Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

5ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 3 Forças e movimento
Cap. 4 Movimento no plano e no espaço

Bibliografia:
Cap. 3: Serway, cap. 3 e 5; Sørenssen, cap. 5 e 6; Villate, cap. 4
Cap. 4: Serway, cap. 4; Sørenssen, cap. 6; Villate, cap. 6

Força = massa × aceleração

2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ $\qquad$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.
A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo.
A massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

Se as forças aplicadas ao um objeto forem conhecidas,
pode-se determinar o movimento do objeto – a sua posição e velocidade.

Forças determinam-se por experiências
Ou por modelos teóricos, que aplicados aos dados experimentais, concordam com eles.

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ $\vec{r}(t) = (x, y, z)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$, $v_y(t) = \frac{dy}{dt}$, $v_z(t) = \frac{dz}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}$

<u>E se souber a aceleração instantânea? Sim, se soubermos as Forças aplicadas</u>

$$\begin{cases} F_x(t) = ma_x(t) \\ F_y(t) = ma_y(t) \\ F_z(t) = ma_z(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_x(t) = m\frac{dv_x(t)}{dt} \\ F_y(t) = m\frac{dv_y(t)}{dt} \\ F_z(t) = m\frac{v_z(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F}(t) = m\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

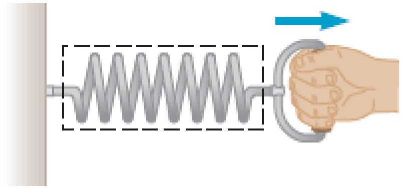
$\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ podem ser calculados

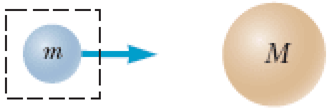
(i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

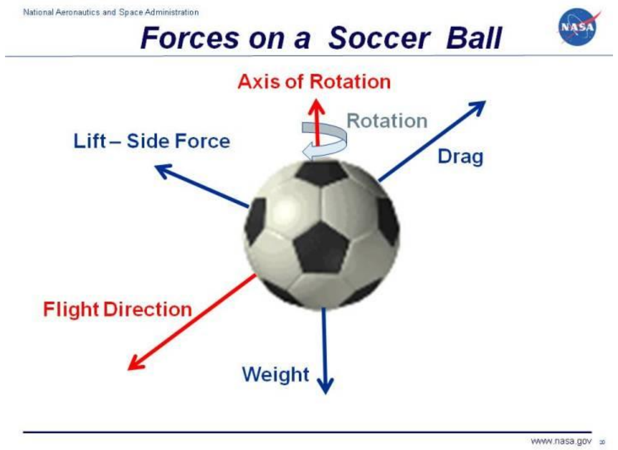
Cap. 3 Forças e vetores

O estudo e a previsão de trajetórias requer o conhecimento das Forças aplicadas ao objeto.

As forças são obtidas por realização de experiências e medições

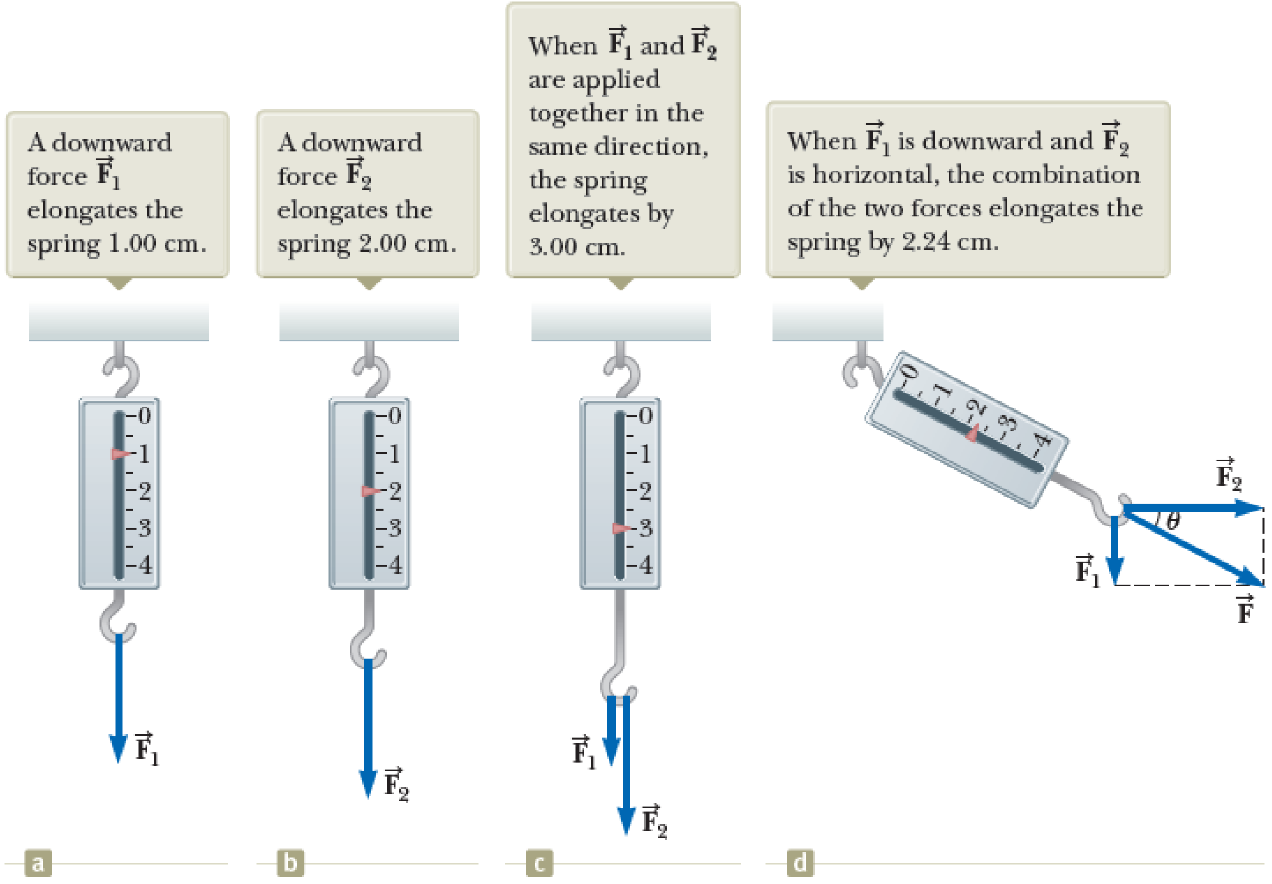






As forças são obtidas por realização de experiências e medições.

