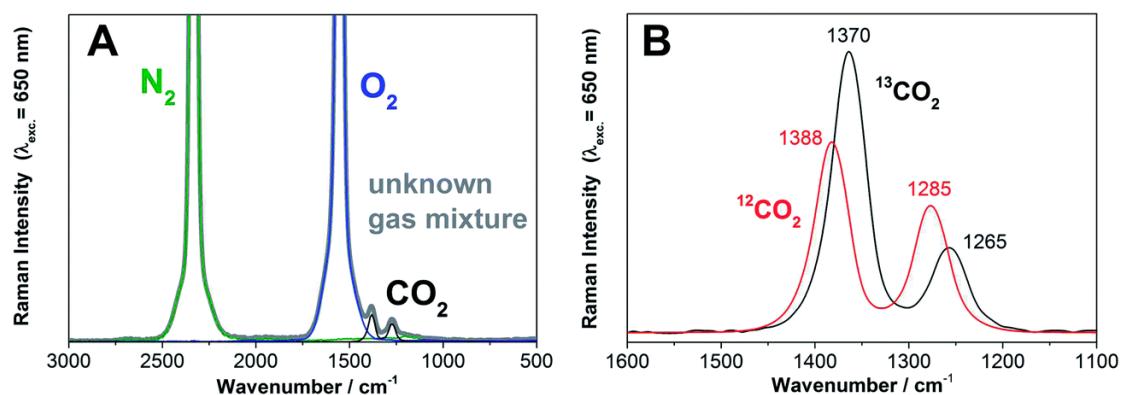
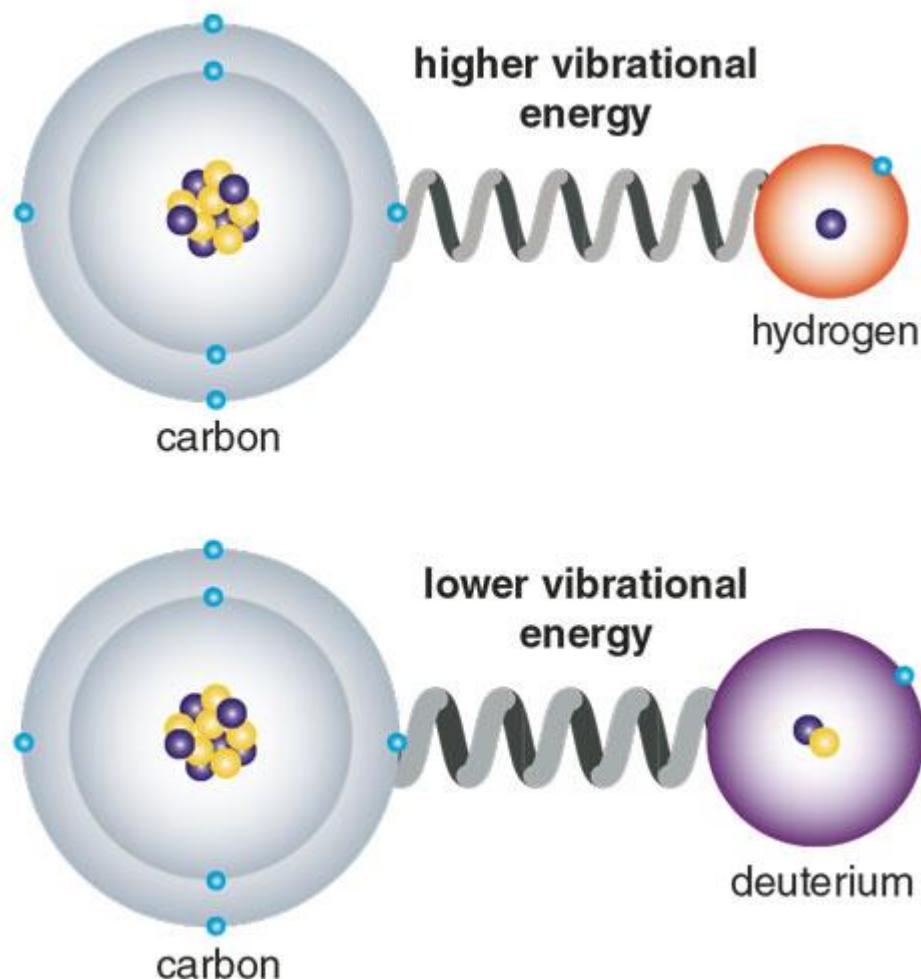
### Experiência:

A matéria em estudo é excitada por luz laser, onda eletromagnética (campo elétrico)

- Força elétrica = Carga \* Campo Elétrico
- Excita os núcleos atómicos, porque possuem carga elétrica positiva.
- Quando a frequência do laser produz ressonância, obtém-se os modos normais.

### Teoria:

- Modelos fenomenológicos – parâmetros ajustados aos valores experimentais dos modos normais
- Primeiros Princípios: Todas as quantidades medidas calculadas pela equação fundamental da Mecânica Quântica.





## Formulário MSF20022:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \left. \frac{dv_x}{dt} \right|_t \delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 v_x}{dt^2} \right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 v_x}{dt^3} \right|_t \delta t^3 + \sigma(\delta t^4)$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 \quad \int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$\vec{F}_{res} = -m D |\vec{v}| \vec{v} \quad \vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} |\vec{v}| \vec{v} \quad |\vec{F}_{rol}| = \mu |\vec{N}| \quad |\vec{F}_{impulsão}| = m_{fluido} g$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{F}_{elástica} = -k \vec{r}$$

$$\vec{F}_{elet} = -k_e \frac{q Q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{F}_{elet} = q \vec{E}_{elet}$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \quad E_p = m g y \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2 \quad E_p = -G \frac{m M}{|\vec{r}|}$$

$$P_o = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_{min}} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 E_p}{dx^3} \right|_{x_{min}} \delta x^3 + \sigma(\delta x^4)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad b_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A_a = \sqrt{x(0)^2 + ((v_x(0) + x(0)\frac{b}{2m})/\omega)^2} \quad \phi = \arctan [-(\frac{v_x(0)}{x(0)} + \frac{b}{2m})/\omega]$$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b \omega_f}{m}\right)^2}}$$

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

## Grandezas físicas e conversões:

$$\begin{aligned}
1 \text{ polegada} &= 1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm} & 1 \text{ pé} &= 1 \text{ ft} = 0,39370 \text{ m} & 1 \text{ milha} &= 1,609344 \text{ km} \\
1 \text{ rad} &= 57.29578 \text{ graus} & 1 \text{ kgf} & & & \\
1 \text{ cv (cavalo - vapor métrico)} &= 735,4975 \text{ W} & 1 \text{ hp (cavalo - vapor inglês)} &= 745,715 \text{ W} & & \\
M_{Sol} = M &= 1.989 \times 10^{30} \text{ kg} & 1 \text{ AU} &= 1.489 \times 10^{11} \text{ m} & 1 \text{ ano} &= 365,24 \text{ dias} \\
g = 9,80 \text{ m/s}^2 & & G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) &= 4\pi^2 \text{ AU}^3/(M \cdot \text{ano}^2) & R_{Terra} &= 6371 \text{ km} \\
1 \text{ kgf} &= 9,80 \text{ N} & \rho_{ar} &= 1.225 \text{ kg/m}^3 & v_{som} &= 340 \text{ m/s} \\
c &= 299792,458 \text{ km/s} = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} & & & & \\
k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8.61733 \times 10^{-5} \text{ eV/K} & & & & \\
\varepsilon_0 &= 8,854187817 \times 10^{-12} \text{ F/m} & k_e &= 1/4\pi\varepsilon_0 = 8,98755188 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 & & \\
m_e &= 9,10938356 \times 10^{-31} \text{ kg} & & & & \\
m_p &= 1,67262 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1836.151 m_e & & & & \\
m_n &= 1,67493 \times 10^{-27} \text{ kg} & 1 \text{ \AA} &= 10^{-10} \text{ m} & & \\
e &= 1,602176208 \times 10^{-19} \text{ C} & e/c &= 5,34428 \times 10^{-28} \text{ C} \cdot \text{m/s} & & 
\end{aligned}$$

## Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$$\begin{aligned}
e &= 2,71828183 & \pi &= 3,14159265 \\
\sin(-x) &= -\sin(x) & \sin(\pi - x) &= \sin(x) & \sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \pm \cos(x) \\
\cos(-x) &= +\cos(x) & \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \mp \sin(x) \\
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \\
\cos x \sin y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)] \\
\sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x & \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \\
\sin x \pm \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 & \tanh(x) &= \sinh(x) / \cosh(x)
\end{aligned}$$

## Sistema Internacional de Unidades (SI):

### Quantidades básicas

Quantidade	unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K
Corrente elétrica	ampere	A

Outras quantidades importantes

Quantidade	unidade	Símbolo
Velocidade	metro/segundo	m/s
Aceleração	metro/segundo <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Força	kilograma × metro/segundo <sup>2</sup> = newton	N
Energia	kilograma × metro <sup>2</sup> /segundo <sup>2</sup> = joule	J
Potência	kilograma × metro <sup>2</sup> /segundo <sup>3</sup> = watt	W

### Sistema Astronómico de unidades

Grandeza	Símbolo	Definição	Valor no SI	Conversão do SI
Massa	M	Massa do Sol	$1,989 \times 10^{30}$ kg	$1 \text{ kg} = 5,028 \times 10^{-31} \text{ M}$
Distância	AU	Distância média da Terra ao Sol	$1,498 \times 10^{11}$ m	$1 \text{ m} = 6,676 \times 10^{-12} \text{ AU}$
Tempo	ano	Período da Terra em volta do Sol	$3,15 \times 10^7$ s	$1 \text{ s} = 3,17 \times 10^{-8} \text{ ano}$

Neste sistema, a constante de gravitação é

$$G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = 6.67408 \times 10^{-11} \frac{(6.676 \times 10^{-12} \text{ AU})^3}{5.028 \times 10^{-31} \text{ M} (3.17 \times 10^{-8} \text{ ano})^2} = 4\pi^2 \text{ AU}^3/(\text{M} \cdot \text{ano}^2),$$

a unidade de energia é  $5.50 \times 10^{38}$  J e a unidade de velocidade é 4718.48 m/s.

### Quantidades experimentais do sistema solar.

	Massa (kg)	Período sideral (1 ano=365,24 dias)	Distância média ao Sol (semi-eixo maior)	Excentricidade	Inclinação eclíptica (grau)
			( $10^{11}$ m) (AU)		
Mercúrio	$3,301 \times 10^{23}$	0,2408	0,3871	0,2056	7,004
Vénus	$4,669 \times 10^{24}$	0,6151	0,723	0,0068	3,394
Terra	$5,978 \times 10^{24}$	1	1,496	1	0,0167
Marte	$6,420 \times 10^{23}$	1,881	2,279	1,523	0,0934
Júpiter	$1,899 \times 10^{27}$	11,86	7,783	5,203	0,0481
Saturno	$5,685 \times 10^{26}$	29,46	14,27	9,54	0,0533
Urano	$8,686 \times 10^{25}$	84,02	28,69	19,18	0,0507
Neptuno	$1,025 \times 10^{26}$	164,8	44,98	30,07	0,0040
Sol	$1,989 \times 10^{30}$				
Lua	$7,353 \times 10^{22}$		384 400 km à Terra	0,055	5,144
Plutão	$5 \times 10^{23}$	248	59,00	39,44	0,2533
					17,142

## Soluções de problemas

### Cap. 7

1. a)  $v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)$  b) 4 m; 0; c) 8 J

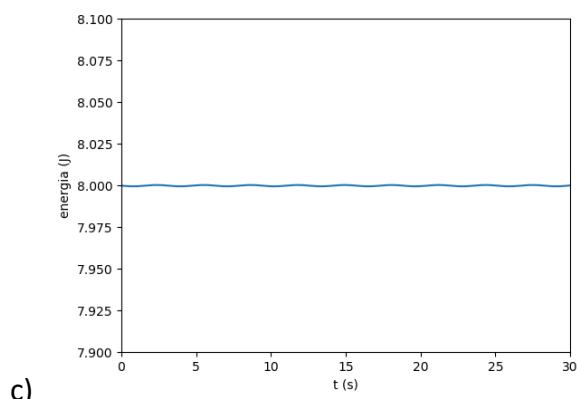
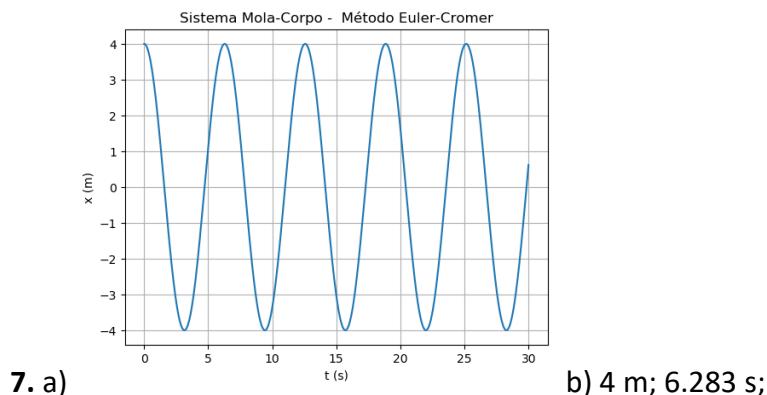
2. a)  $v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}} \cos(\omega t + \varphi)$  b) 4 m;  $\frac{3}{2}\pi$ ; c) 8 J

3. a)  $v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$  b)  $C=4$  m e  $D = 0$ ; c) 8 J

4.  $\begin{cases} C = A \sin \varphi \\ D = A \cos \varphi \end{cases}$  e  $\begin{cases} A^2 = C^2 + D^2 \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{D} \end{cases}$

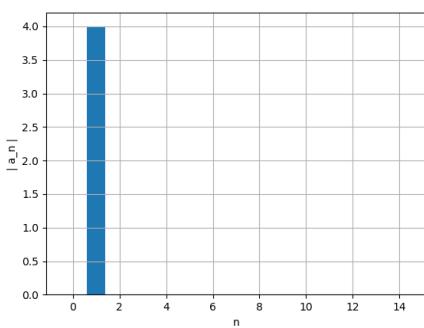
5. a) 40 cm/s; 160 cm/s<sup>2</sup>; b)  $\pm 32$  cm/s; -96 cm/s<sup>2</sup>; c) 0.232 s

6. a) 4m, 0 rad; b) 4.472 m, 0.463 rad; c) 4.472 m, 5.820 rad; d) 2 m,  $\frac{\pi}{2}$  rad



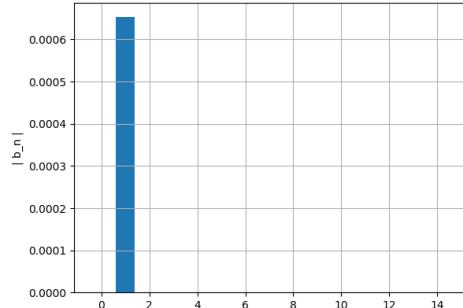
A energia mecânica é constante ao

longo do tempo.



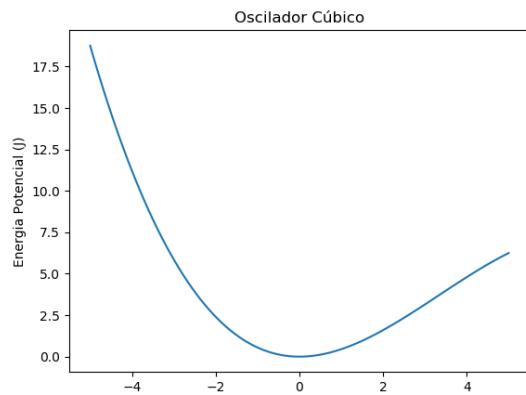
d)

$$a_1 \cos(\omega t) + 0$$



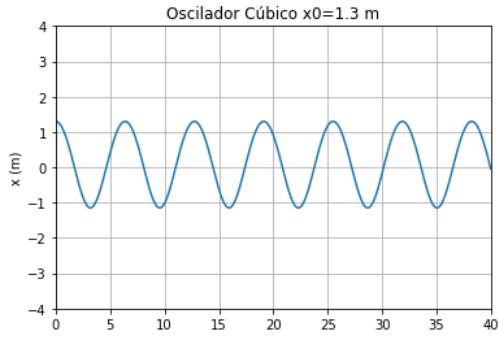
$$x(t) =$$

8.



