Содержание

[1. Введение 3](#_Toc452923894)

[1.1 Актуальность 3](#_Toc452923895)

[1.2 Цель работы 4](#_Toc452923896)

[1.3 Методы исследования 4](#_Toc452923897)

[2. Постановка задачи о ранце 5](#_Toc452923898)

[2.1 Описание 5](#_Toc452923899)

[2.2 Классическая постановка задачи 5](#_Toc452923900)

[2.3 Варианты постановки задачи о ранце 6](#_Toc452923901)

[2.4 Области применения задачи о ранце 6](#_Toc452923902)

[2.5 NP-трудность и вычислительная сложность 9](#_Toc452923905)

[2.6 Задачу о рюкзаке можно решить несколькими способами 9](#_Toc452923906)

[3. Известные алгоритмы решения 10](#_Toc452923907)

[3.1 Точные алгоритмы 10](#_Toc452923908)

[3.2 Приближенные алгоритмы 15](#_Toc452923912)

[3.3 Классификация алгоритмов 17](#_Toc452923915)

[4. Предлагаемый метод решения задачи о ранце 20](#_Toc452923916)

[4.1 Операторы создания начальной популяции 21](#_Toc452923917)

[4.2 Операторы скрещивания 22](#_Toc452923918)

[4.3 Операторы мутации 23](#_Toc452923919)

[4.4 Оператор обработки ограничений 23](#_Toc452923920)

[4.5 Операторы селекции 27](#_Toc452923921)

[4.6 Оператор модификации поколения 29](#_Toc452923922)

[5. Классы тестовых задач 30](#_Toc452923923)

[5.1 Задачи без корреляции 30](#_Toc452923924)

[5.2 Задачи с корреляцией 30](#_Toc452923925)

[5.3 Задачи с сильной корреляцией 32](#_Toc452923926)

[6. Эксперимент 34](#_Toc452923927)

[7. Заключение 36](#_Toc452923928)

[8. Литература 39](#_Toc452923929)

[9. Приложение 40](#_Toc452923930)

[9.1 Пример запуска алгоритма 40](#_Toc452923931)

[9.2 Отчеты по исследованию генетического алгоритма 41](#_Toc452923932)

# **Введение**

## 1.1 Актуальность

Классическая задача о ранце относится к числу широко известных задач дискретной оптимизации. Впервые она была сформулирована Д. Данцигом и с тех пор находится в активном исследовании. Основные сферы применения находятся в областях планирования и управления экономическими, производственными и транспортными системами. В частности, формулируемые в рамках классической задачи о ранце задачи объемного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства, сбора биржевого пакета и загрузки транспортных средств(складское планирование).

В работе рассматривается задача формирования инвестиционного портфеля, где в роли цены акции выступает вес, а выгодностью акции является цена в классической задачи о ранце.

Задача о рюкзаке - NP-полная задача с множеством применений.

Предлагаемый метод решения задачи о ранце – **генетический алгоритм**. Данный алгоритм выбран в качестве **объекта исследования**.

Генетические алгоритмы — широко развивающийся класс оптимизационных алгоритмов, использующих идеи искусственного интеллекта и предназначенный для ведения направленного поиска. С их помощью могут быть найдены решения многих задач в различных областях, таких как составление расписаний, построение конечных автоматов, построение и настройка искусственных нейронных сетей и т.д.

**Эффективность использования ГА, заключается в следующем:**

Если о пространстве поиска задачи есть некоторая дополнительная информация (как, например, пространство для известной задачи о ранце), метод поиска ГА, использующий эвристики, определяемые пространством, часто превосходит любой универсальный метод. При достаточно сложном рельефе функции приспособленности методы поиска с единственным решением в каждый момент времени, например, простой метод спуска, могли "затыкаться" в локальном решении, однако ГА, так как они работают с целой "популяцией" решений, имеют меньше шансов сойтись к локальному оптимуму и робастно функционируют на многоэкстремальном ландшафте.

Конечно, такие предположения не предсказывают строго, когда ГА будет эффективной процедурой поиска, конкурирующей с другими алгоритмами.

Эффективность ГА сильно зависит от таких деталей, как метод кодировки решений, операторы, настройки параметров, частный критерий успеха.

В моей работе в качестве **предмета исследования выбрано исследование наборов параметров ГА на задаче формирования инвестиционного портфеля для нахождения оптимальных комбинаций**.

**Актуальность** исследования предопределена широкой распространенностью и важностью различных прикладных проблем, решаемым генетическим алгоритмом.

## 1.2 Цель работы

Главной целью мой работы является реализация генетического алгоритма для классической задачи о ранце, его исследование для нахождения оптимальных комбинаций параметров. Так как в роли классической задачи о ранце рассматривается задача формирования инвестиционного портфеля, которая имеет особенности в виде корреляций между ценой и весом, исследование проводится для 4 классов тестовых задач:

* задачи без корреляции,
* коррелированные задачи,
* сильнокоррелированные задачи,
* задачи с подсуммами.

## 1.3 Методы исследования

В качестве метода исследования выступает эксперимент, который описан в главе 6.

# **Постановка задачи о ранце**

## Описание

Задача о ранце (рюкзаке) — одна из *NP-*полных задач комбинаторной оптимизации. Своё название задача получила от оптимизационной задачи укладки как можно большего числа ценных вещей в рюкзак при условии, что общий объём (или вес) всех предметов, способных поместиться в рюкзак, ограничен. Задача о рюкзаке является актуальной и достаточно востребованной с точки зрения ее приложения в реальной жизни. Задача о загрузке (о рюкзаке) и её модификации часто возникают в экономике, прикладной математике, криптографии, генетике и логистике для нахождения оптимальной загрузки транспорта (самолёта, поезда, трюма корабля) или склада.

## 2.2 Классическая постановка задачи

**2.2.1 Словесная**

Пусть имеется набор предметов, каждый из которых имеет два параметра – вес и ценность. Имеется рюкзак c некоторым заданным значением вместимости. Задача заключается в том, чтобы собрать рюкзак с максимальной ценностью предметов внутри, соблюдая при этом весовое ограничение рюкзака.

**2.2.2 Математическая**

Пусть имеется n предметов. Для каждого i-го предмета задан его вес *> 0* и стоимость (ценность)  *> 0, i =1,.., n.,* Задано ограничение на максимальный вес рюкзака ‒ *P*. Каждый может принимать только одно из двух значений: *xi = 1*, если *i-*й предмет упаковывают в рюкзак, или*,* в противном случае. Требуется выбрать из заданного множества предметов набор с максимальной суммарной стоимостью при одновременном соблюдении ограничения на суммарный вес найденного набора .

**(2.2.1)**

## 2.3 Варианты постановки задачи о ранце

Существует множество разновидностей задачи о ранце, отличия заключаются в условиях, наложенных на рюкзак, предметы или их выбор.

1. **Рюкзак 0-1** ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) 0-1 Knapsack Problem): не более одного экземпляра каждого предмета
2. **Ограниченный рюкзак** (англ. Bounded Knapsack Problem) - обобщение классической задачи, когда любой предмет может быть взят некоторое количество раз.
3. **Неограниченный рюкзак** (целочисленный рюкзак)([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Unbounded Knapsack Problem (integer knapsack)): произвольное количество экземпляров каждого предмета.
4. **Непрерывный рюкзак** (англ. Continuous knapsack problem) - вариант задачи, в котором возможно брать любою дробную часть от предмета, при этом удельная стоимость сохраняется.
5. **Рюкзак с мультивыбором** ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Multiple-choice Knapsack Problem)
6. **Мультипликативный рюкзак** ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Multiple Knapsack Problem): есть несколько рюкзаков, каждый со своим максимальным весом. Каждый предмет можно положить в любой рюкзак или оставить.
7. **Многомерный рюкзак** ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Multy-dimensional knapsack problem): вместо веса дано несколько разных ресурсов (например, вес, объём и время укладки). Каждый предмет тратит заданное количество каждого ресурса. Надо выбрать подмножество предметов так, чтобы общие затраты каждого ресурса не превышали максимума по этому ресурсу, и при этом общая ценность предметов была максимальна.