Exemplo: A mola e a força elástica



$$\begin{cases} F_x = -k\ x \\ F_y = -k\ y \\ F_z = -k\ z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = -k\vec{r}$$

Força de resistência do ar

Experiências no volante de badmington:

- Força oposta à velocidade $\vec{F} = -C(v)\,\hat{v}$ $\quad \vec{v} = |\vec{v}|\hat{v} \quad \hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$
- Proporcional ao quadrado da velocidade $|\vec{F}| \propto |\vec{v}|^2$

$$\vec{F} = -m\,D|\vec{v}|^2\hat{v}$$

<u>A 1D</u>: $\vec{v} = v_x\,\hat{\imath}$

$$|\vec{v}\,| = |v_x| \qquad \hat{v} = \frac{v_x}{|v_x|}\hat{\imath}$$

$$F_x = -m\,D|v_x|^2\frac{v_x}{|v_x|} = -m\,D|v_x|v_x$$

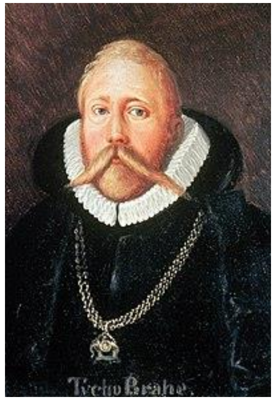
Expressão válida para qualquer sentido do eixo e sentido da velocidade.

Gravidade revela-se como:

- Força entre corpos celestes (planetas, estrelas, cometas, asteroides) e satélites e sondas espaciais
- Peso

Força entre corpos celestes:

- Observação experimental de Tycho Brahe:



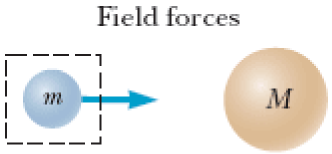
Tycho Brahe 1546-1601

- 3 Leis de Kepler das leis planetárias (em concordância com as observações experimentais de Tycho Brahe:
  - planetas com órbitas elíticas
  - o segmento que une cada planeta ao sol, varre áreas iguais em tempos iguais.
  - o quadrado do período de translação de um planeta
    é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita


Joahannes Kepler 1571-1630

- Lei da gravidade de Newton (prevê as leis de Kepler)

Força atrativa
Na direção dos dois corpos



$$\left|\vec{F}_{grav}\right| = G\,\frac{m\,M}{d^2},$$

$$G = 6.67259\ \times 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2$$

d distância entre 2 corpos

$$\vec{F}_{grav} = G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\ \hat{r}$$

$$|\vec{r}| = d,$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Gravidade revela-se como:

- Força entre corpos celestes (planetas, estrelas, cometas, asteroides) e satélites e sondas espaciais
- Peso

Peso:

Força vertical,
aponta para baixo
$\left|\vec{P}\right| = m\,|\vec{g}|$, $|\vec{g}| = g = 9.80$ m/s² aceleração da gravidade

$\vec{P}$ é a força gravítica que a Terra exerce em qualquer corpo de massa m.

R_T Distância do corpo (na superfície da Terra) até ao centro da Terra

$$\left|\vec{F}_{grav}\right| = G\,\frac{m\,M_{Terra}}{{R_T}^2}$$

$$\left|\vec{P}\right| = m\,|\vec{g}|$$

$$|\vec{g}| = G\,\frac{M_{Terra}}{{R_T}^2}$$

$G = 6.67259\ \times 10^{-11}$ N·m2/kg2

$M_{Terra} = 5.98\ \times 10^{24}$ kg (valor médio)

$R_T = 6.37 \times 10^{6}$ m

$$G\,\frac{M_{Terra}}{{R_T}^2} = 9.83 \text{ m/s}^2$$

Charles-Augustin de Coulomb
1736-1806

- Lei elétrica entre duas cargas, q e Q (por experiências e medições)
  Força atrativa entre cargas de sinais opostos e repulsiva entre cargas de igual sinal
  Na direção das duas cargas

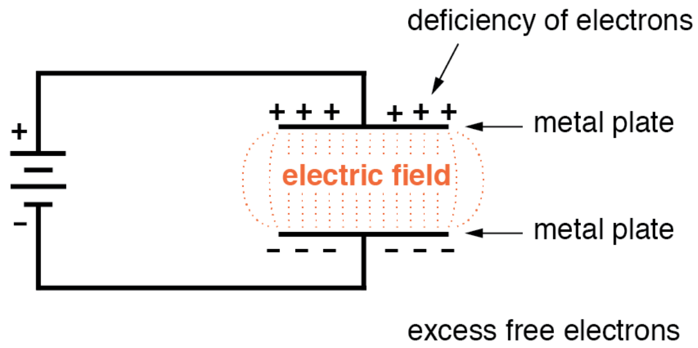
$$\left|\vec{F}_{elét}\right| = K\frac{q\,Q}{d^2},$$

$K = 8.987551 \times 10^9$ N·m²/C² (constante de Coulomb)

d distância entre 2 cargas

- Força elétrica aplicada a um corpo de carga elétrica q , num campo elétrico $\vec{E}_{elét}$

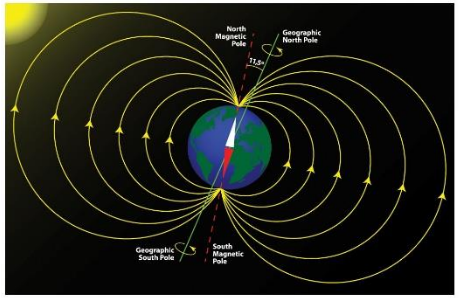
$$\vec{F}_{elét} = q\,\vec{E}_{elét}$$



Charles-Augustin de Coulomb
1736-1806

- Força magnética aplicada a um corpo de carga elétrica q , num campo magnético $\vec{B}_{mag}$

$$\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v}\, \times \vec{B}_{mag}$$