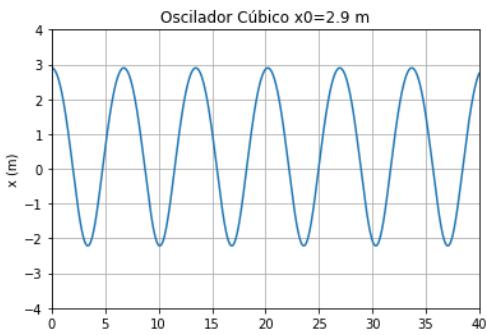
9. a)

Movimento periódico



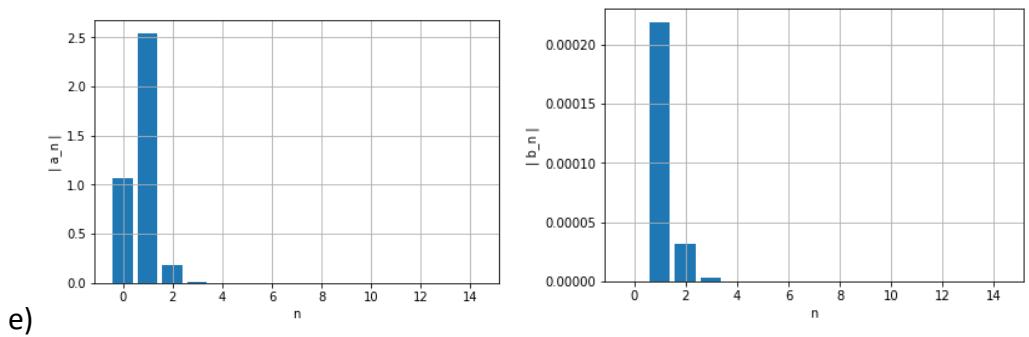
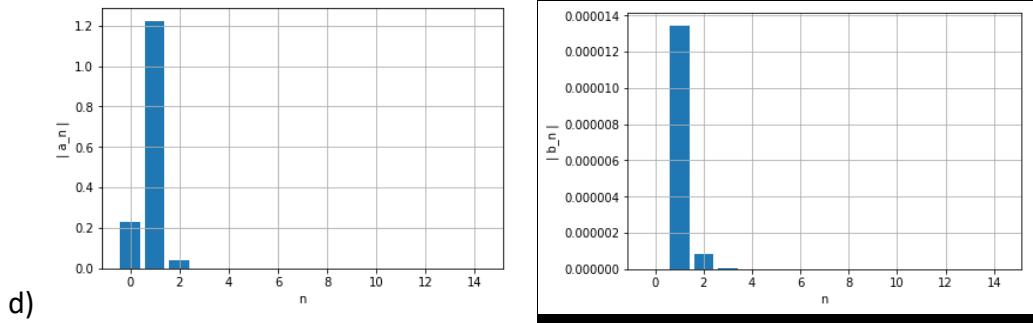
b)

0.735 J; 1.30 m e -1.15 ; 0.157 Hz;

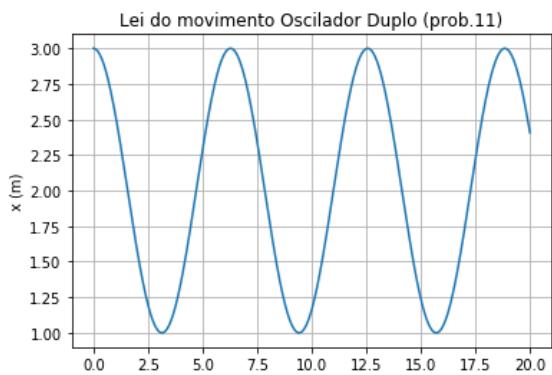


c)

2.99 J; 2.90 m e -2.21 m; 0.149 Hz;

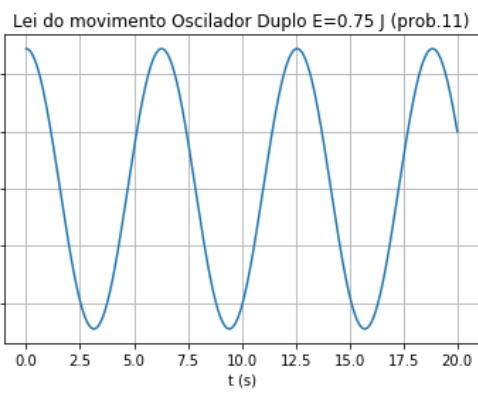


10. a) 2.007 s; b) 2.008 s; c) 2.011 s; d) 2.016 s; e) 2.022 s; f) 2.042 s



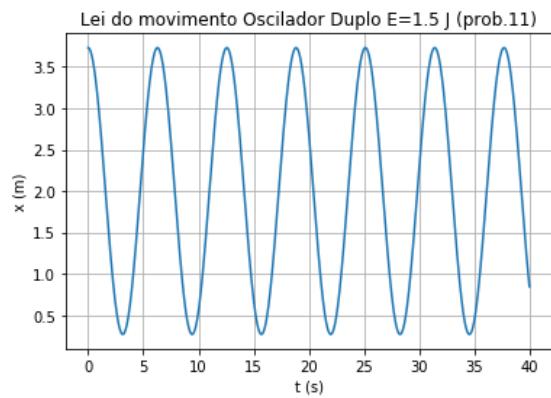
11. a) 0.5 J; b)

6.283 s;



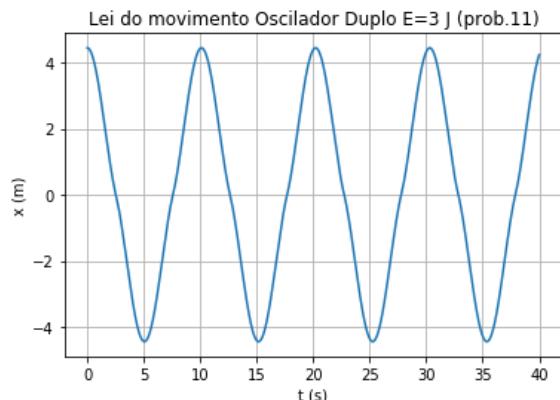
c)

3.224 e 0.775 m; 0.159 s



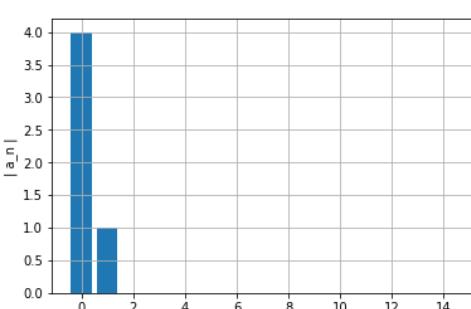
d)

3.732 e 0.268 m; 0.159 Hz

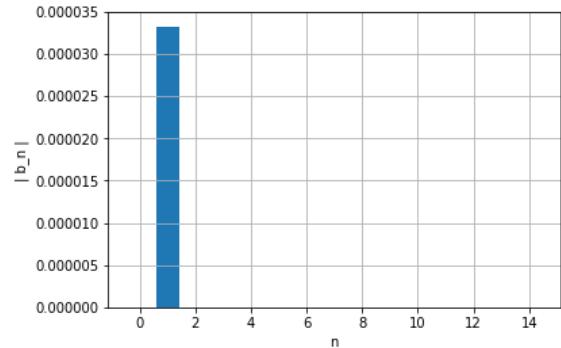


e)