## 2.4 Области применения задачи о ранце

Задача о ранце имеет применение в различных областях знаний: в математике, информатике и на стыке этих наук — в криптографии. В вычислительной лингвистике в одной из работ предложена формулировка задачи [автоматического реферирования текстов](https://en.wikipedia.org/wiki/Automatic_summarization) (англ.)[русск.](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%90%D0%B2%D1%82%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B5%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%82%D0%B5%D0%BA%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B2&action=edit&redlink=1), вырожденный (более простой) случай которой соответствует постановке задачи о ранце.

**2.4.1 Изучение в математике**

Одно из первых упоминаний о задаче о ранце можно найти в статье [Джорджа Балларда Мэтьюса](https://en.wikipedia.org/wiki/George_Ballard_Mathews) (англ.)[русск.](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D1%8D%D1%82%D1%8C%D1%8E%D1%81,_%D0%94%D0%B6%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B6_%D0%91%D0%B0%D0%BB%D0%BB%D0%B0%D1%80%D0%B4&action=edit&redlink=1), датированной 1897 годом. Интенсивное изучение данной проблемы началось после публикации [Д. Б Данцигом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B0%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B3,_%D0%94%D0%B6%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B6) в 1957 году книги «[англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Discrete Variable Extremum Problem», особенно в 70-90-е годы 20-го века, как теоретиками, так и практиками. Во многом, данный интерес вызван достаточно простой формулировкой задачи, большим числом её разновидностей и свойств и в то же время сложностью их решения. В 1972 году данная задача вошла в список [К. Мэннига](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%BF,_%D0%A0%D0%B8%D1%87%D0%B0%D1%80%D0%B4_%D0%9C%D1%8D%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BD%D0%B3) [NP-полных задач](https://ru.wikipedia.org/wiki/NP-%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0) (статья [англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) «Reducibility Among Combinatorial Problems»).

С практической точки зрения задача о рюкзаке может служить моделью для большого числа промышленных ситуаций:

* Размещение грузов в помещении минимального объёма.
* Раскройка ткани — для заданного куска материала получить максимальное число выкроек определенной формы.
* Расчет оптимальных капиталовложений.
* С задачей о ранце сталкивается любой человек, собирающий рюкзак.

## 2.4.2 Изучение в криптографии

Проблема рюкзака лежит в основе первого алгоритма [асимметричного шифрования](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D1%81_%D0%BE%D1%82%D0%BA%D1%80%D1%8B%D1%82%D1%8B%D0%BC_%D0%BA%D0%BB%D1%8E%D1%87%D0%BE%D0%BC) (шифрования с открытым ключом). Идея [криптографии](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%BF%D1%82%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8%D1%8F) с открытыми ключами была выдвинута [Уитфилдом Диффи](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%B8%D1%82%D1%84%D0%B8%D0%BB%D0%B4_%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B8), [Мартином Хеллманом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A5%D0%B5%D0%BB%D0%BB%D0%BC%D0%B0%D0%BD,_%D0%9C%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD) и независимо — [Ральфом Мерклом](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Ralph_Merkle&action=edit&redlink=1) ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Ralph Merkle). Впервые она была представлена Диффи и Хеллманом на Национальной компьютерной конференции ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) National Computer Conference). Новизна по отношению к [симметричным криптосистемам](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BC%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B) заключалась в использовании парных ключей — секретного ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) private key, secret key, SK) и открытого ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) public key, PK), создаваемых пользователем. Из названия понятно, что секретный ключ пользователь должен скрывать, а открытый может быть общедоступным. Открытый ключ нужен для шифрования, а секретный для расшифровки. Часто из секретного ключа получают открытый ключ.

**Криптосистема Меркла-Хеллмана** — первый, основанный на задаче о ранце, алгоритм для обобщённого шифрования с [открытым ключом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D1%81_%D0%BE%D1%82%D0%BA%D1%80%D1%8B%D1%82%D1%8B%D0%BC_%D0%BA%D0%BB%D1%8E%D1%87%D0%BE%D0%BC). Разработан Ральфом Мерклом и Мартином Хеллманом в 1978 году. Был опубликован одностадийный ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) singly-iterated) и мультистадийный варианты ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) multiply-iterated). Алгоритм мог быть использован только для шифрования, но [Ади Шамир](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%80,_%D0%90%D0%B4%D0%B8) адаптировал его для использования в [цифровых подписях](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%86%D0%B8%D1%84%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D0%BF%D0%B8%D1%81%D1%8C).

В дальнейшем было предложено как множество модификаций криптосистемы Меркла-Хеллмана, так и совершенно новых криптосистем на основе задачи о ранце. Среди них:

1. Рюкзак Грэм-Шамира
2. Рюкзак Гудмана-Макколи
3. Рюкзак Накаше-Штерна
4. Рюкзак Шора-Ривеста

**2.4.3 Шифрование с помощью задачи о рюкзаке**

Сообщение шифруется как решение набора задач о ранце.

Рюкзачным вектором  A = (a_1,...,a_n) назовём упорядоченный набор из n предметов.

Для шифрования [открытого текста](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D0%BA%D1%80%D1%8B%D1%82%D1%8B%D0%B9_%D1%82%D0%B5%D0%BA%D1%81%D1%82) в двоичном представлении его разбивают на блоки длины n (например, (1 1 1 0 0) соответствует 5-ти предметам в рюкзаке). Считается, что единица указывает на наличие предмета в рюкзаке, а ноль на его отсутствие.

**Пример** шифротекста, полученного по данному алгоритму.

Пусть задан рюкзачный вектор Α = (3 4 6 7 10 11) с длинной n = 6.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| открытый текст | 1 1 1 1 1 0 | 0 0 1 1 0 0 | 0 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 1 |
| вещи в рюкзаке | 3 4 6 7 10 11 | 3 4 6 7 10 11 | 3 4 6 7 10 11 | 3 4 6 7 10 11 |
| шифротекст | 3 + 4 + 6 + 7 + 10 = 30 | 6 + 7 = 13 | 0 | 11 |

Таблица 1. Пример шифрования

Для заданного Α - все криптосистемы - есть числа, не превышающие 41, суммарный вес всех предметов в рюкзачном векторе. Для каждого исходного текста существует единственный криптотекст. В указанном примере можно получить одинаковый шифротекст для векторов 100010 и 001100. Ошибка?

Верно, ошибка. Для шифрования необходим сверхвозрастающий рюкзак, то есть элементы упорядоченного рюкзачного вектора должны являться [сверхвозрастающей последовательностью.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%B2%D0%BE%D0%B7%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%8E%D1%89%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C)

**2.4.4 Изучение в информатике**

Как было сказано выше, задача о ранце относится к классу NP-полных, для неё нет полиномиального алгоритма, решающего её за разумное время. Поэтому при решении задачи о ранце всегда нужно выбирать между точными алгоритмами, которые не применимы для «больших» рюкзаков, и приближенными, которые работают быстро, но не обеспечивают оптимального решения задачи. Естественно, создание быстрого и достаточно точного алгоритма представляет большой интерес.

## 2.5 NP-трудность и вычислительная сложность

**Задача о ранце – NP – трудная задача.**

**Доказательство:**

Рассмотрим специальную задачу о Ранце:

**(2.5.1)**

*L – язык.*

Докажем, используя утверждение о том, что задача о камнях - *-* полная. Задача о камнях – задача о разбиении кучи камней на две, вес которых будет одинаков.

*Если* оптимум в задаче о Ранце строго меньше , то задача о камнях не имеет решение.

*Если* в **(2.5)** оптимум  *,* то *=>* , если **(2.5)** оптимум , то *=>* .

*Если*

за полиномиальное время, то есть задача о Ранце - *–* трудная.