Força normal $\vec{N}$ ou $\vec{n}$ é uma força de contato
perpendicular à superfície, e oposto.
intensidade variável, a necessária para equilibrar o livro
(impede o livro de cair e de entrar dentro da mesa)

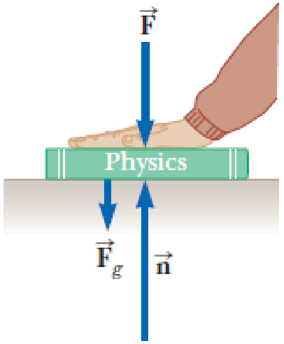


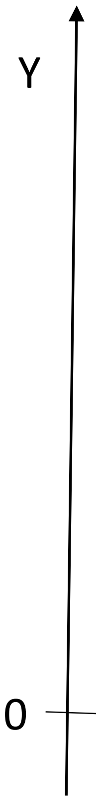
Figure 5.9 When a force $\vec{F}$ pushes vertically downward on another object, the normal force $\vec{n}$ on the object is greater than the gravitational force: $n = F_g + F$.

Forças aplicadas ao livro:
Peso: $\vec{P}$ ou $\vec{F_g}$
Normal: $\vec{n}$
Força exercida pela mão: $\vec{F}$

Não existe movimento: $\vec{P} + \vec{n} + \vec{F} = 0$

ou $\vec{n} = \vec{F} - \vec{P}$

Força normal $\vec{N}$ ou $\vec{n}$ é uma força de contato
perpendicular à superfície, e oposto.
intensidade variável, a necessária para equilibrar o livro
(impede o livro de cair e de entrar dentro da mesa)



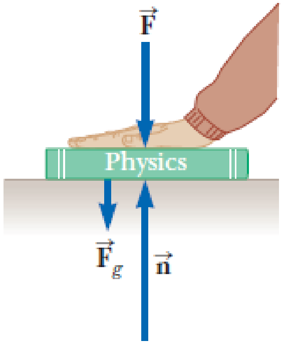


Figure 5.9 When a force $\vec{F}$ pushes vertically downward on another object, the normal force $\vec{n}$ on the object is greater than the gravitational force: $n = F_g + F$.

Qual a força normal aplicada ao livro (em função do peso e da força exercida pela mão)?
Forças aplicadas ao livro:

Peso: $\vec{P}$ ou $\vec{F_g}$

Normal: $\vec{n}$

Força exercida pela mão: $\vec{F}$

Não existe movimento: $\vec{P} + \vec{n} + \vec{F} = 0$ => $\vec{n} = -\vec{F} - \vec{P}$

<u>Projetando</u> no eixo OY

$$n_y = -F_y - P_y$$

$$+|\vec{n}| = -(-|\vec{F}|) - (-|\vec{P}|)$$

$$|\vec{n}| = |\vec{F}| + |\vec{P}|$$

Força Tensão

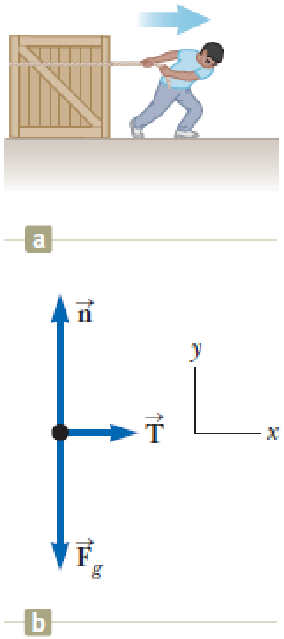


Figure 5.8 (a) A crate being pulled to the right on a frictionless floor. (b) The free-body diagram representing the external forces acting on the crate.

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ $\vec{r}(t) = (x, y, z)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$, $v_y(t) = \frac{dy}{dt}$, $v_z(t) = \frac{dz}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}$

E se souber a aceleração instantânea? Sim, se soubermos as Forças aplicadas

$$\begin{cases} F_x(t) = m a_x(t) \\ F_y(t) = m a_y(t) \\ F_z(t) = m a_z(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_x(t) = m \frac{dv_x(t)}{dt} \\ F_y(t) = m \frac{dv_y(t)}{dt} \\ F_z(t) = m \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}(t) = m\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ podem ser calculados

(i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Prob. 3.20

Um carro desce, sem fricção, uma colina inclinada de ângulo θ , com o motor desligado. Calcule a aceleração que adquire nessa descida.