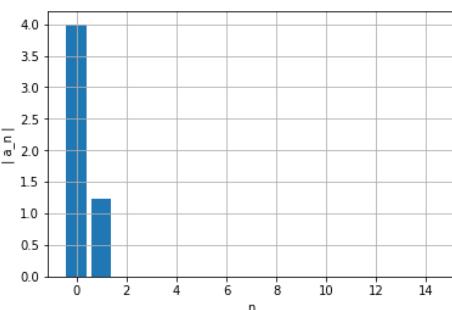
4.449 e - 4.449m; 0.0990 Hz



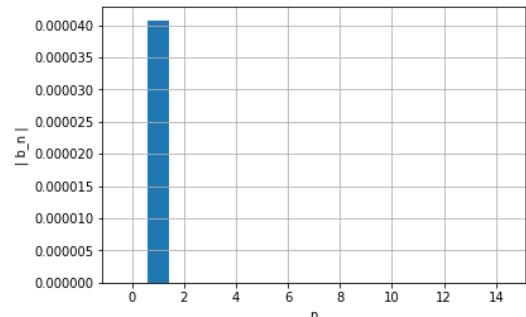
f)

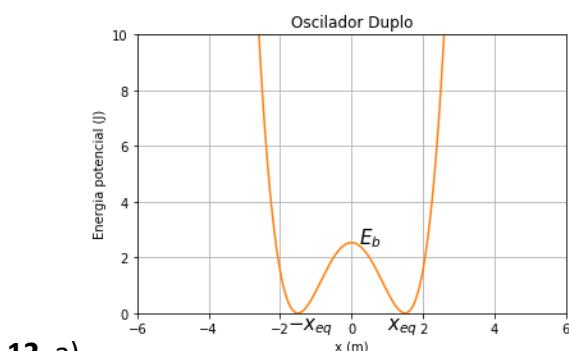
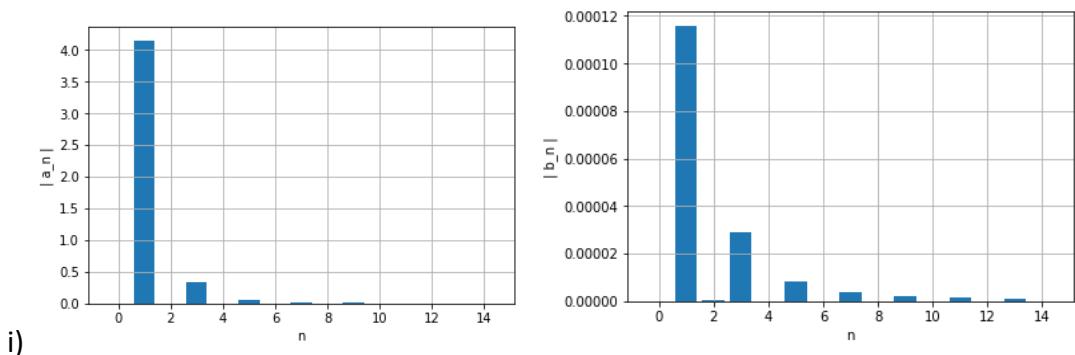
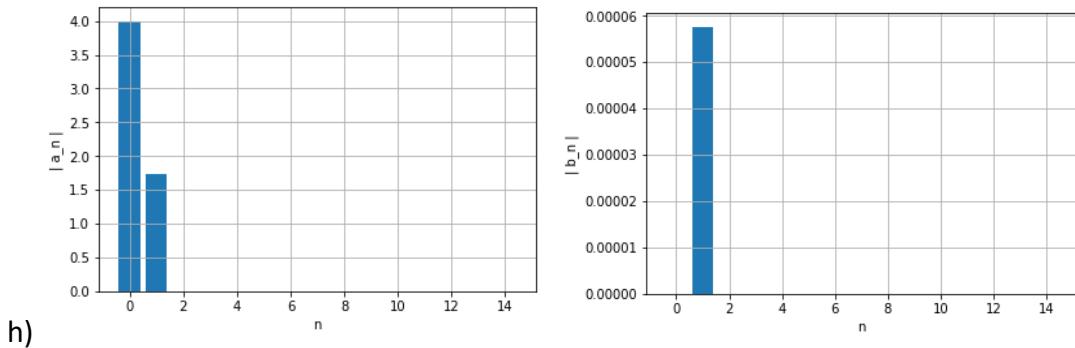


f)

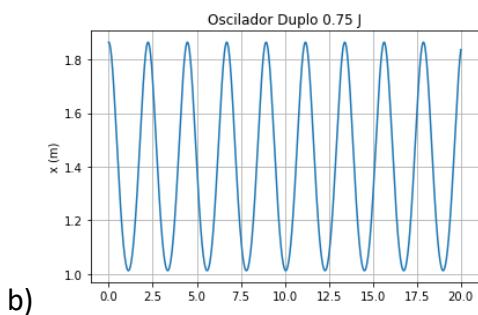


g)

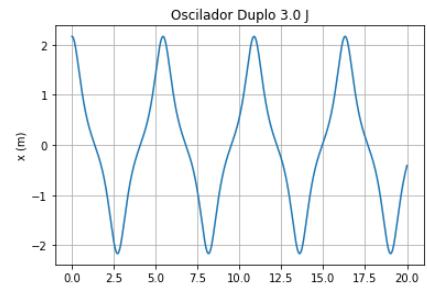




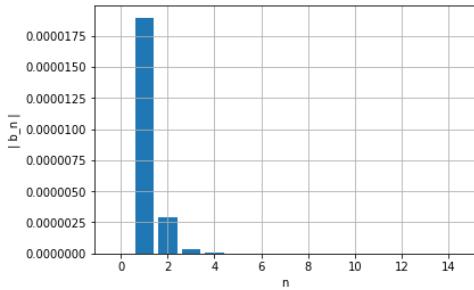
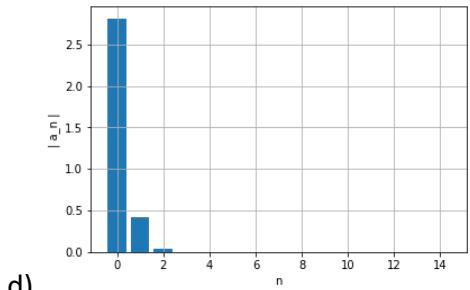
12. a) Movimento oscilatório periódico à volta do ponto  $x_{eq}=1.5$  m



1.86 m e 1.01 m; 0.448 Hz

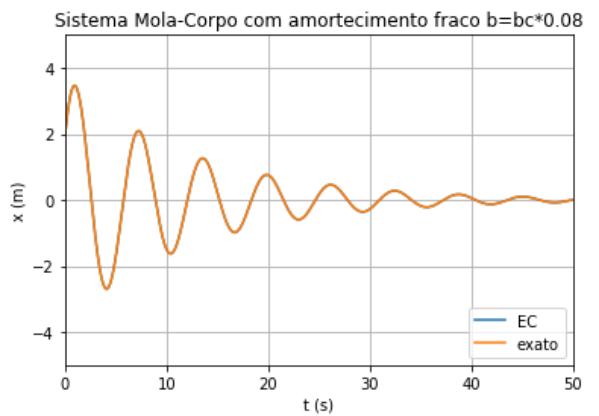


2.17 m e -2.17 m; 0.184 Hz

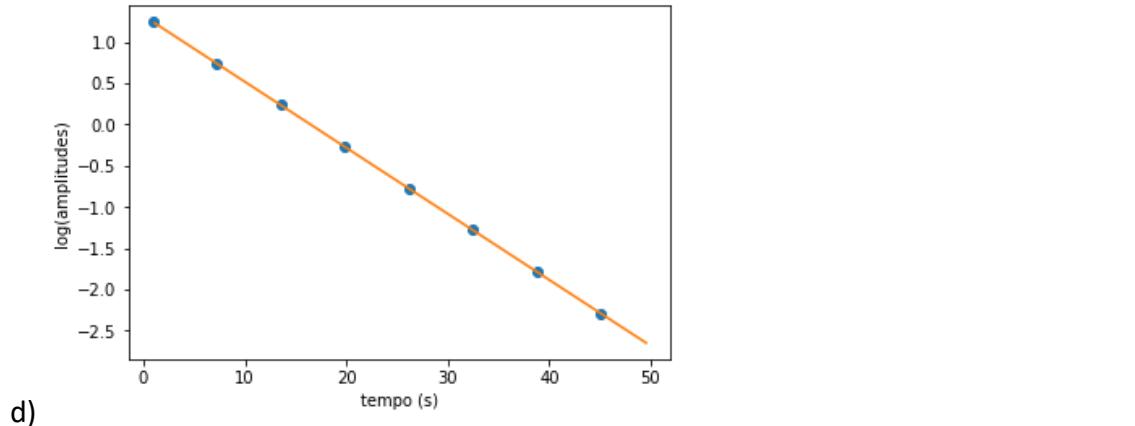


e)