## 2.6 Задачу о рюкзаке можно решить несколькими способами

* Перебирать все подмножества набора из предметов. Сложность такого решения
* Методом [Meet-in-the-middle](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Meet-in-the-middle). Сложность решения -
* Метод динамического программирования. Сложность -
* Жадным алгоритмом. Сложность -
* И другие(о них далее).

# **Известные алгоритмы решения**

## 3.1 Точные алгоритмы

### 3.1.1 Полный перебор

Пусть в рюкзак загружаются предметы разных типов. Рассмотрим задачу, когда количество предметов каждого типа не ограничено. Нужно определить максимальную стоимость груза, вес которого равен  . Для получения решения алгоритмом [полного перебора](https://ru.wikipedia.org/wiki/NP-%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0) осуществляется перебор всех вариантов загрузки рюкзака.

Временная сложность алгоритма   , т.е он работоспособен для небольших значений  .

С ростом   задача становится неразрешимой данным методом за приемлемое время.



Рисунок 1. Алгоритм полного перебора



Рисунок 2. Дерево полного перебора

На рисунке показано четырёхуровневое дерево перебора. Корень дерева соответствует нулевому весу (рюкзак пуст), в кружках показан вес предмета. Первый предмет возможно выбрать четырьмя способами, второй тремя и т. д.

**3.1.2 Метод ветвей и границ**



Рисунок 3. Дерево, упрощенное методом ветвей и границ

[Метод ветвей и границ](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%B2%D0%B5%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%B9_%D0%B8_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86) является вариацией метода полного перебора с той разницей, что мы сразу исключаем заведомо неоптимальные решения.

Пусть есть оптимальное решение  . Попытаемся его улучшить, рассмотрев решение на другой ветви. Если на рассматриваемой в данной момент ветви решение становится хуже (с какого-то шага), чем , то прекращаем его исследование и выбираем другую ветвь дерева.

Пусть для предыдущего четырёхуровневого дерева есть ограничение . Тогда, применяя метод ветвей и границ, можно сократить количество вариантов для перебора с 24-х до 8-ми. Однако метод ветвей и границ работает не для всех наборов данных. Можно привести примеры, в которых время выполнения будет таким же, как и для простого перебора.

##### Применение метода ветвей и границ:

При использовании метода ветвей и границ строится сеть. По оси  откладываем количество предметов, по оси  — их вес. На первом шаге из начала координат строятся две линии: горизонтальная, соответствующая тому, что первый предмет не был взят, и наклонная, соответствующая взятому первому предмету. Их проекции на ось  равны весу предмета. На втором шаге опять строим 2 линии, горизонтальная (второй предмет не был взят) или наклонная (второй предмет взят). Положим длину горизонтальных дуг равной нулю, а наклонных — ценности предмета.

Таким образом, любому решению задачи соответствует некоторый путь в сети. Наша задача свелась к нахождению пути максимальной длины.

Пример: Пусть вместимость рюкзака .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i | Ценность | Вес |
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 5 | 10 |
| 3 | 4 | 6 |
| 4 | 2 | 5 |

Таблица 2. Пример задачи о ранце

На рисунке (Рисунок 4), в квадратных скобках [] стоит суммарная ценность на каждом шаге алгоритма. Видно, что для конкретного примера она равна 17 .

****

Рисунок 4. График нахождения оптимума методом ветвей и границ

### 3.1.3 Метод динамического программирования

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности Беллмана: ”*Каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбирать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на этом шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был оптимальным*”. Проще говоря, оптимальное решение на i шаге находится исходя из найденных ранее оптимальных решений на предшествующих шагах. Из этого следует, что для того чтобы найти оптимальное решение на последнем шаге надо сначала найти оптимальное решения для первого, затем для второго и так далее пока не пройдем все шаги до последнего.

Имеется набор из *N* предметов. Пусть *P* - объем рюкзака, *ci*– стоимость *i-*го предмета, *pi*  – вес *i-*го предмета. *Value [p, i]* – максимальная сумма, которую надо найти. Суть метода динамического программирования – на каждом шаге по весу *1 < pi < p* находим максимальную загрузку *Value[pi, i],* для веса *pi*. Допустим мы уже нашли *Value[1..,*

*k = 1,.., i* –*1]*, то есть для веса меньше либо равного p и с предметами, взятыми из *1,.., N* –*1*. Рассмотрим предмет *N*, если его вес меньше *p* проверим стоит ли его брать.

Если его взять то вес станет *p - pi* , тогда *Value[p, i] = Value[p – pi , i* –*1] + ci*

(для *Value[p – pi , i –1]*) решение уже найдено остается только прибавить *ci.*

Если его не брать то вес останется тем же и *Value[p, i] = Value[p – pi , i-1]*. Из двух вариантов выбирается тот, который дает наибольший результат. Рассмотрим алгоритм подробнее.

****

Рисунок 5. Метод динамического программирования

Динамическое программирование для задачи о рюкзаме дает точное решение, причем одновременно вычисляются решения для всех размеров рюкзака от *1* до *Р*.

Для хранения таблицы стоимости и запоминания того, брался каждый предмет или нет, требуется порядка памяти, временная сложность равна

## 3.2 Приближенные алгоритмы

### 3.2.1 Жадный алгоритм (алгоритм Данцига)

Согласно [жадному алгоритму](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D0%B0%D0%B4%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC) предметы сортируются по убыванию стоимости единицы каждого. Помещаем в рюкзак то, что помещается и одновременно и самое дорогое, т.е с максимальным отношением цены к весу.

Для сортировки предметов потребуется Далее организуется проход по всем  элементам цикла.

Точное решение можно получить не всегда.

Пример. Пусть вместимость рюкзака  Предметы уже отсортированы. Применяем к ним жадный алгоритм.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| i | вес | цена | цена/вес |
| 1 | 20 | 60 | 3 |
| 2 | 30 | 90 | 3 |
| 3 | 50 | 100 | 2 |

Таблица 3. Применение жадного алгоритма

Кладём в рюкзак первый, а за ним второй предметы. Третий предмет в рюкзак не влезет. Суммарная ценность поместившегося равна 150. Если бы были взяты второй и третий предметы, то суммарная ценность составила бы 190. Видно, что жадный алгоритм не обеспечивает оптимального решения, поэтому относится к приближенным.

Рассмотрим непрерывную задачу о ранце, условия для нее те же самые, отличие лишь в том, что мы можем взять часть предмета. То есть предметы можно делить. Пусть у нас есть тот же набор, тогда следуя жадному алгоритму, берем первый и второй предметы, полностью третий предмет не помещается т.к места осталось всего на 30кг, но мы можем брать части предметов, тогда возьмем веса третьего предмета, соответственно и его стоимости, таким образом мы нагрузили рюкзак полностью, стоимость груза стала равна 210у.е**. Для непрерывной задачи о рюкзаке жадный алгоритм будет давать оптимальное решение.**

### 3.2.2 Генетический алгоритм

[Генетические алгоритмы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BD%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC) были предложены [Джоном Генри Холландом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A5%D0%BE%D0%BB%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B4,_%D0%94%D0%B6%D0%BE%D0%BD_%D0%93%D0%B5%D0%BD%D1%80%D0%B8) в 1970 годуи относятся к так называемым [метаалгоритмам](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%B0%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC). Идея — составление алгоритмов поиска на основе биологической модели механизмов [естественного отбора](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BE%D1%82%D0%B1%D0%BE%D1%80). Базовыми понятиями являются: популяция, отбор, мутация, скрещивание.

[***Популяция***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BF%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D1%8F)***.*** Составляется набор бинарных строк ([хромосом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A5%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%81%D0%BE%D0%BC%D0%B0)), возможных решений. На основе первой («старой») популяции строится вторая («новая») популяция решений, которая служит «старой» для третьей популяции и т.д

[***Отбор***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D0%B1%D0%BE%D1%80)***.*** Задается функция выбора, согласно которой, лучшие представители «старой» популяции выбираются для воспроизводства «новой». Следовательно, алгоритм выбирает наилучшее решение.