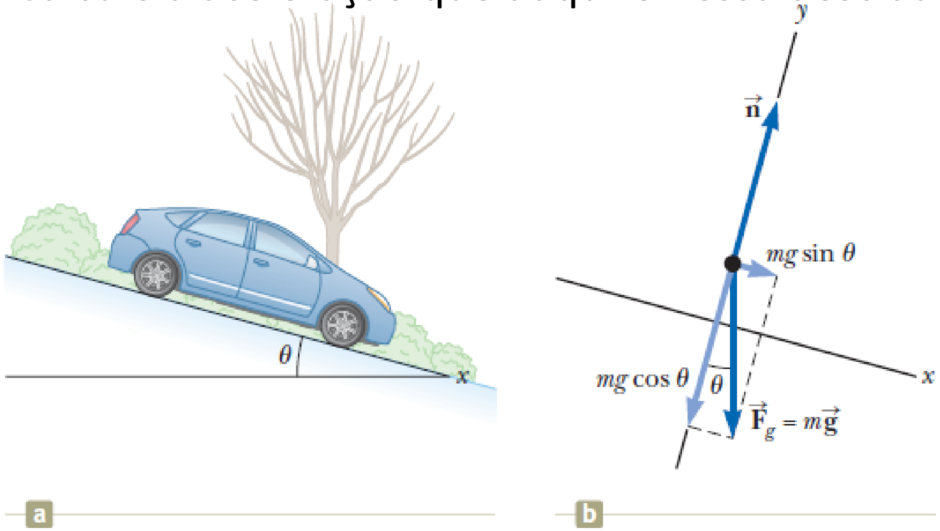


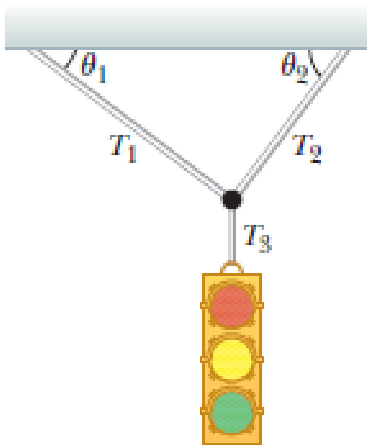
Figure 5.11 (Example 5.6) (a) A car on a frictionless incline. (b) The free-body diagram for the car. The black dot represents the position of the center of mass of the car. We will learn about center of mass in Chapter 9.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{n} = m\vec{a} \qquad \vec{F}_g = \vec{P}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x + n_x = ma_x \\ F_y = P_y + n_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = +m\,g\sin\theta + 0 = ma_x \\ F_y = -m\,g\cos\theta + |\vec{n}| = 0 \end{cases} \quad => \quad a_x = g\sin\theta$$

a força normal anula as forças na direção OY



- O semáforo não cai porque a força resultante é nula.
- $\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$
- 1ª lei de Newton

Cap. 4 Movimento no plano e no espaço

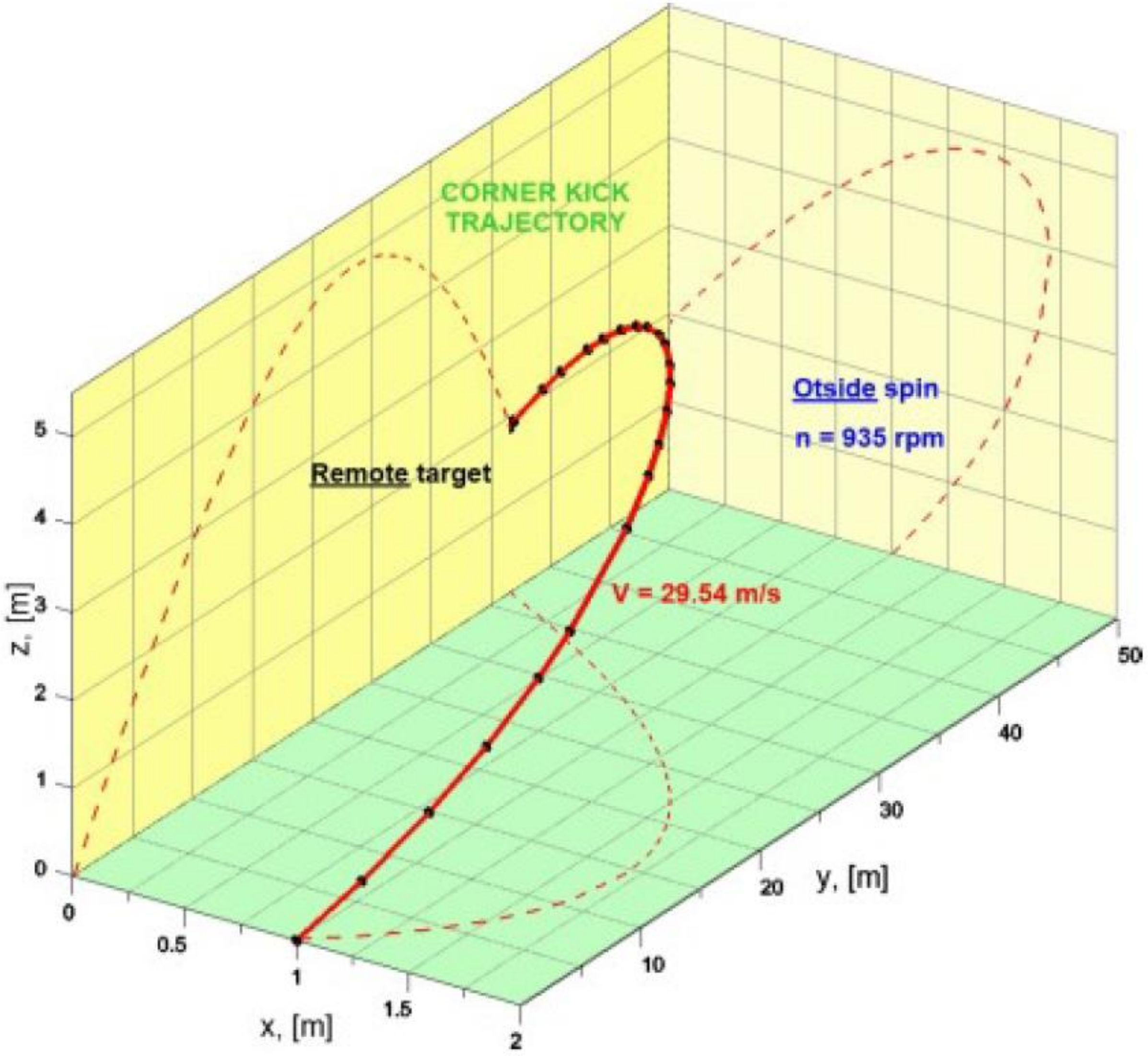


Fig. 10. Successful corner kick to remote target.

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

<u>E se souber a aceleração instantânea?</u>

Cálculo integral: $a_x(t)$

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt$$

Calculado (i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Cap. 4 Movimento a 3 dimensões

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ $\vec{r}(t) = (x, y, z)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$, $v_y(t) = \frac{dy}{dt}$, $v_z(t) = \frac{dz}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}$

<u>E se souber a aceleração instantânea? Sim, se soubermos as Forças aplicadas</u>

$$\begin{cases} F_x(t) = ma_x(t) \\ F_y(t) = ma_y(t) \\ F_z(t) = ma_z(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_x(t) = m\frac{dv_x(t)}{dt} \\ F_y(t) = m\frac{dv_y(t)}{dt} \\ F_z(t) = m\frac{v_z(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}(t) = m\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ podem ser calculados

(i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Prob. 3.20
Um carro desce, sem fricção, uma colina inclinada de ângulo θ , com o motor desligado.
Calcule a aceleração que adquire nessa descida.