13. a)  $E_c = E_p = 0.25 \text{ J}$ ; b)  $t = \frac{\pi}{40} \text{ s}$ ; c)  $x = 0.070710 \text{ m}$ ; c)  $-0.4323 \text{ J}$



**14.** a) 1.000 rad/s ; b) 0.9968 rad/s; c)



d)

$$\text{Ordenada na origem } 1.318 \Rightarrow A_a = 3.736 \text{ m}$$

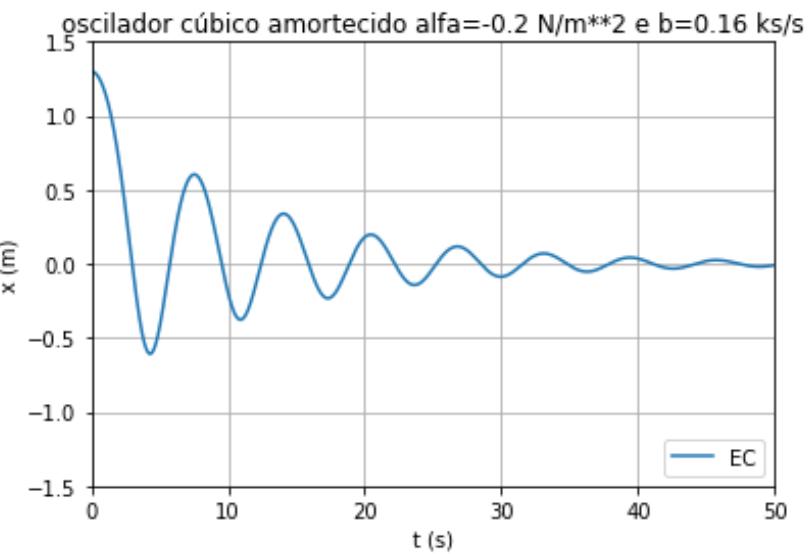
$$\text{declive} = -0.08000 \text{ s}^{-1} \Rightarrow A(t) = A_a e^{-0.08000 t}$$

$$\text{lei proveniente da solução numérica} \quad A(t) = 3.736 e^{-0.08000 t} \text{ m.}$$

Lei proveniente da solução analítica

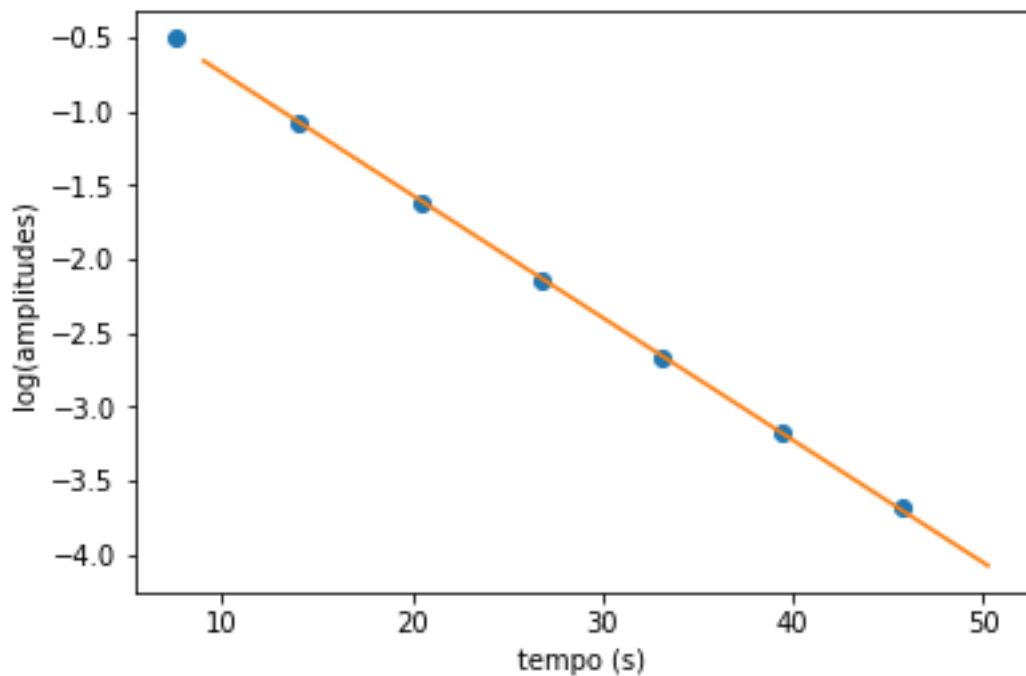
$$\frac{b}{2m} = 0.08 \quad \text{e} \quad A_a = 3.736 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad A(t) = 3.736 e^{-0.08000 t}$$

O resultado numérico e o analítico coincidem



15. a)

;

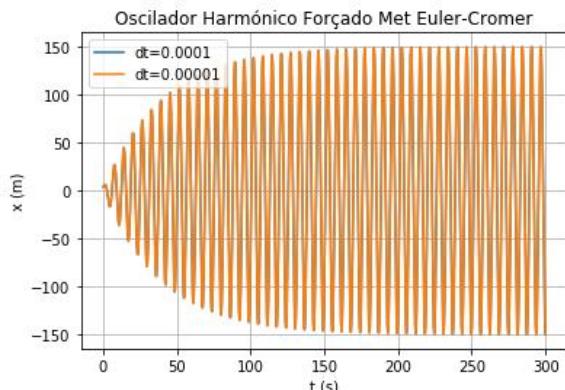


b)

declive -0.0828

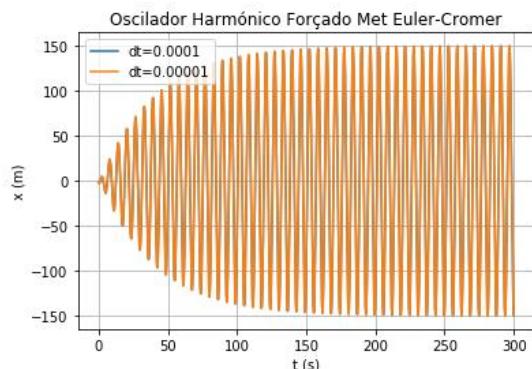
ordenada na origem 0.0894      lei  $A(t) = 1.094 e^{-0.0894 t}$  m.