[***Скрещивание***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%89%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5)***.*** Для пары строк («родителей») с определенной длиной r выбирается произвольное число . «Родители» обмениваются между собой битами с s + 1 -го по -й и получаются две новые строки («потомки»).



Рисунок 6. Скрещивание хромосом. «Родители» обмениваются последними пятью битами и образуют новые хромосомы — «потомки»

[***Мутация***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D1%83%D1%82%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F)***.*** Изменение, происходящее с определенной [вероятностью](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C).

Содержимое рюкзака представляется в виде хромосом или бинарных строк, i-й бит которых равен единице в случае наличия предмета в рюкзаке, нулю — в случае его отсутствия. Задается целевая функция  — вместимость рюкзака.

Отбор осуществляется следующим образом.

Выбирается произвольная хромосома. Пусть   — максимальное расхождение между целевой функцией и хромосомой.  суммарный вес всех предметов, входящих в рюкзачный вектор.  — вес рюкзака при выбранной хромосоме.

Если  то хромосома оценивается числом  .

Если  то хромосома оценивается числом .



Рисунок 7. Стадии генетического алгоритма

Алгоритм прерывается после заданного числа итераций.

Генетический алгоритм не гарантирует нахождение оптимального решения, однако показывает хорошие результаты за меньшее время по сравнению с другими алгоритмами.

## 3.3 Классификация алгоритмов

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Метод | Тип алгоритма | Сложность | Плюсы | Минусы |
| Полный перебор | Точный |  | * Простота реализации. * Точное решение. | * Входные данные   не велики.   * Временная сложность. |
| Метод ветвей и границ | Точный |  | * Возможно значительное   сокращение  времени  работы.   * Простота реализации. | * В худшем случае работает как полный перебор. |
| Динамическое программирование | Точный |  | * Независимость от вида исходных   данных.   * Точное решение. * Высокая скорость   работы по сравнению с другими алгоритмами  (для не больших  значений N<50).   * Имеем оптимальные   загрузки рюкзака  для всех его весов от  1 до P. | * Большой объём вычислительной работы. * Веса предметов – целые. * Если брать вещественные значения - ДП - алгоритм неприменим! |
| Жадный алгоритм | Приближенный |  | * Возможно значительное сокращение   времени работы.   * Простота   Реализации. | * Всегда можно предоставить такой набор, при котором решение будет не точным. |
| Генетический алгоритм | Приближенный |  | * Высокая скорость. * Может работать   с большими  значениями.   * Независимость от вида исходных   Данных. | * Не гарантирует нахождение оптимального решения. |

Таблица 4. Классификация алгоритмов

# **Предлагаемый метод решения задачи о ранце**

*Для решения задачи комбинаторной оптимизации был выбран и запрограммирован* ***генетический алгоритм****.*

**Генети́ческий алгори́тм** ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) genetic algorithm) — это [эвристический алгоритм](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B2%D1%80%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC) поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путём случайного подбора, комбинирования и вариации искомых параметров с использованием механизмов, аналогичных [естественному отбору](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BE%D1%82%D0%B1%D0%BE%D1%80) в природе. Является разновидностью [эволюционных вычислений](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D1%8E%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%B2%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F), с помощью которых решаются оптимизационные задачи с использованием методов естественной эволюции, таких как: [наследование](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_(%D0%B1%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%8F)), [мутации](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D1%83%D1%82%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F), [отбор](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BE%D1%82%D0%B1%D0%BE%D1%80) и [кроссинговер](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80). Отличительной особенностью генетического алгоритма является акцент на использование оператора «скрещивания», который производит операцию рекомбинации решений-кандидатов, роль которой аналогична роли скрещивания в живой природе.

Интерпретация задачи о ранце и операторов генетического алгоритма с помощью понятий популяционной генетики:

Наименьшей неделимой единицей биологического вида, подверженной действию факторов эволюции, является особь , (индекс *k* обозначает номер особи, а индекс *t* – некоторый момент времени эволюционного процесса). В качестве аналога особи *,* примем произвольное допустимое решение, которому присвоено имя . Действительно, вектор управляющих переменных – это наименьшая неделимая единица, характеризующая в задаче о ранце внутренние параметры на каждом *t-*м шаге поиска оптимального решения, которые изменяют свои значения в процессе максимизации критерия оптимальности *Q*. Как уже было отмечено, символьная модель экстремальной задачи о ранце может быть представлена в виде множества двоичных кодировок, которые описывают конечное множество допустимых решений принадлежащих области поиска . Для описания особей введем два типа вариабельных признаков, отражающих качественные и количественные различия между особями по степени их выраженности:

• качественные признаки – признаки, которые позволяют однозначно разделять совокупность особей на четко различимые группы;

• количественные признаки – признаки, проявляющие непрерывную изменчивость, в связи с чем степень их выраженности можно охарактеризовать числом. Качественные признаки особи , определяются из символьной модели задачи - как кодировка *s(x)*, соответствующая точке с именем и составляющие ее . Приведем интерпретацию этих признаков в терминах хромосомной теории наследственности. В качестве гена – единицы наследственного материала, ответственного за формирование альтернативных признаков особи, примем комбинацию , которая определяет фиксированное значение целочисленного кода управляющей переменной . Каждая особь характеризуется n генами, а структуру строки можно интерпретировать хромосомой, содержащей *n* сцепленных между собой генов, которые следуют друг за другом в строго определенной последовательности. Хромосому особи будем обозначать , т.е.

**(4.1)**

Согласно хромосомной теории наследственности передача генетической информации будет осуществляться через хромосомы от «родителей» к «потомкам». Местоположение определенного гена в хромосоме называется локусом, а альтернативные формы одного и того же гена, расположенные в одинаковых локусах хромосомы, называются аллелями (аллелеформами). В задаче поиска *i-*й локус соответствует *i-*й позиции в строковой кодировке *s(x)*, а аллели – это аналоги множества значений управляющих переменных.

Задача формализуется таким образом, чтобы её решение могло быть закодировано в виде [вектора](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80_(%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5)) («[генотипа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%B8%D0%BF)») генов, где каждый ген может быть [битом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D1%82), числом или неким другим объектом. В классических реализациях генетического алгоритма (ГА) предполагается, что генотип имеет фиксированную длину. Однако существуют вариации ГА, свободные от этого ограничения.

Некоторым, обычно случайным, образом создаётся множество генотипов начальной популяции. Они оцениваются с использованием «функции приспособленности», в результате чего с каждым генотипом ассоциируется определённое значение («приспособленность»), которое определяет насколько хорошо [фенотип](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B5%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%B8%D0%BF), им описываемый, решает поставленную задачу. При выборе «функции приспособленности» (или fitness function в англоязычной литературе) важно следить, чтобы её «рельеф» был «гладким».

**Операторы, реализованные в программе:**

**4.1 Операторы создания начальной популяции**

***4.1.1 Алгоритм Данцига для линейной одномерной задачи о ранце***

Начальная популяция генерируется в зависимости от удельной стоимости. Удельная стоимость (стоимость/вес) сортирую в порядке невозрастания, помещаем в рюкзак то, что помещается и одновременно и самое дорогое, т.е с максимальным отношением цены к весу.

Что бы получить несколько особей, введен элемент случайности - предметы с вероятностью 50% могут попасть в рюкзак.

***4.1.2 Случайный алгоритм***

Полностью рандомно генерируются случайные особи с учётом функции приспособленности.

## 4.2 Операторы скрещивания

Механизм размножения с помощью операторов кроссовера прост, т. к. содержит следующие простейшие операции:

1) генерация случайных чисел;

2) копирование строк фиксированной длины L, являющихся «родительскими» кодировками;

3) обмен кусками «родительских» кодировок, разрываемых в одной и той же точке хромосомы.

Применение этих операторов приводит к тому, что кодировки-потомки будут содержать новые сочетания аллелей генов, принадлежащих кодировкам родителей, т.е. происходит только перераспределение суще-ствующих аллелей родителей по хромосомам потомков.