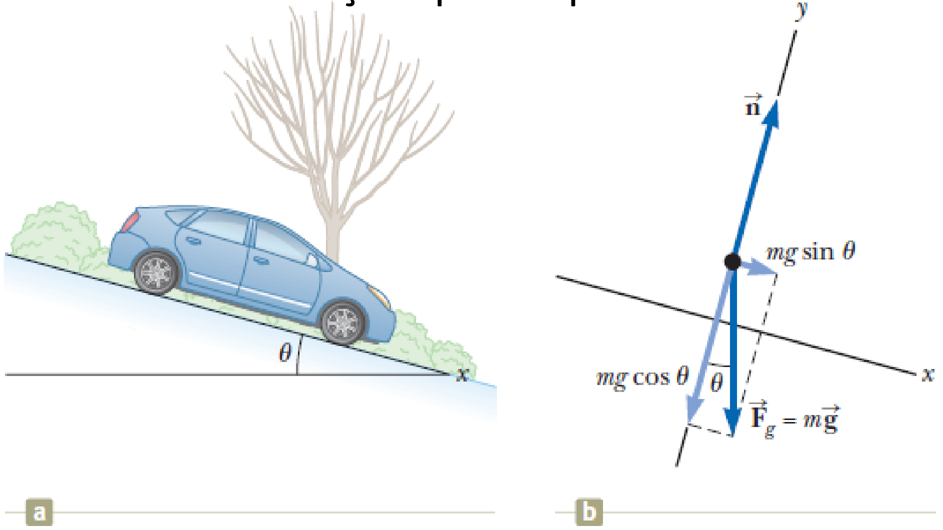


Figure 5.11 (Example 5.6) (a) A car on a frictionless incline. (b) The free-body diagram for the car. The black dot represents the position of the center of mass of the car. We will learn about center of mass in Chapter 9.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{n} = m\vec{a} \qquad \vec{F}_g = \vec{P}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x + n_x = ma_x \\ F_y = P_y + n_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = m\,g\sin\theta + 0 = ma_x \\ F_y = -\,m\,g\cos\theta + |\vec{n}| = 0 \end{cases} \quad => \quad a_x = g\sin\theta$$

a força normal anula as forças na direção OY

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

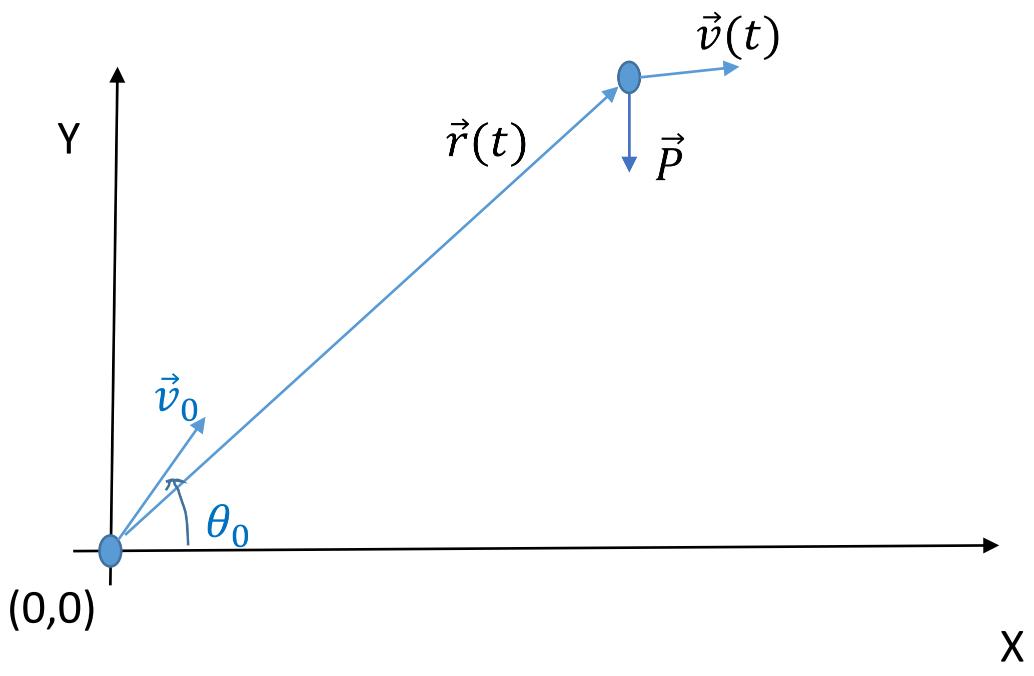
Modelo: O movimento ou a trajetória da bola é devido à bola estar sempre sujeita à força da gravidade.

Aproximação:
Num 1º estudo, não vamos considerar o efeito da resistência do ar, a rotação da bola, o efeito de altitude, impulsão, a rotação da Terra, …

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \text{ em que } \vec{F} = \vec{P}$$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo,
- na posição $\vec{r}_0$
- e inicia o seu movimento com
  uma velocidade $\vec{v}_0$,
  de rapidez (magnitude) $|\vec{v}_0|$
  e a fazer um ângulo θ_0 com a horizontal (solo)

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.



$\vec{r}_0 = (0,0)$

$\vec{v}_0 = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0 \,, |\vec{v}_0| \sin\theta_0)$

$$\vec{P} = m\,\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} P_x = ma_x \\ P_y = ma_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -|\vec{P}| = m\,a_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -mg = m\,a_y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad |\vec{P}| = mg$$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo,

- na posição $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$
- e inicia o seu movimento com