## Cap. 8



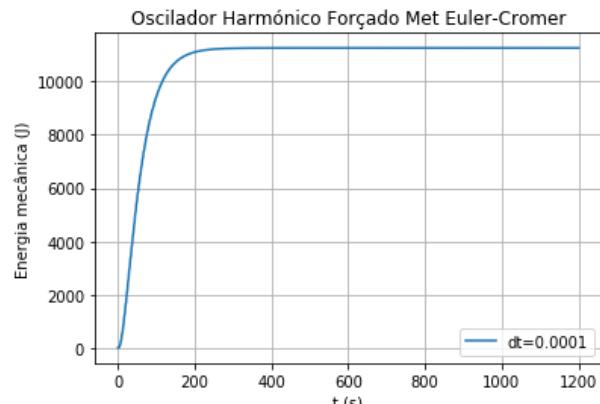
1. a)

Temos confiança, porque a lei do movimento obtida por dois passos temporais diferentes é a mesma. Como também os dois passo temporais produzem o mesmo resultado para o tempo final considerado  $t = 300.00000$  s  $x = -149.881$  m; b) 150.00 m; 6.283 s



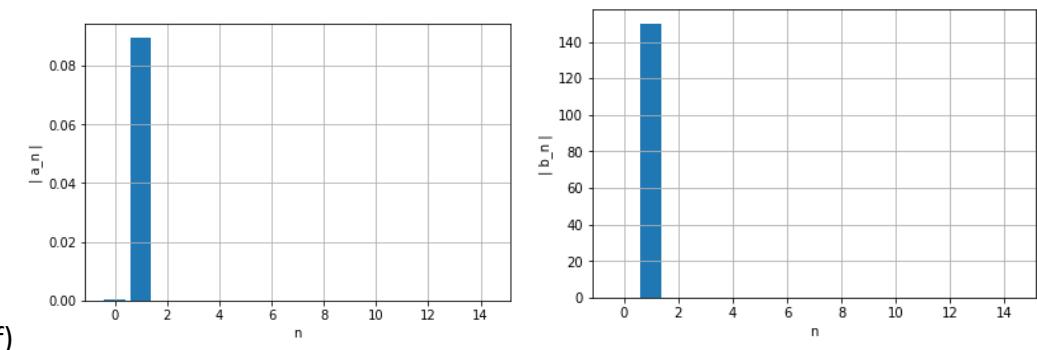
c)

d) 150.00 m; 6.283 s;



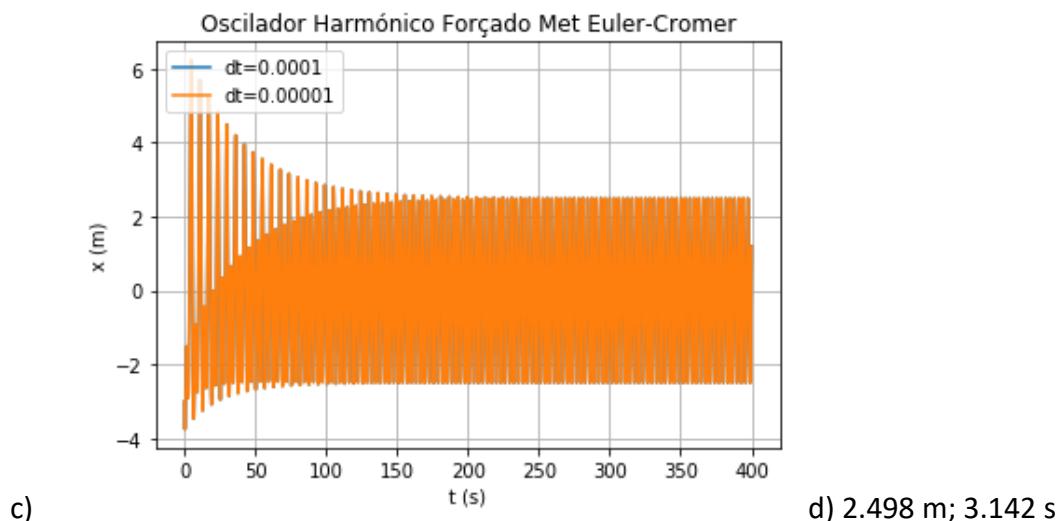
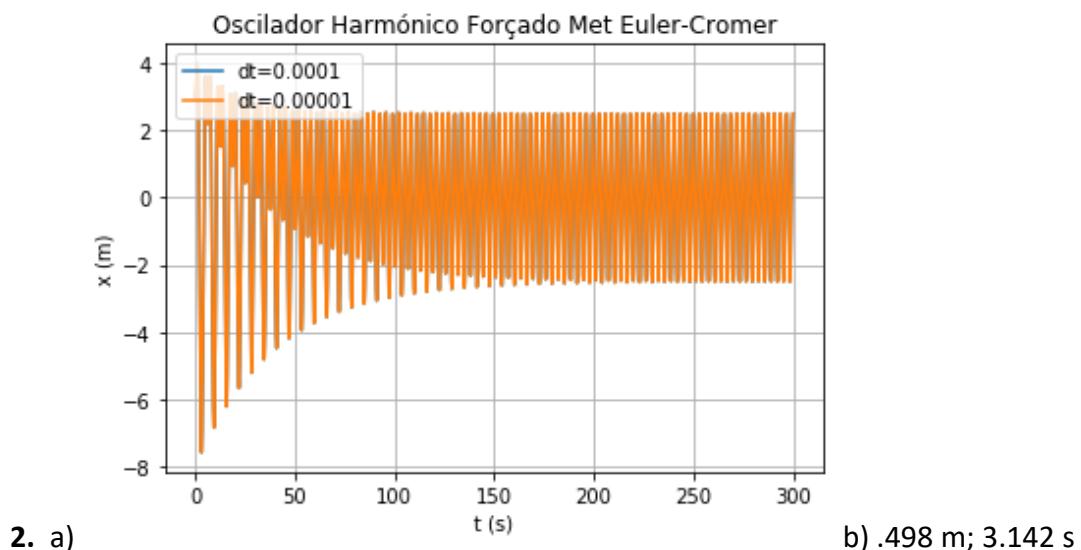
e)

Não conserva a energia mecânica

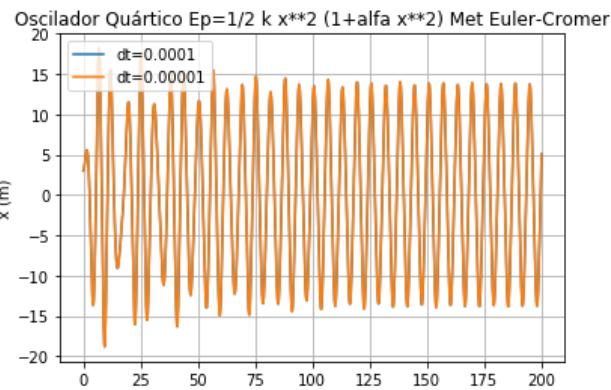


$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 150.00 \text{ m.}$$

A solução estacionária apresenta iguais valores dos coeficientes de Fourier, o que mostra que as duas soluções estacionárias são iguais, independente dos valores iniciais.



### 3. $0.9230 \text{ rad/s}$ e $1.0714 \text{ rad/s}$

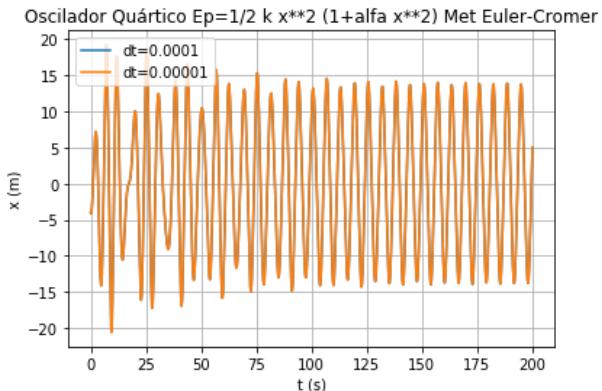


4. a)

Sim! Confiança porque a solução

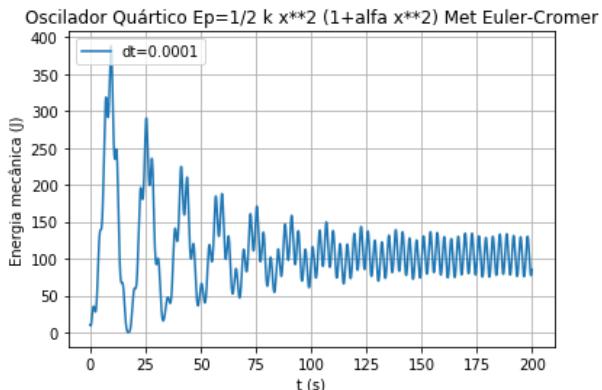
é idêntica para passos temporais diferentes.