***4.2.1 Одноточечный кроссовер***

Одноточечный кроссовер работает следующим образом.

Сначала, случайным образом выбирается одна точка разрыва из  интервала с вероятностью *.* Точка разрыва - участок между соседними битами в строке. Обе родительские структуры разрываются на два сегмента по этой точке. Затем, соответствующие сегменты различных родителей склеиваются и получаются два генотипа потомков.

***4.2.2 Двуточечный кроссовер***

«Родительские» кодировки * ' ,  ''* разрываются в двух точках *r1* и *r2 (r1 < r2)*случайным образом выбранных с равной вероятностью без возвращения из интервала

***4.2.3 Однородный кроссовер***

Оператор кроссовера, в котором единственный потомок воспроизводится таким образом, что аллель каждого гена копируется в хромосому потомка либо из хромосомы одного родителя, либо из хромосомы другого родителя с вероятностью .

## 4.3 Операторы мутации

***4.3.1 Точечная мутация***

Кодировка мутанта получается путем однократной перестановки аллелей в случайно выбранном локусе и соседнем с ним.

***4.3.2 Инверсия***

Кодировкаразрывается в двух точках*r1*и*r2**(r1**<**r2),*случайно выбранных с равной вероятностью из интервала ; значения аллелей во всех генах куска изменяются на обратные («1» на «0» или «0» на «1»); кодировка мутанта образуется путем соединения вновь двух старых кусков и нового куска. *( r1 1 ,..., r2 ) :  M = (1,...,r1 ,  r1 1,..., r2 , r2 1,...,L ) .*

***4.3.3 Сальтация***

В кодировке**случайным образом инвертируются одновременнозначения аллелей в*k**(**k**L**)*генах родительской хромосомы.

***4.3.4 Транслакация***

В кодировке**выделяется не один кусок*[r1,**r2]*,а сразу несколько непересекающихся между собой участков «родительской» хромосомы **; значения аллелей в мутанте внутри этих участков инвертируются.

## 4.4 Оператор обработки ограничений

***4.4.1 Метод штрафных функций***

Идея использования штрафных функций - значительное уменьшение приспособленности особей, не являющихся кодировками допустимых решений. Штрафные функции можно разделить на постоянные и адаптивные. *Постоянная* функция штрафа на все недопустимые особи накладывает одинаковый штраф, *адаптивная* накладывает штраф тем больше, чем «дальше» представляемое решение от допустимой области, например, квадратичная функция штрафа.

*В программе использована адаптивная фушнкия шрафа:*

**(4.4.1)**

**(4.4.2)**

После применения штрафа к функции приспособленности, некоторые особи, генотип которых является кодировкой недопустимого решения, могут иметь отрицательную или нулевую приспособленность. Существуют два варианта работы с недопустимыми особями:

* Первый – *удаление особей* с приспособленностью меньшей или равной нулю из популяции, но это значительно сокращает численность и генетическое разнообразие популяции.
* Второй вариант *– масштабирование приспособленностей*. В этом случае все особи сохраняются в популяции, но недопустимые особи имеют очень низкую, по сравнению с остальными особями, приспособленность. Одним из наиболее простых и часто используемых методов является *линейное динамическое масштабирование*.

В реализации генетического алгоритма был использован второй вариант, *метод линейного динамического* масштабирования для избежания сокращения численности и генетического разнообразия:

*(a) = at m(a) + bt* **(4.4.3)**

где *at > 0* ( для задачи максимизации); *bt* – коэффициент масштабирования.

Коэффициенты *at* и *bt* выбираются в каждом *t-*м поколении по информации о значениях функции приспособленности m для обрабатываемых кодировок *s*, исходя из следующих двух условий.

* Среднее значение масштабированной функции приспособленности для множества Rt

**(4.4.4)**

должно равняться среднему значению необработанной функции приспособленности для множества

**(4.4.5)**

Учитывая **(4.4.1)** получим:

*at bt (t)* **(4.4.6)**

Выполнение этого равенства гарантирует, что всякая кодировка *s* , имеющая значение функции приспособленности совпадающее со значением средней приспособленности по популяции, при использовании схемы пропорциональной селекции репродуцирует в среднем одну ожидаемую копию в популяцию .

* Наибольшее значение масштабируемой функции приспособленности должно находиться в следующем отношении со средним значением необработанной функции приспособленности:

**(4.4.7)**

где ***с*** *= const,**c**[1.2; 2.0]* – ожидаемое число копий для особи, которая имеет максимальное значение необработанной функции приспособленности в . Выполнение равенства гарантирует, что «наилучшая» кодировка множества репродуцирует при использовании схемы пропорциональной селекции в среднем c ожидаемых копий в популяцию . Таким образом, решая уравнения **(4.4.5) – (4.4.7)** получаем, что для масштабируемой функции приспособленности **(4.4.3)** в каждом t-м поколении коэффициенты at и bt должны вычисляться согласно следующим выражениям:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *at =* | *(c -1) × m****ср*** *(t)* | | |  |
|  |  |  |  | | |
|  |  | *m + (t) - m****ср*** *(t)* |
|  |  |  | | |
| *bt =* | *m****ср*** *(t) × (m + (t) - c × m****ср*** *(t))* | | | | | |
| *m + (t) - m****ср*** *(t)* | | | | | |

**(4.4.8)**

Здесь *m+(t)* – значение функции приспособленности «наилучшей» особи в .



Рисунок 8. Зависимость значений масштабируемой функции приспособленности от для и

Одно из требований, предъявляемых к необработанной функции приспособленности *m* , состоит в том, что она должна принимать неотрицательные значения для всех *s S*. Это требование должно сохраняться и для масштабируемой функции приспособленности:

**(4.4.9)**

Однако для некоторых репродукционных множеств масштабируемая функция приспособленности **(4.4.7)** с коэффициентами *at* и *bt* из выражений **(4.4.8)** может принимать отрицательные значения. Такая ситуация возникает обычно, когда большинство кодировок репродукционного множества являются наиболее приспособленными, и их значения необработанной функции приспособленности отличаются друг от друга очень мало, в то время как ряд кодировок этого же множества имеет значения необработанной функции

приспособленности значительно ниже среднего значения приспособленности *.* 

Рисунок 9. Зависимость значений масштабируемой функции приспособленности от для и

Для решения проблемы исключения отрицательных значений масштабируемой функции приспособленности **(4.4.3)** потребуем, чтобы она удовлетворяла следующим двум условиям: 1)

2) – значение масштабированной функции приспособленности «наихудшей» кодировки. С учетом этих условий находим, что коэффициенты at и bt , обеспечивающие неотрицательные значения масштабируемой функции приспособленности, должны вычисляться согласно следующим выражениям:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *at* | *=* | *m****ср*** *(t)* |  |  |
|  |  |  | |
| *m****ср*** *(t) -* |  |
|  |  |  | |
| *bt* | *=* | *m****ср*** *(t) ×* | |  | |
| *m****ср*** *(t) -* | |

**(4.4.10)**

*Зависимость значений масштабированной функции приспособленности от значений необработанной функции приспособленности приведена на данном рисунке.*

**

Рисунок 10. Зависимость значений масштабируемой функции приспособленности от для и

Учитывая выражение **(4.4.3)**, условие **(4.4.9)** для «наихудшей» кодировки из можно записать в следующем виде:

*at + bt* **(4.4.11)**

Тогда, подставляя в неравенство **(4.4.11)** значения at, bt из выражений **(4.4.8)**, получаем неравенство: **(4.4.12)**

Таким образом, при линейном динамическом масштабировании **(4.4.3)**, если неравенство **(4.4.12)** для заданного значения *c* [1.2; 2.0] выполняется, то коэффициенты *at* и *bt* вычисляются с помощью выражений **(4.4.8)**, в противном случае коэффициенты *at* и *bt* вычисляются с помощью выражений **(4.4.10)**. В нашем случае, коэффициенты вычисляются по формуле **(4.4.10)**.