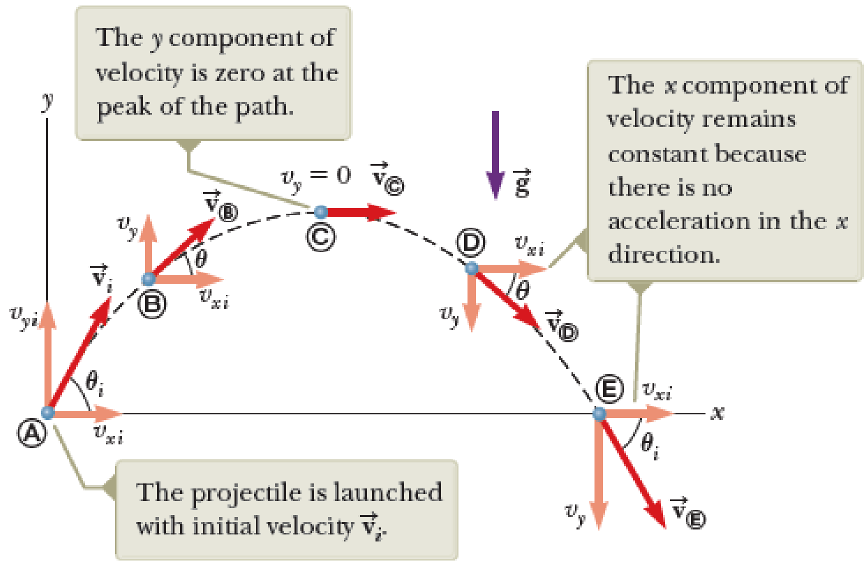
  uma velocidade $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$

  de rapidez (magnitude) $|\vec{v}_0|$

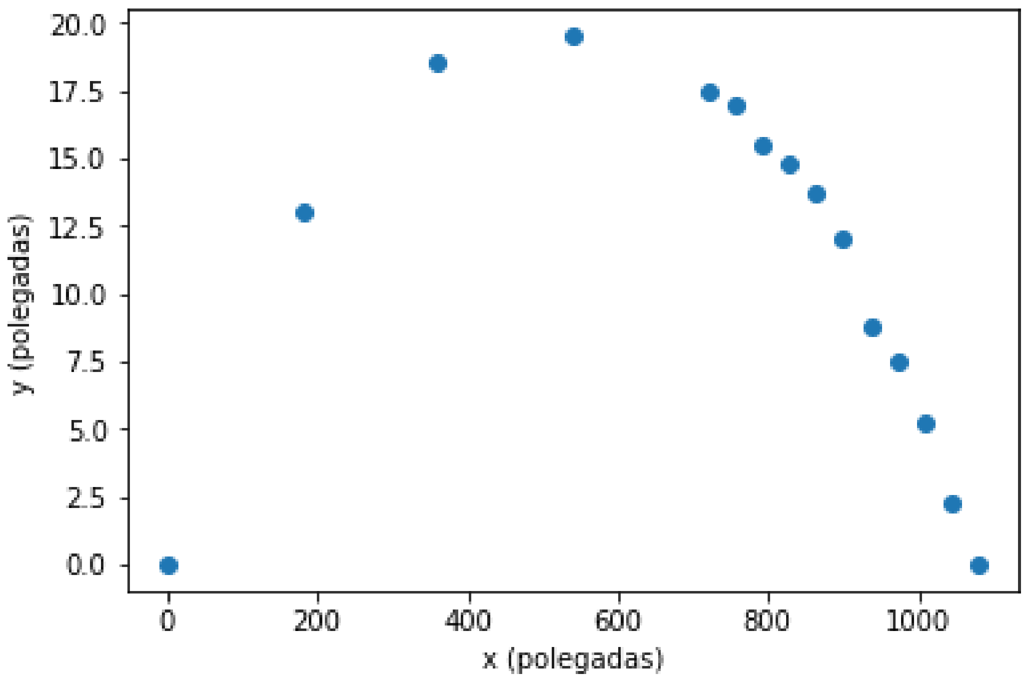
  e a fazer um ângulo θ_0 com a horizontal (solo)

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

O que esperamos:



Medições realizadas:



Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0{,}0) \quad \text{e} \quad \vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}\right) = \left(|\vec{v}_0| \cos\theta_0\,, |\vec{v}_0| \sin\theta_0\right)$$

$$t_0 = 0\ s$$

$$\begin{cases} v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt \\ v_y(t) - v_y(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_y(t)\,dt \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) - v_{0x} = \int_0^t 0\,dt \\ v_y(t) - v_{0y} = \int_0^t -g\,dt \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt \\ y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,dt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_{0x}\,dt \\ y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} [v_{0y} - gt]dt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}\,t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \\ y(t) = y_0 + v_{0y} \frac{x - x_0}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x(t) - x_0) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}(x(t) - x_0)^2$$

equação da parábola

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

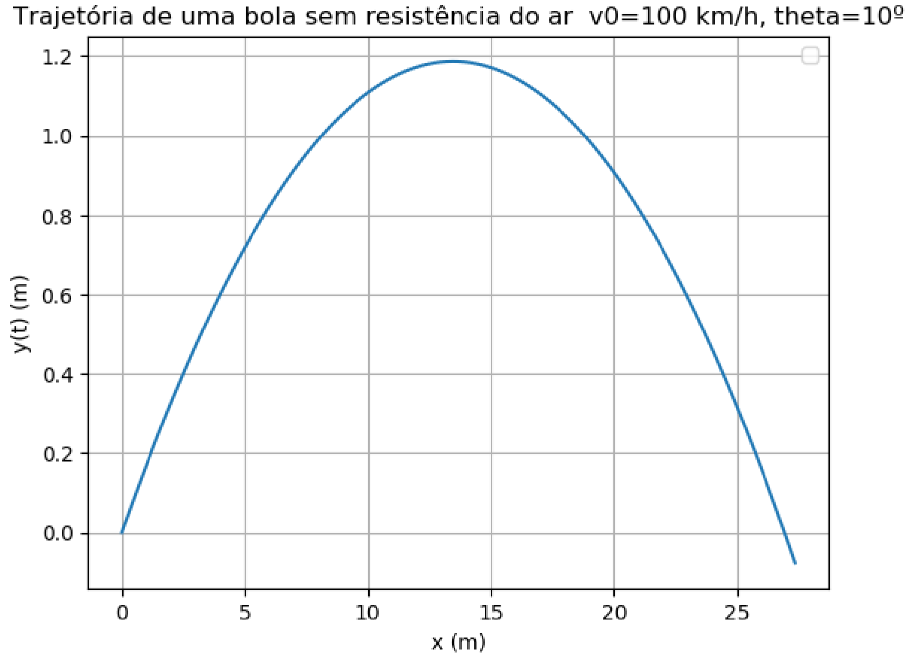
$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0{,}0) \quad \text{e} \quad \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0 \,, |\vec{v}_0| \sin\theta_0)$$

$$t_0 = 0\ s$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}\, t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x(t) - x_0) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}(x(t) - x_0)^2 \quad \text{Parabola}$$



Perguntas.