b)  $13.791 \text{ m}$ ;  $6.283 \text{ s}$



c)

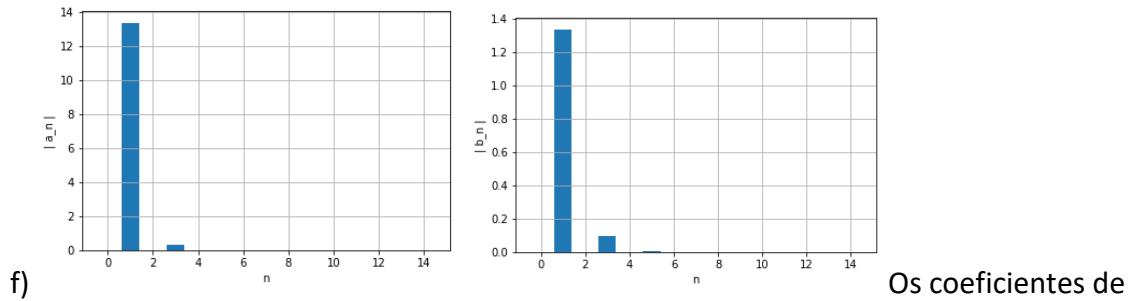
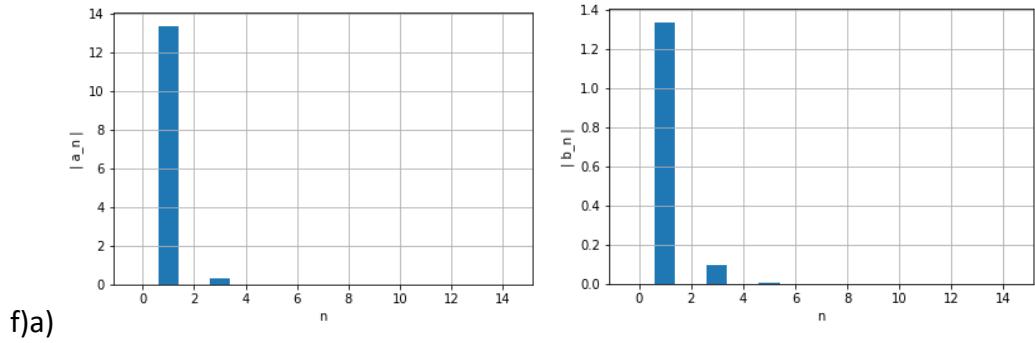
d)  $13.791 \text{ m}$ ;  $6.283 \text{ s}$



e)

Não é. O sistema recebe energia

realizada pela força externa e dissipava energia devido à resistência do meio.

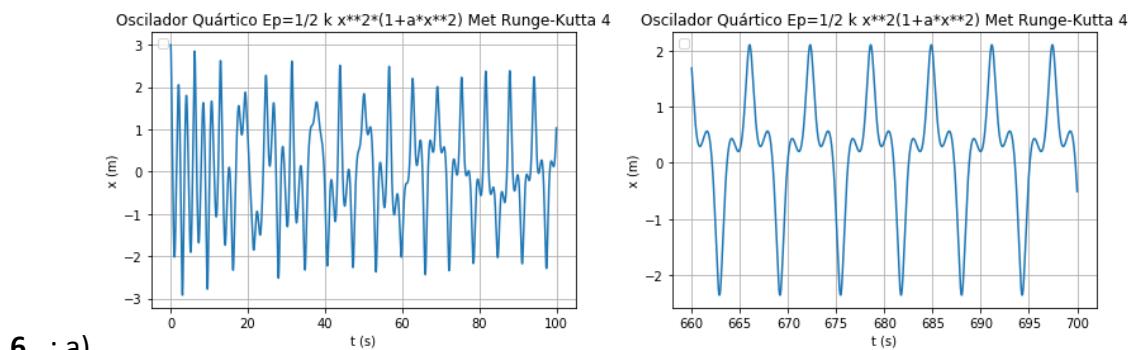


Os coeficientes de

Fourier são iguais nos dois casos, o que mostra que a lei do movimento é igual nos dois casos, no regime estacionário.

## 5.

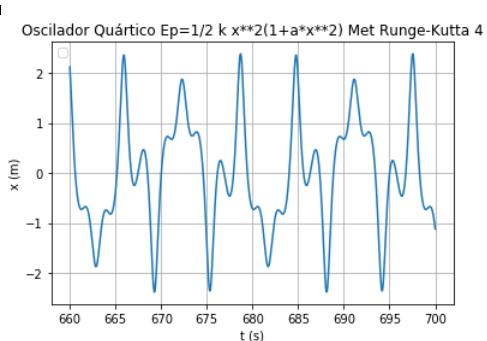
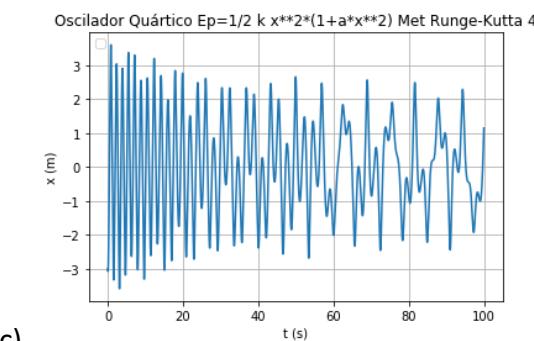
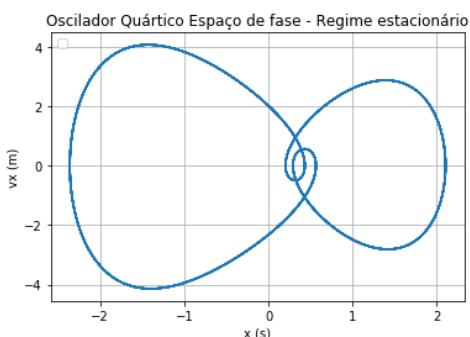
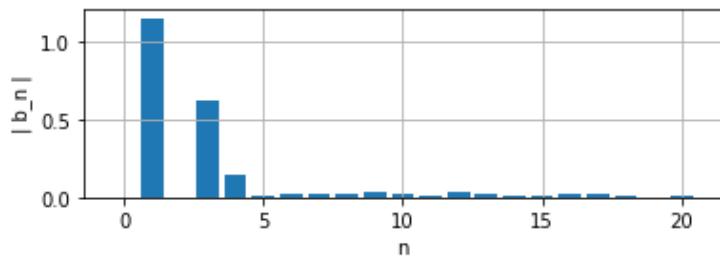
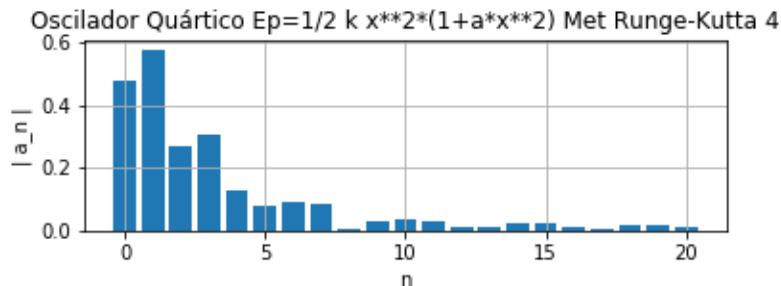
$\delta t$ (s)	$v_y(2 s)$ (m/s) Método de Euler (m)	$v_y(2 s)$ (m/s) Método de Runge-Kutta 4
0.1	6.7802962	6.75746827
0.01	6.7601201	6.75747944
0.001	6.7577469	6.75747944
0.0001	6.7575062	
0.00001	6.7574821	
exato	6.75747944	6.75747944



$dt=0.01$  s produz  $x(700$  s) = -1.1222008 m e

$dt=0.001$  s produz o mesmo resultado que o passo mais pequeno  $x(700$  s)= -1.1222008 m

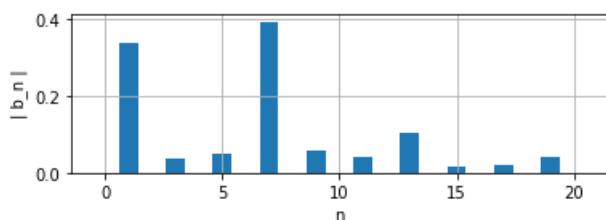
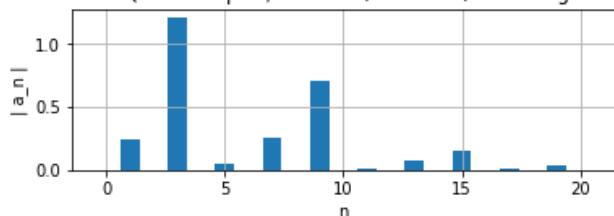
b) Regime estacionário de amplitudes 2.1066 m e -2.3606 m e período 12.57 s.