## 4.5 Операторы селекции

***4.5.1 Линейно-ранговая схема селекции***

Схема линейной ранговой селекции (scheme of linear rank selection) основана на том, что в ней вместо значений функции приспособленности используются ранги :

**(4.5.1)**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

– ранг *i-*й кодировки, когда все особи множества , отсортированы в порядке монотонного неубывания значений функции приспособленности.

– нижняя граница ожидаемого числа копий для «наихудшей» особи с наименьшим значением функции приспособленности, имеющей ранг ;

– верхняя граница ожидаемого числа копий для «наилучшей» кодировки с наибольшим значением функции приспособленности, имеющей ранг.

Для того чтобы определить численные значения граничных оценок ожидаемого числа копийи, требуется, чтобы значения,определяемые формулой **(4.5.1)** удовлетворяли следующим условиям:

* значениядолжны монотонно увеличиваться0...по отношению к возрастанию значений функции приспособленности   ... ;
* общая сумма ожидаемого числа копий решений, репродуцируемых в популяцию , должна равняться численности n этой популяции

выбирается из интервала1,2случайным образом или детерминированно, авычисляется по формуле:

На втором этапе селекции был использован алгоритм вероятностного отбора - *остаточный стохастический выбор с возвращением*

* Пусть целая часть числа, а - дробная часть числа,являются действительными числами, определенными на первом этапе оператора селекции.

*Целочисленная фаза.*

* Детерминированно в популяцию репродуцируется копий для каждого решения из репродукционного множества .
* Определяется число недостающих копий v,необходимых для заполнения популяции полностьюvкопиями:

**(4.5.2)**

* Еслиv0,то алгоритм завершает свою работу.

*Дробная фаза.*

* Определяется
* Осуществляется отображение всех решений из в смежные отрезки на оси действительных чисел 0,Nтак, чтобы каждый сегмент *i-*го решения равнялся дробной частиего ожидаемого числа копий .
* Случайным образом с равной вероятностью генерируется число 0, N .
* В качестве копии выбирается то решение, в отрезок которого попало число .
* Процедура стохастического выбора с возвращением повторяется с шага 7 до тех пор, пока не будет получено vкопий. (см. приложение)

***4.5.2турнир***

Схема -турнирной селекции ( - tournament selection) организована следующим образом:

Случайно, с равной вероятностью из выбирается группа из особей. Среди выбранных в группу особей определяется «наилучшая» особь, копия которой репродуцируется в популяцию следующего поколения. Группа особей возвращается в . Процедура выбора копии «наилучших» особей повторяется требуемое число раз. Число решений называется размером турнира. (см. приложение)

Наиболее простым является бинарный турнир, проводимый между двумя решениями *2*

## 4.6 Оператор модификации поколения

***4.6.1) Модификация поколения***

Попадаются задачи, с которыми метод штрафов не справляется - *незначительно* уменьшает функцию приспособленности у недопустимых кодировок, в результате чего алгоритм может сойтись к такой кодировке. Например, случай, когда у особи, не являющейся кодировкой допустимого решения, вес на единицу превосходит ограничение, а функция приспособленности близка к максимальной.

Во избежание такой ситуации после селекции применяется модификация поколения.

Для всех недопустимых кодировок находится удельная стоимость (стоимость/вес) , сортируется в порядке не убывания и, случайным образом с равной вероятностью аллели с значением “1” заменяются на “0”, до тех пор, пока вес не станет допустимым.

# **Классы тестовых задач**

*Для задачи формирования инвестиционного портфеля рассматриваются следующие 4 класса:*

* 1. **Задачи без корреляции**

В этом случае не существует корреляции между стоимостью и весом элемента. Такие примеры иллюстрируют ситуации, когда вес и стоимость независимы. Некоррелированые экземпляры, как правило, легко решить, так как существует большая разница меджу весами, из-за чего легко заполнить ранец.

случайно выбираются из – диапазон

* 1. **Задачи с корреляцией**

Стоимость коррелирует с весом. Как правило, стоимость отличается от веса на пару процентов. Такие случаи - одни из наиболее реалистичных в управлении (возврат инвестиций, как правило, пропорционален вложенной сумме в некоторых небольших вариациях). Корреляция означает трудность в устранении переменных от верхний связанных испытаний.

****

* 1. **Задачи с сильной корреляцией**

Такие случаи соответствуют реальной ситуации, где возвращается линейная функция от инвестиций плюс - минус некоторый фиксированный расход по каждому проекту.

Сильно коррелированые задачи о ранце трудно решить по двум причинам:

* Все аллели вокруг элемента разрыва имеют сходные веса, а это значит, что трудно объединить их таким образом, что бы заполнить ранец.
* Существует очень большая относительная потеря путем удаления мелких взвешенных элементов, что значит, что мы вообще не можем удалить любые мелкие предметы, что бы освободить место для большого предмета.



Такие задачи используются в качестве меры возможности алгоритма для решения сложных проблем. Сортировка по невозрастанию относительной стоимости

соответствует упорядочению согласно неубывания весов. Так для *0-1* рюкзака относительно легко ввести дополнительное ограничение:

, *b –* индекс элемента разрыва **(5.3.1)**

Ограничение говорит, что ни одно решение не будет содержать более предметов, и эти предметы будут самыми лёгкими. Любое решение, содержащее более тяжелые предметы, будет содержать меньшее количество предметов. Ограничения с противоложным неравенством могут быть наложены в том случае, если имеет место быть отрицательная стоимость.

На основании этого наблюдения Martello, Toth разработали эффективный алгоритм для решения сильно коррелированных задач. Но очевидно, что если хотя бы несколько предметов не последуют структуре сильно коррелированной задачи, то ограничение **(5.3.1)** будет слишком слабым, чтобы иметь какой - нибудь эффект.

**5.4 Задачи с подсуммами**

Они отражают ситуацию, когда прибыль каждого элемента является линейной функцией веса. Таким образом, единственная цель состоит в том, что бы получить заполненный ранец. Задачи с подсуммами нетрудно решаемы.

Для всех 4 классов задач емкость рюкзака вычисляется по формуле - .

# **Эксперимент**

Что бы проанализировать программно реализованный эволюционный генетический алгоритм и сделать вывод, с какими комбинациями программа работает эффективнее, мною был написан алгоритм проведения «исследования ЭГА», смысл которого заключается в следующем:

Для проведения исследования задаются начальные данные:

* Количество особей.
* Количество итераций (поколений).
* Так как перебираются все возможные комбинации операторов генетического алгоритма, учитывается задание значения (для – турнира, по умолчанию = 2).
* Количество экспериментов для конкретной задачи из класса задач. Один эксперимент - запуск программы с различными комбинациями операторов генетического алгоритма (всего 48 комбинаций = 48 запусков ГА для одного эксперимента).
* Количество запускаемых задач для каждого тестового класса.

Все отчеты представляют собой Excel таблицу. Они находятся в папке “C:/Users/%UserName%/Documents/gen\_algorithm\_doc/reports\_%CurrentTime%”/ (UserName – имя пользователя компьютера, CurrentTime – текущие дата и время).

Для каждой задачи создается отдельная книга, название которой состоит из типа класса тестовых задач и индекса самой задачи, например “uncorreled\_1.xlsx”, в ней:

* Для каждого эксперимента создается отдельный лист, в котором столбцы – комбинации операторов, а в строках выводится следующая информация:
* Значение функции приспобленности для каждого поколения (всего 40).
* Максимальная функция приспособленности среди всех поколений.
* Количество итераций до сходимости к лучшей особи.
* Последний лист – общий результат экспериментов по данной задаче. В нем столбцы – комбинации операторов, а строки содержат следующую информацию:
* Максимальное значение функций приспособленности среди всех экспериментов.
* Вероятность получения лучшей особи среди всех экспериментов.
* Среднее значение количества итераций до получения лучшей особи среди всех экспериментов.