1. Qual a altura máxima e quando a atinge?
2. Qual o alcance máximo e quando o alcança?

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x(t) - x_0) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}(x(t) - x_0)^2$$ Parabola

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}\, t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\, t \ - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

Perguntas:

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)?

quando $\frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0$ $\qquad t_m = \frac{v_{0y}}{g}$ e $y_m = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}$

ou, $\frac{dy(x)}{dx} = 0$

2. Qual o alcance máximo (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo}?

quando y=0 $\qquad$ quando $y_0 = 0$ temos $t_{solo} = \frac{2\, v_{0y}}{g}$ e

$x_0 = 0 \qquad x_{solo} = \frac{2\, v_{0x}\, v_{0y}}{g}$

Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

Perguntas:

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)?

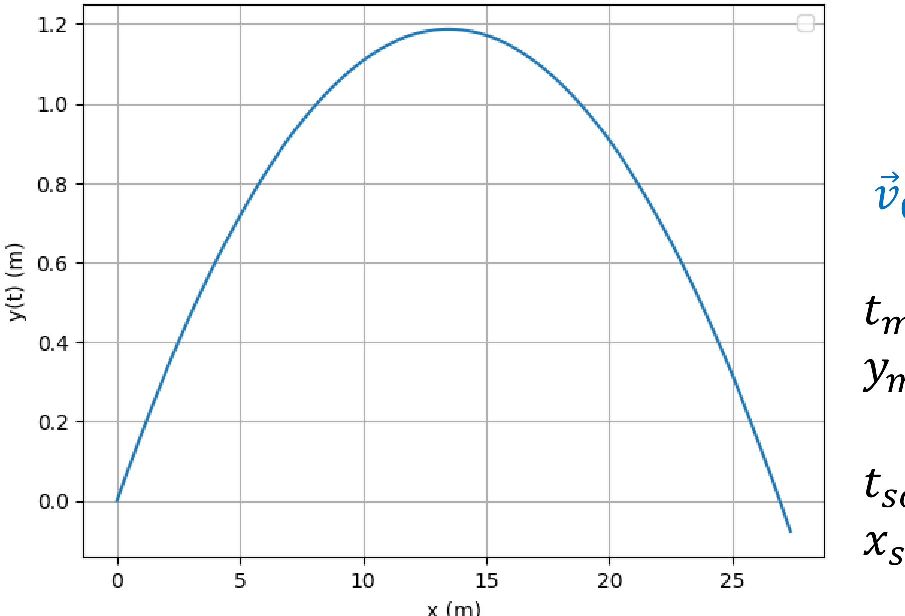
quando $\frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0$ $t_m = \frac{v_{0y}}{g}$ e $y_m = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}$

ou, $\frac{dy(x)}{dx} = 0$

2. Qual o alcance máximo (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo}?

quando y=0 quando $y_0 = 0$ temos $t_{solo} = \frac{2\, v_{0y}}{g}$ e

$x_0 = 0$ $x_{solo} = \frac{2\, v_{0x}\, v_{0y}}{g}$



$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0{,}0)$
$\vec{v}_0 = (27.36;\ 4.82)$ m/s

$t_m = 0.49$ s
$y_m = 1.19$ m

$t_{solo} = 0.98$ s
$x_{solo} = 26.9$ m

Problemas cap 4

1. Uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com o campo (horizontal).
d) Desenvolva um programa que obtenha a lei do movimento e a lei da velocidade em função do tempo, usando o método de Euler. Tem confiança que o seu programa está correto?
e) Considere agora a resistência do ar. A força de resistência do ar ao movimento da bola é:

$$\begin{cases} F_x^{(res)} = -m\,D|\vec{v}|v_x \\ F_y^{(res)} = -m\,D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

em que $D = g/v_T^2$, e a velocidade terminal é $v_T = 100$ km/h. Atualize o seu programa de modo a considerar a força de resistência do ar. Faça o gráfico da altura em função da distância percorrida na horizontal.
f) Nas condições da alínea e), determine qual a altura máxima atingida pela bola e em que instante? Tem confiança no seu resultado?

Problemas cap 4

1. Uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com o campo (horizontal).
d) Desenvolva um programa que obtenha a lei do movimento e a lei da velocidade em função do tempo, usando o método de Euler. Tem confiança que o seu programa está correto?
Pista:
Como o movimento é no plano, temos quatro equações diferenciais para integrar:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y(t) = \frac{dy}{dt},$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \; a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$$

Podemos implementar o seu cálculo num programa python, acrescentando duas linhas (e as que lhe forcem informação) no ciclo dum programa que implemente o método de Euler.

```
for i in range(n):                    # Método de Euler (n+1 elementos)
    t[i+1]=t[i]+dt
    ax= …
    vx[i]= vx[i]+ax*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt              # último x[n]= x[n-1]+vx[n-1]*dt
    ay= …                             #    índice n : é o (n+1)º elemento
    vy[i]= vy[i]+ay*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar.

Como sabemos a força e a aceleração devido à resistência do ar, podemos integrar numericamente usando o método de Euler!

Perguntas:

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)?

   quando $\frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0$ $\qquad t_m =?$ e $y_m = ?$

   ou, $\frac{dy(x)}{dx} = 0$

2. Qual o alcance máximo (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo}?

   quando y=0 $\qquad$ quando $y_0 = 0$ $\quad$ temos $t_{solo} =?$ e

   $\qquad x_0 = 0 \qquad x_{solo} =?$

As respostas a estas perguntas podemos obtê-las com o procedimento usado no problema 2.7.

Estudo da trajetória de uma bola de futebol <u>COM</u> resistência do ar.

$\vec{F} = \vec{P} - m\, D|\vec{v}|^2 \hat{v}$ $\qquad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|},$ $\qquad D = g/v_T^2$

Esta força não altera o plano do movimento. Temos um problema a 2D

$$\begin{cases} F_x = P_x - m\, D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = P_y - m\, D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases}$$

Como sabemos a força e a aceleração devido à resistência do ar, podemos integrar numericamente usando o método de Euler!

Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar no plano de lançamento.

$$\begin{cases} F_x = P_x - m\,D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = P_y - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases} \qquad \begin{cases} F_x = P_x - m\,D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = P_y - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases} \qquad \begin{cases} F_x = -m\,D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = -mg - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = -\,D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

1º Cálculo da velocidade por integração com o método de Euler das duas relações diferenciais:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$$

a 2D

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$
$$v_y(t + \delta t) \approx v_y(t) + a_y(t) \times \delta t$$

Num ciclo

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)
    dres=g/vt**2         # D
    ax[i]=-dres*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
```

Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar no plano de lançamento.

$$\begin{cases} F_x = P_x - m\,D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = P_y - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x - m\,D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = P_y - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = -m\,D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = -mg - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = -\,D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

2º Cálculo da posição por integração com o método de Euler das duas relações diferenciais:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \qquad v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

a 2D

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x\,(t) \times \delta t$$

$$y(t + \delta t) \approx y(t) + v_y\,(t) \times \delta t$$

Num ciclo

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)
    dres=g/vt**2        # D
    ax[i]=-dres*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar no plano de lançamento.

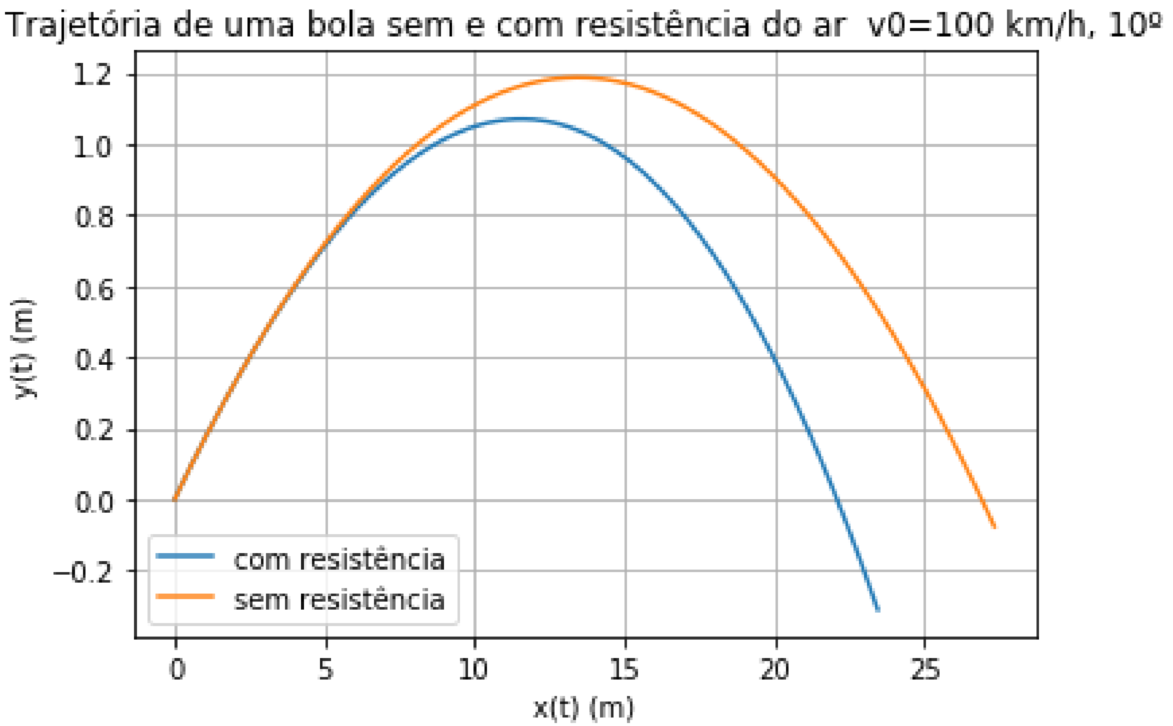
$$\begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

1º Cálculo da velocidade por integração com o método de Euler

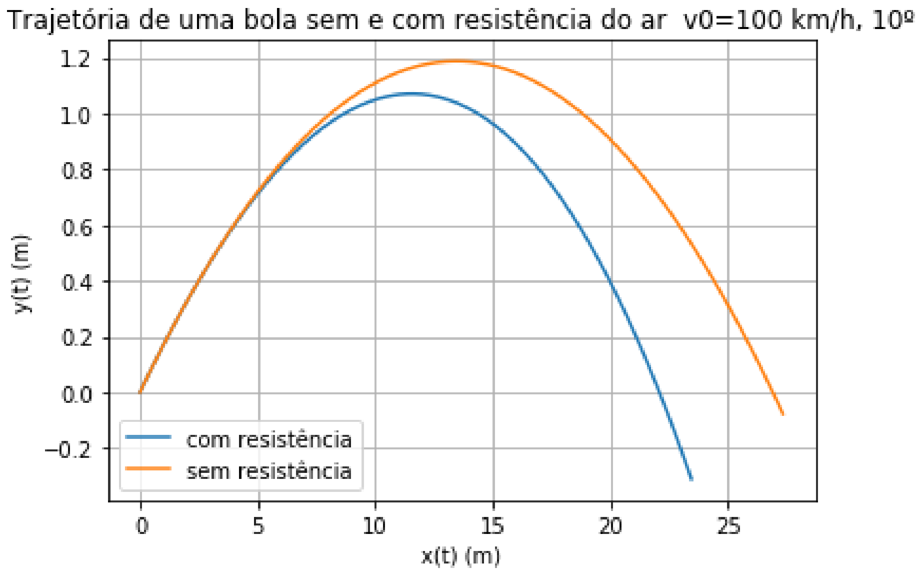
2º Cálculo da posição velocidade por integração com o método de Euler

Num ciclo

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)
    dres=g/vt**2        # D
    ax[i]=-dres*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```



Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar no plano de lançamento.



Perguntas:

1. Qual a altura máxima (y_m) e quando a atinge (t_m)?

quando $\frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0$

ou, $\frac{dy(x)}{dx} = 0$

2. Qual o alcance máximo (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo}?

quando y=0