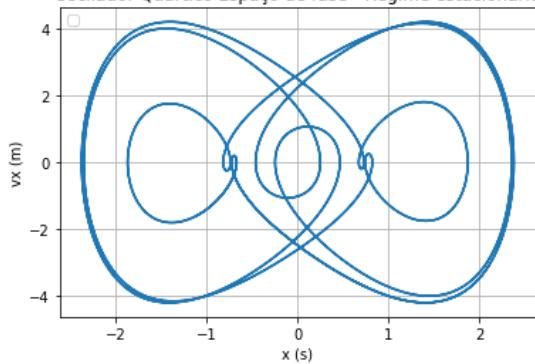
c)

d) Regime estacionário de amplitudes 2.3800 m e -2.3800 m e período 18.85 s.

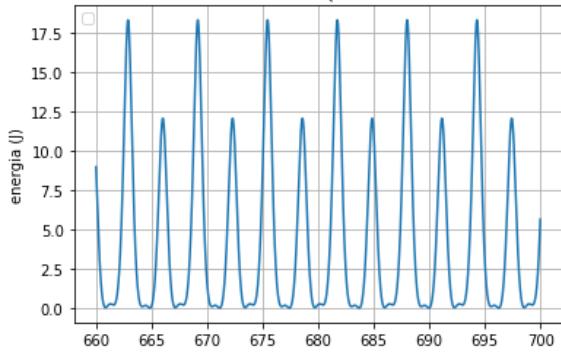
Oscilador Quártico  $E_p=1/2 k x^{**2}*(1+a*x^{**2})$  Met Runge-Kutta 4



Oscilador Quártico Espaço de fase - Regime estacionário

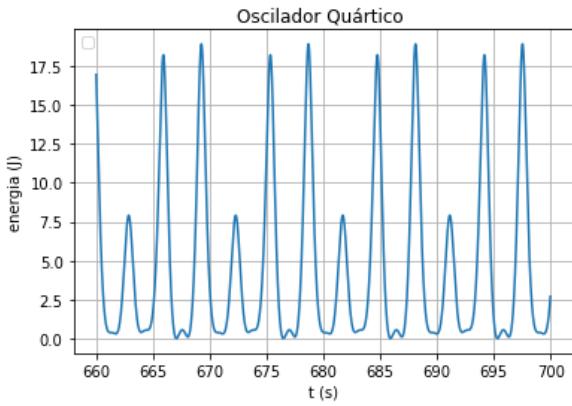


Oscilador Quártico



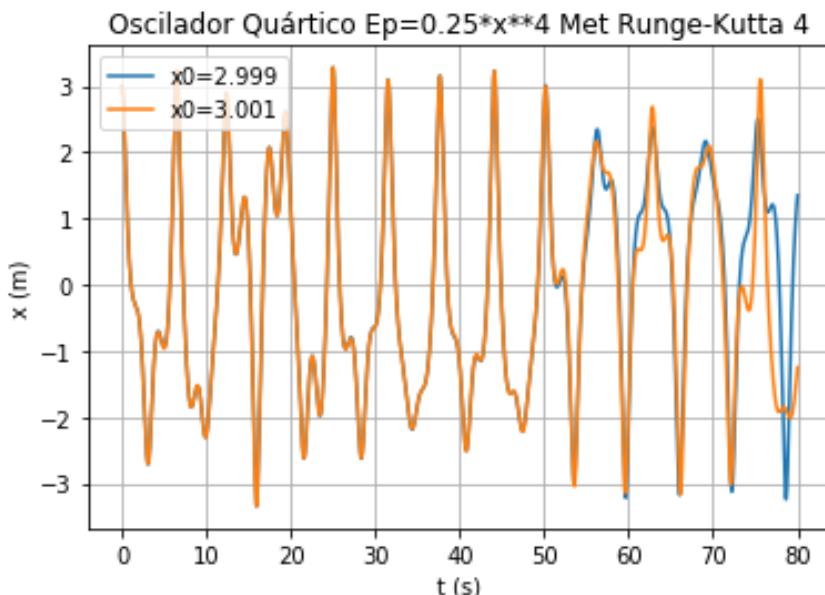
e)a),

e)c)



Não é constante.

- f) O sistema tem um comportamento transiente, no início, e passado algum tempo, apresenta um comportamento estacionário periódico. A solução do regime estacionário não é sinusoidal. E é dependente das condições iniciais.

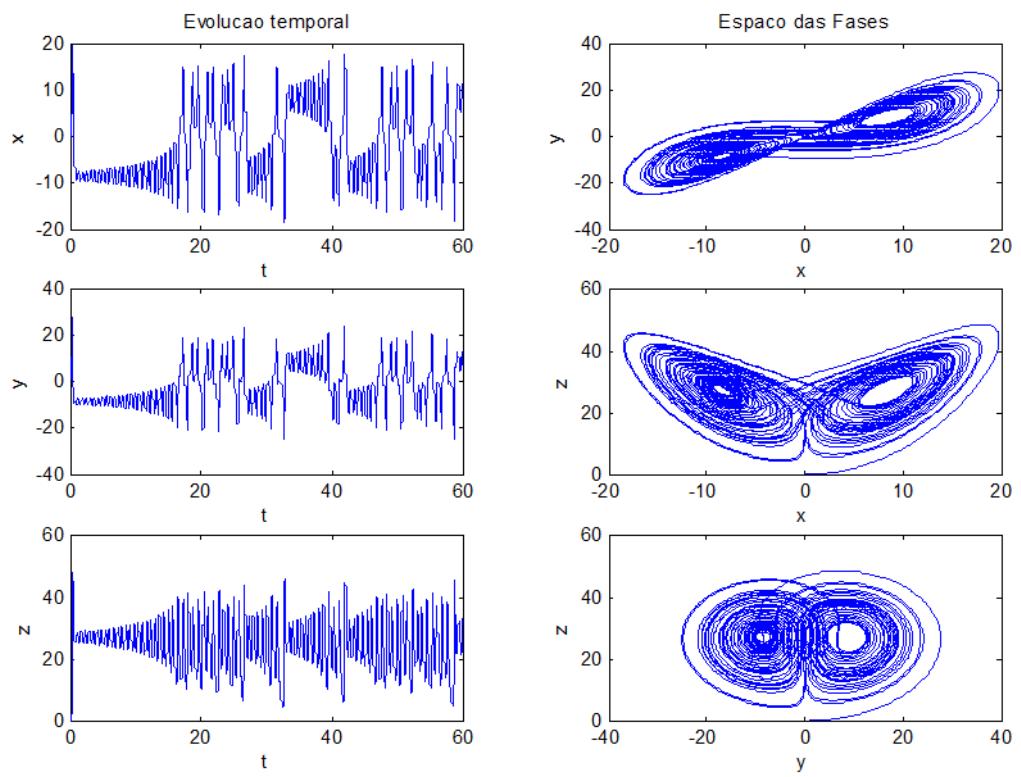


7. :

até  $\sim 73$  s.

8. a) Não b) Sim c) Sim d) Sim e) Não f) Sim g) Não

9.



## **Cap. 9**