По всем сумммарным отчётам одного класса задач делается общий отчёт в отдельной книге “(type)\_summary.xlsx”(type – тип задачи) по классу тестовых задач, в котором в строках выводятся комбинации операторов ГА, а в столбцах:

* Минимальное отклонение значения функции приспособленности в процентном соотношении от оптимума (для нахождения оптимума реализован метод полного перебора).
* Средняя вероятность получения лучшей особи в процентах.
* Cреднее количество итераций среди всех задач в процентом соотношении от наибольшего среднего количества итераций до получения лучшей особи (средняя скорость до наилучшего решения).

**Для одного запуска генетического алгоритма взяты следующие параметры:**

* 30 особей
* 40 поколений
* = 14 (для бетта - турнирной селекции)

**Всего проведено 600 экспериментов (28800 запусков ГА), из них:**

* 30 экспериментов на 1 задачу
* По 5 задач на конкретный класс задач
* Всего 4 класса тестовых задач

Для генерации задачи диапазон значений веса и цены - .

Каждая задача прорешена программно методом полного перебора, что бы найти точное решение для исследования.

Отчеты по задачам в приложении.

# **Заключение**

**Результат работы:**

* Был реализован генетический алгоритм для классической задачи о ранце с различными параметрами (2 начальные популяции, 3 кроссовера, 4 мутации, 2 селекции).
* Проведено исследование алгоритма на выявление оптимальных комбинаций из 48 вариантов, описанное в главе 6. По его результатам можно сказать следующее:
* *Для класса тестовых задач без корреляции* оптимальными комбинациями оказались (в порядке невозрастания вероятности до нахождения глобального оптимума, неубывания скорости нахождения глобального оптимума):

1. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Точечная мутация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,95 итерации с вероятностью 72 %*.*
2. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,62 итерации с вероятностью 68,67%.
3. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Транслокация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 16, 93 итерации с вероятностью 69,33%.
4. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,17 итерации с вероятностью 69,33%.
5. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,4 итерации с вероятностью 69,33%.

* *Для класса тестовых задач с корреляцией* оптимальными комбинациями оказались (в порядке невозрастания вероятности до нахождения глобального оптимума, неубывания скорости нахождения глобального оптимума):

1. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Точечная мутация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,57 итерации с вероятностью 22,67 %*.*
2. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 16,6 итерации с вероятностью 20,67 %*.*
3. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 18,32 итерации с вероятностью 20,66%.
4. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Транслокация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,32 итерации с вероятностью 18,67%.
5. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 14,82 итерации с вероятностью 17,33%.

* *Для класса тестовых задач с сильной корреляцией* оптимальными комбинациями оказались (в порядке невозрастания вероятности до нахождения глобального оптимума, неубывания скорости нахождения глобального оптимума):

1. *Алгоритм Данцига. Двуточечный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 15,62 итерации с вероятностью 22,67 %*.*
2. *Алгоритм Данцига. Одноточечный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 15,72 итерации с вероятностью 17,33 %*.*
3. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 14,03 итерации с вероятностью 16%.
4. *Случайный алгоритм. Двуточечный кроссовер. Точечная мутация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,13 итерации с вероятностью 16%.
5. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Транслокация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 13,18 итерации с вероятностью 15,33%.

* *Для класса тестовых задач с подсуммами* оптимальными комбинациями оказались (в порядке невозрастания вероятности до нахождения глобального оптимума, неубывания скорости нахождения глобального оптимума):

1. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 13,1 итерации с вероятностью 84,67 %*.*
2. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 13,78 итерации с вероятностью 80,67 %*.*
3. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Точечная мутация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 14,62 итерации с вероятностью 78%.
4. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 13,23 итерации с вероятностью 76,66%.
5. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Транслокация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 13,01 итерации с вероятностью 74%.

Среди всех классов выявлены следующие оптимальные комбинации:

* *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Комбинация встретилась во всех 4 классах.
* *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Комбинация встретилась в 3 из 4 классов.
* *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Комбинация встретилась в 3 из 4 классов.

В 85% оптимальных комбинаций из 20 вариантов (по 5 лучших комбинаций на каждый класс) в качестве оператора кроссовера выступает однородный кроссовер.

Во всех оптимальных комбинациях в качестве оператора селекции выступает линейная ранговая схема. Это подтверждает теорию о том, что данная схема предотвращает преждевременную сходимость и приводит к наиболее лучшему решению.

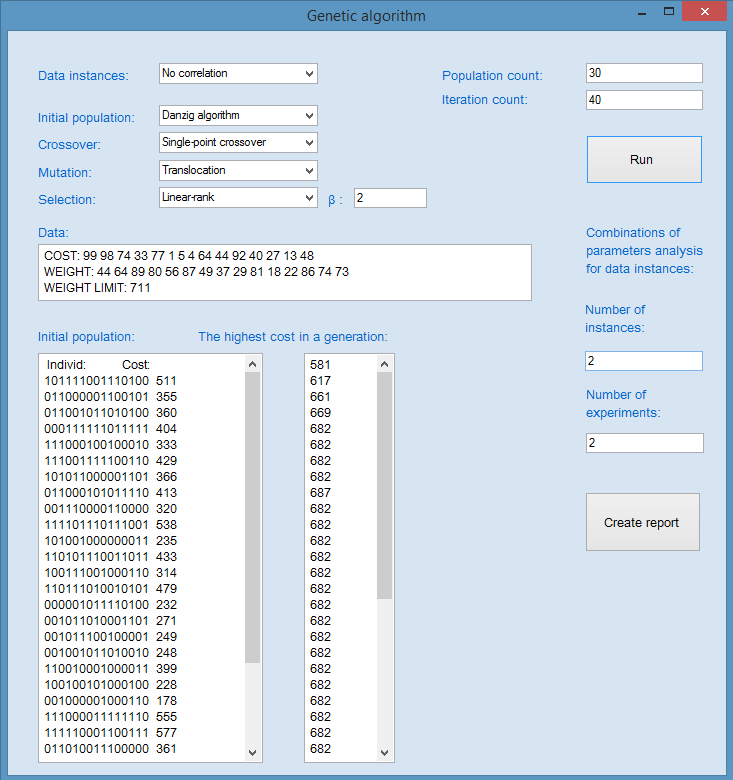
Для классов тестовых задач с корреляцией и с сильной корреляцией вероятность нахождения глобального оптимума не превышает 22,67%, что подтверждает теорию о труднорешаемости таких задач, напротив, для классов тестовых задач без корряции и с подсуммами вероятность нахождения глобального оптимума достигает 72% и 84,67%, соответственно, что говорит о менее трудном нахождении их решения.

# **8. Литература**

1. Д.И. Батищев, Е. А. Неймарк, Н. В. Старостин «Применение генетических алгоритмов к решению задач дискретной оптимизации»,Н.Н,2007.
2. Х. Пападимитриу, К. Стайглиц “Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность”. М.: Мир, 1985.
3. Гери, М. Вычислительные машины и трудноҏешаемые задачи / М. Гери, Д. Джонсон. - М.: Мир, 1982.
4. David Persinger, Algorithms for Knapsack Problems, Ph.D. thesis, February 1995, Dept, of Computer Science, University of Copenhagen, Universitetsparken 1, DK-2100 Copenhagen, Denmark

**9. Приложение**

## 9.1 Пример запуска алгоритма

****

## 9.2 Отчеты по исследованию генетического алгоритма

Для всех задач класса тестовых задач представлен общий отчет по 30 запускам. Для каждого класса тестовых задач представлен суммарный отчет по 5 задачам.

## 9.2.1 Задачи без корреляции

Задача № 9.2.1.1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Цена: | 22 | 13 | 53 | 14 | 14 | 93 | 56 | 39 | 2 | 47 | 76 | 80 | 14 | 17 | 52 |
| Вес: | 50 | 68 | 97 | 91 | 71 | 16 | 61 | 56 | 19 | 39 | 21 | 55 | 51 | 88 | 81 |
| Ёмкость: | 691 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимум : 563

Задача № 9.2.1.2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Цена: | 29 | 48 | 46 | 87 | 60 | 11 | 84 | 20 | 62 | 18 | 91 | 43 | 98 | 22 | 59 |
| Вес: | 98 | 15 | 19 | 9 | 37 | 1 | 68 | 46 | 19 | 75 | 3 | 38 | 31 | 32 | 29 |
| Ёмкость: | 416 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимум : 740

Задача № 9.2.1.3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Цена: | 57 | 15 | 82 | 63 | 89 | 56 | 15 | 69 | 93 | 10 | 46 | 28 | 40 | 100 | 53 |
| Вес: | 3 | 8 | 70 | 28 | 71 | 67 | 68 | 80 | 45 | 51 | 58 | 47 | 26 | 34 | 83 |
| Ёмкость: | 591 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимум : 763

Задача № 9.2.1.4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Цена: | 9 | 94 | 64 | 58 | 97 | 42 | 35 | 92 | 2 | 60 | 100 | 3 | 55 | 23 | 92 |
| Вес: | 25 | 23 | 18 | 8 | 93 | 35 | 74 | 46 | 23 | 66 | 88 | 74 | 98 | 7 | 90 |
| Ёмкость: | 614 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимум : 786

Задача № 9.2.1.5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Цена: | 91 | 3 | 79 | 16 | 55 | 19 | 39 | 84 | 93 | 31 | 71 | 91 | 38 | 15 | 10 |
| Вес: | 38 | 81 | 99 | 45 | 83 | 43 | 73 | 56 | 19 | 18 | 45 | 68 | 31 | 74 | 41 |
| Ёмкость: | 651 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимум : 707

## 9.2.2 Задачи с корреляцией

Задача № 9.2.2.1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Цена: | 28 | 69 | 33 | 60 | 53 | 32 | 85 | 94 | 41 | 32 | 92 | 92 | 91 | 20 | 82 |
| Вес: | 18 | 73 | 39 | 65 | 49 | 39 | 75 | 94 | 31 | 42 | 96 | 92 | 86 | 30 | 84 |
| Ёмкость: | 730 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимум : 751

Задача № 9.2.2.2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Цена: | 36 | 36 | 9 | 108 | 70 | 31 | 58 | 41 | 79 | 54 | 69 | 77 | 74 | 11 | 62 |
| Вес: | 45 | 33 | 14 | 98 | 75 | 29 | 66 | 43 | 76 | 58 | 65 | 87 | 75 | 17 | 66 |
| Ёмкость: | 677 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимум : 670

Задача № 9.2.2.3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Цена: | 82 | 64 | 92 | 15 | 59 | 35 | 54 | 1 | 12 | 92 | 44 | 57 | 23 | 74 | 15 |
| Вес: | 89 | 58 | 82 | 19 | 65 | 42 | 48 | 3 | 8 | 88 | 45 | 47 | 27 | 66 | 14 |
| Ёмкость: | 560 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимум : 594

Задача № 9.2.2.4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Цена: | 80 | 38 | 14 | 20 | 90 | 53 | 36 | 69 | 67 | 64 | 18 | 96 | 12 | 89 | 48 |
| Вес: | 85 | 40 | 12 | 28 | 97 | 44 | 46 | 64 | 62 | 65 | 19 | 88 | 12 | 93 | 45 |
| Ёмкость: | 640 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимум : 650

Задача № 9.2.2.5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Цена: | 95 | 11 | 66 | 56 | 31 | 62 | 101 | 100 | 5 | 83 | 19 | 82 | 32 | 89 | 71 |
| Вес: | 100 | 6 | 61 | 46 | 31 | 65 | 91 | 95 | 6 | 79 | 29 | 79 | 41 | 96 | 67 |
| Ёмкость: | 713 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимум : 741

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9.2.3 Задачи с сильной корреляцией Задача № 9.2.3.1.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | Цена: | 31 | 81 | 96 | 31 | 41 | 15 | 30 | 98 | 22 | 45 | 58 | 50 | 34 | 39 | 59 | | Вес: | 21 | 71 | 86 | 21 | 31 | 5 | 20 | 88 | 12 | 35 | 48 | 40 | 24 | 29 | 49 | | Ёмкость: | 464 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   Оптимум : 593  Задача № 9.2.3.2.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | Цена: | 85 | 93 | 20 | 34 | 53 | 19 | 39 | 33 | 63 | 56 | 88 | 110 | 24 | 47 | 98 | | Вес: | 75 | 83 | 10 | 24 | 43 | 9 | 29 | 23 | 53 | 46 | 78 | 100 | 14 | 37 | 88 | | Ёмкость: | 569 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   Оптимум : 699  Задача № 9.2.3.3.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | Цена: | 47 | 74 | 66 | 80 | 32 | 14 | 109 | 51 | 63 | 91 | 24 | 107 | 93 | 22 | 56 | | Вес: | 37 | 64 | 56 | 70 | 22 | 4 | 99 | 41 | 53 | 81 | 14 | 97 | 83 | 12 | 46 | | Ёмкость: | 623 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   Оптимум : 748  Задача № 9.2.3.4.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | Цена: | 74 | 90 | 23 | 48 | 98 | 105 | 108 | 50 | 90 | 97 | 32 | 43 | 38 | 53 | 63 | | Вес: | 64 | 80 | 13 | 38 | 88 | 95 | 98 | 40 | 80 | 87 | 22 | 33 | 28 | 43 | 53 | | Ёмкость: | 689 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   Оптимум : 817  Задача № 9.2.3.5.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | Цена: | 12 | 84 | 51 | 39 | 18 | 24 | 94 | 52 | 22 | 29 | 71 | 110 | 87 | 36 | 47 | | Вес: | 2 | 74 | 41 | 29 | 8 | 14 | 84 | 42 | 12 | 19 | 61 | 100 | 77 | 26 | 37 | | Ёмкость: | 500 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   Оптимум : 630 9.2.4 Задачи с подсуммами Задача № 9.2.4.1.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | Цена: | 21 | 32 | 19 | 83 | 43 | 96 | 15 | 31 | 3 | 68 | 57 | 97 | 6 | 22 | 86 | | Вес: | 21 | 32 | 19 | 83 | 43 | 96 | 15 | 31 | 3 | 68 | 57 | 97 | 6 | 22 | 86 | | Ёмкость: | 543 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   Оптимум : 543  Задача № 9.2.4.2.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | Цена: | 89 | 41 | 31 | 5 | 20 | 31 | 66 | 77 | 8 | 54 | 73 | 60 | 39 | 12 | 68 | | Вес: | 89 | 41 | 31 | 5 | 20 | 31 | 66 | 77 | 8 | 54 | 73 | 60 | 39 | 12 | 68 | | Ёмкость: | 539 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   Оптимум : 539  Задача № 9.2.4.3.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | Цена: | 59 | 62 | 68 | 75 | 99 | 25 | 44 | 92 | 6 | 82 | 26 | 24 | 97 | 38 | 53 | | Вес: | 59 | 62 | 68 | 75 | 99 | 25 | 44 | 92 | 6 | 82 | 26 | 24 | 97 | 38 | 53 | | Ёмкость: | 680 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   Оптимум : 680  Задача № 9.2.4.4.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | Цена: | 11 | 26 | 34 | 25 | 67 | 61 | 62 | 44 | 95 | 48 | 84 | 3 | 39 | 42 | 78 | | Вес: | 11 | 26 | 34 | 25 | 67 | 61 | 62 | 44 | 95 | 48 | 84 | 3 | 39 | 42 | 78 | | Ёмкость: | 575 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   Оптимум : 575  Задача № 9.2.4.5.   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | Цена: | 3 | 70 | 91 | 99 | 45 | 84 | 50 | 36 | 73 | 68 | 67 | 50 | 5 | 78 | 19 | | Вес: | 3 | 70 | 91 | 99 | 45 | 84 | 50 | 36 | 73 | 68 | 67 | 50 | 5 | 78 | 19 | | Ёмкость: | 670 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   Оптимум : 670 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |