**Содержание**

[**1. Введение** 4](#_Toc514117244)

[1.1 Актуальность 4](#_Toc514117245)

[1.2 Цель работы 5](#_Toc514117246)

[1.3 Методы исследования 5](#_Toc514117247)

[**2. Постановка задачи о ранце** 6](#_Toc514117248)

[2.1 Описание 6](#_Toc514117249)

[2.2 Варианты постановки задачи о ранце 6](#_Toc514117250)

[2.3 Постановка задачи о 0-1 рюкзаке (ЗОР) 7](#_Toc514117251)

[2.3.1 Словесная 7](#_Toc514117252)

[2.3.2 Математическая 7](#_Toc514117253)

[2.4 Постановка задачи о неограниченном рюкзаке (ЗОНР) 7](#_Toc514117254)

[2.4.1 Словесная 7](#_Toc514117255)

[2.4.2 Математическая 8](#_Toc514117256)

[2.5 Свойства задачи о неограниченном рюкзаке 8](#_Toc514117257)

[2.5.1 Доминирование 8](#_Toc514117258)

[2.5.2 Периодичность 9](#_Toc514117259)

[2.6 Области применения задачи о ранце 10](#_Toc514117260)

[2.6.1 Изучение в математике 10](#_Toc514117261)

[2.6.2 Изучение в экономике 10](#_Toc514117262)

[2.6.3 Изучение в криптографии 11](#_Toc514117263)

[**3. Рассматриваемые алгоритмы решения** 14](#_Toc514117264)

[3.1 Точные алгоритмы решения ЗОР 14](#_Toc514117265)

[3.1.1 Метод динамического программирования 14](#_Toc514117266)

[**3.1.2 Метод ветвей и границ** 14](#_Toc514117267)

[3.2 Точные алгоритмы для ЗОНР 17](#_Toc514117268)

[3.2.2 Алгоритм эффективного динамического программирования 17](#_Toc514117269)

[3.3 Приближенные алгоритмы 18](#_Toc514117270)

[3.2.2 Генетический алгоритм 18](#_Toc514117271)

[3.3 Классификация алгоритмов 19](#_Toc514117272)

[**4. Предлагаемый метод решения задачи о ранце** 21](#_Toc514117273)

[**4.1 Операторы создания начальной популяции** 23](#_Toc514117274)

[4.2 Операторы скрещивания 23](#_Toc514117275)

[4.3 Операторы мутации 24](#_Toc514117276)

[4.4 Оператор обработки ограничений 25](#_Toc514117277)

[4.5 Операторы селекции 29](#_Toc514117278)

[4.6 Оператор модификации поколения 31](#_Toc514117279)

[**5. Классы тестовых задач** 32](#_Toc514117280)

[**5.1 Задачи без корреляции** 32](#_Toc514117281)

[**5.2 Задачи с корреляцией** 32](#_Toc514117282)

[**5.3 Задачи с сильной корреляцией** 33](#_Toc514117283)

[**6. Эксперимент** 35](#_Toc514117284)

[6.1 Описание 35](#_Toc514117285)

[6.2 Результаты 36](#_Toc514117286)

[**7. Заключение** 40](#_Toc514117287)

[**8. Литература** 42](#_Toc514117288)

[**9. Приложение** 43](#_Toc514117289)

# **1. Введение**

## 1.1 Актуальность

Классическая задача о ранце относится к числу широко известных задач дискретной оптимизации. Впервые она была сформулирована Д. Данцигом и с тех пор находится в активном исследовании. Основные сферы применения находятся в областях планирования и управления экономическими, производственными и транспортными системами. В частности, формулируемые в рамках классической задачи о ранце задачи объемного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства, сбора биржевого пакета и загрузки транспортных средств (складское планирование).

В работе рассматривается задача формирования инвестиционного портфеля, где в роли цены акции выступает вес, а выгодностью акции является цена в классической задачи о ранце.

Классическая задача о рюкзаке – NP - трудная задача с множеством применений.

Предлагаемый метод решения задачи о ранце – **генетический алгоритм**. Данный алгоритм выбран в качестве **объекта исследования**.

Генетические алгоритмы — широко развивающийся класс оптимизационных алгоритмов, использующих идеи искусственного интеллекта и предназначенный для ведения направленного поиска. С их помощью могут быть найдены решения многих задач в различных областях, таких как составление расписаний, построение конечных автоматов, построение и настройка искусственных нейронных сетей и т.д.

**Эффективность использования ГА, заключается в следующем:**

Если о пространстве поиска задачи есть некоторая дополнительная информация (как, например, пространство для известной задачи о ранце), метод поиска ГА, использующий эвристики, определяемые пространством, часто превосходит любой универсальный метод. При достаточно сложном рельефе функции приспособленности методы поиска с единственным решением в каждый момент времени, например, простой метод спуска, могли "затыкаться" в локальном решении, однако ГА, так как они работают с целой "популяцией" решений, имеют меньше шансов сойтись к локальному оптимуму и робастно функционируют на многоэкстремальном ландшафте.

Конечно, такие предположения не предсказывают строго, когда ГА будет эффективной процедурой поиска, конкурирующей с другими алгоритмами.

Эффективность ГА сильно зависит от таких деталей, как метод кодировки решений, операторы, числовые параметры (количество итераций, количество особей и т. д.), частный критерий успеха.

В моей работе в качестве **предмета исследования выбран подбор параметров ГА для наиболее эффективного поиска решения задачи формирования инвестиционного портфеля**.

**Актуальность** исследования предопределена широкой распространенностью и важностью различных прикладных проблем, решаемым генетическим алгоритмом.

## 1.2 Цель работы

Главной целью моей работы является:

* Реализация генетического алгоритма для классической задачи о ранце.
* Подбор параметров ГА для наиболее эффективного поиска решения задачи формирования инвестиционного портфеля (ЗФИП).

ЗФИП имеет особенности в виде корреляций между ценой и весом, поэтому исследование проводится для 4 классов тестовых задач:

* задачи без корреляции,
* коррелированные задачи,
* сильнокоррелированные задачи,
* задачи с подсуммами.

Оптимизация инвестиционного портфеля с помощью генетических алгоритмов повышает качество инвестирования финансовых средств в виде надеждого сбережения капитала или получения максимального дохода при допустимом риске.

## 1.3 Методы исследования

В качестве метода исследования выступает эксперимент, который описан в главе 6.

# **2. Постановка задачи о рюкзаке**

## 2.1 Описание

Задача о ранце (рюкзаке) — оптимизационная задача укладки максимального числа ценных предметов в рюкзак при условии, что общая его емкость ограничена. Она является актуальной и достаточно востребованной с точки зрения приложения в реальной жизни. Задача о загрузке и её модификации возникают в таких областях, как: прикладная математика, экономика, криптография, генетика и логистика (например, для нахождения оптимальной загрузки транспорта или склада). Классическая ЗОР - *NP-*трудная задача комбинаторной оптимизации. ??

## 2.2 Варианты постановки задачи о рюкзаке[[1]](#footnote-1)

Существует множество разновидностей задачи о ранце, отличия заключаются в условиях, наложенных на рюкзак, предметы или их выбор.

1. **Рюкзак 0-1** ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) 0-1 Knapsack Problem): не более одного экземпляра каждого предмета.
2. **Ограниченный рюкзак** (англ. Bounded Knapsack Problem) - обобщение классической задачи, когда любой предмет может быть взят некоторое количество раз.
3. **Неограниченный рюкзак** (целочисленный рюкзак) ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Unbounded Knapsack Problem (integer knapsack)): произвольное количество экземпляров каждого предмета.
4. **Непрерывный рюкзак** (англ. Continuous knapsack problem) - вариант задачи, в котором возможно брать любою дробную часть от предмета, при этом удельная стоимость сохраняется.
5. **Рюкзак с мультивыбором** ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Multiple-choice Knapsack Problem): предметы разделены на группы, и из каждой группы требуется выбрать только один предмет.
6. **Мультипликативный рюкзак** ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Multiple Knapsack Problem): есть несколько рюкзаков, каждый со своим максимальным весом. Каждый предмет можно положить в любой рюкзак или оставить.
7. **Многомерный рюкзак** ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Multy-dimensional knapsack problem): вместо веса дано несколько разных ресурсов (например, вес, объём и время укладки). Каждый предмет тратит заданное количество каждого ресурса. Надо выбрать подмножество предметов так, чтобы общие затраты каждого ресурса не превышали максимума по этому ресурсу, и при этом общая ценность предметов была максимальна.

В данной работе мы будем рассматривать задачи 1 и 3.

## 2.3 Постановка задачи о 0-1 рюкзаке (ЗОР)

## 2.3.1 Словесная

Пусть дан набор предметов, каждый из которых имеет два параметра – вес и ценность. Дан рюкзак c заданным значением емкости. Задача заключается в том, чтобы заполнить рюкзак предметами, получить максимальную суммарную ценность, соблюдая при этом весовое ограничение.

## 2.3.2 Математическая

Пусть дано n предметов. Для каждого i-го предмета задан вес *> 0* и ценность  *> 0, i =1,.., n.* Задано ограничение на максимальный вес рюкзака . Каждый может принимать только одно из двух значений: *xi = 1*, если *i-*й предмет попадает в рюкзак, или*,* в противном случае. Требуется выбрать из заданного множества предметов набор с максимальной суммарной ценностью при одновременном соблюдении ограничения на суммарный вес найденного набора .

**(2.3.1)**

## 2.4 Постановка задачи о неограниченном рюкзаке (ЗОНР)

## 2.4.1 Словесная

Пусть дан набор предметов, каждый из которых имеет два параметра – вес и ценность. Каждый предмет можно класть неограниченное число раз. Дан рюкзак c заданным значением емкости. Задача заключается в том, чтобы заполнить рюкзак предметами, получить максимальную суммарную ценность, соблюдая при этом весовое ограничение.

## 2.4.2 Математическая

Пусть дано n предметов. Для каждого i-го предмета задан вес *> 0* и ценность  *> 0, i =1,.., n.* Задано ограничение на максимальный вес рюкзака . Каждый может принимать значение в диапазоне. Требуется выбрать из заданного множества предметов набор с максимальной суммарной ценностью при одновременном соблюдении ограничения на суммарный вес найденного набора .

**(2.4.1)**

## 2.5 Свойства задачи о неограниченном рюкзаке

## 2.5.1 Доминирование

Если i-й предмет менее выгодный и тяжелее чем j-й предмет, то он никогда не будет присутствовать в оптимальном решении, так как всегда лучше заменить любую копию i-ого предмета одной или более копиями j-ого предмета без уменьшения выгодности.

Такое отношение между предметами называется **однократным доминированием**. Его расширением является **множественное доминирование,** при котором i-й предмет множественно доминируем j-ым предметом, если *,* то есть всегда лучше заменить одну копию i-ого предмета копиями j-ого предмета.

Существует **пороговое доминирование**, при котором i-й предмет порогово доминируем набором предметов , если, для  *,* то есть всегда лучше заменить копий i-ого предмета некоторой линейной комбинацией предметов Для случая доминирование называется **коллективным**.



Рисунок 1. Типы доминирования

*Для каждой ЗОНР всегда существует оптимальное решение, которое не содержит любые просто-, множественно- или коллективно-доминируемые типы предметов.*

Это означает, что любые просто-, множественно- или коллективно-доминируемые типы предметов могут быть отброшены без изменения оптимального решения, значительно уменьшая пространство поиска.

## 2.5.2 Периодичность

Периодичность – это свойство ЗОНР, которое устанавливает, что емкость, большая чем некоторая емкость будет использовать только лучший предмет. И так, когда такая емкость достигнута (например, методом динамического программирования), оптимальное решение может быть вычислено по следующей формуле:

**(2.5.1)**

## 2.6 Области применения задачи о ранце

Задача о ранце имеет применение в различных областях знаний: в математике, в экономике, информатике, криптографии. В вычислительной лингвистике в одной из работ предложена формулировка задачи [автоматического реферирования текстов](https://en.wikipedia.org/wiki/Automatic_summarization) (англ.)[русск.](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%90%D0%B2%D1%82%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B5%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D1%82%D0%B5%D0%BA%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B2&action=edit&redlink=1), вырожденный (более простой) случай которой соответствует постановке задачи о ранце.

## 2.6.1 Изучение в математике[[2]](#footnote-2)

Одно из первых упоминаний о задаче о ранце можно найти в статье [Джорджа Балларда Мэтьюса](https://en.wikipedia.org/wiki/George_Ballard_Mathews) (англ.)[русск.](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D1%8D%D1%82%D1%8C%D1%8E%D1%81,_%D0%94%D0%B6%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B6_%D0%91%D0%B0%D0%BB%D0%BB%D0%B0%D1%80%D0%B4&action=edit&redlink=1), датированной 1897 годом. Интенсивное изучение данной проблемы началось после публикации [Д. Б Данцигом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B0%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B3,_%D0%94%D0%B6%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B6) в 1957 году книги «[англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Discrete Variable Extremum Problem», особенно в 70-90-е годы 20-го века, как теоретиками, так и практиками. Во многом, данный интерес вызван достаточно простой формулировкой задачи, большим числом её разновидностей и свойств и в то же время сложностью их решения.

С практической точки зрения задача о рюкзаке может служить моделью для большого числа промышленных ситуаций:

* Размещение грузов в помещении минимального объёма.
* Раскройка ткани — для заданного куска материала получить максимальное число выкроек определенной формы.
* Расчет оптимальных капиталовложений.

С задачей о ранце сталкивается любой человек, собирающий рюкзак.

## 2.6.2 Изучение в экономике

Часто модификации задачи о ранце имеют практическое значение в экономике.

Предположим, что у нас есть 1000 миллионов долларов, которые нужно вложить в несколько возможных инвестиций. Каждое из этих вложений имеет различную стоимость и различный ожидаемый доход (выгодность). Мы должны решить, как потратить деньги, чтобы получить максимальную прибыль.  
 Подобные задачи называются задачами формирования инвестиционного портфеля. У нас есть несколько позиций (инвестиций), которые должны поместиться в портфель фиксированного размера (1000 миллионов долларов). Каждая позиция имеет свою прибыльность (выгодность). Необходимо найти набор позиций, которые помещаются в портфель и дают максимальную прибыль.

При составлении портфеля инвестор должен учитывать следующие факторы: степень риска - доходности, срок вложения, тип ценной бумаги. В зависимости от инвестиционной цели инвестор формирует портфель определенного типа. Сейчас принято выделять следующие типы портфелей.

* **Портфели роста**. Целью такого типа является рост капитала преимущественно не за счет получения дивидендов и процентов, а за счет роста курса ценных бумаг. По-другому такой портфель называют курсовым портфелем. Основные вложения делаются преимущественно в акции. В зависимости от соотношения ожидаемого роста капитала и риска можно выделить среди портфелей роста еще и виды портфелей:
  + **Портфели дохода.** Целью этого типа портфелей является получение дохода за набор дивидендов и процентов. Этот тип обеспечивает заранее спланированный уровень дохода при почти нулевом риске. Объектами инвестирования данного типа портфелей выступают высоконадежные ценные бумаги. По-другому портфель называют дивидендным.

Для портфелей роста свойственно быстрое изменение их структуры в зависимости от изменения курсов, входящих в портфель ценных бумаг. Портфели доходов имеют почти постоянные состав и структуру.

Перечисленные типы и виды представляют спектр возможных портфелей, но на практике инвесторы часто формируют портфели смешанного типа.

Наибольший вклад в создании теории инвестиционного портфеля был внесен американскими учеными Г. Марковицем и У. Шарпом, получившими за достижение в этой области Нобелевскую премию в 1990г.

Существует несколько моделей определения характеристик инвестиционного портфеля:

* Модель Марковица
* Модель Шарпа
* Модель «Квази - Шарп»

## 2.6.3 Изучение в криптографии[[3]](#footnote-3)

Проблема рюкзака лежит в основе первого алгоритма [асимметричного шифрования](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D1%81_%D0%BE%D1%82%D0%BA%D1%80%D1%8B%D1%82%D1%8B%D0%BC_%D0%BA%D0%BB%D1%8E%D1%87%D0%BE%D0%BC) (шифрования с открытым ключом). Идея [криптографии](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%BF%D1%82%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8%D1%8F) с открытыми ключами была выдвинута [Уитфилдом Диффи](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%B8%D1%82%D1%84%D0%B8%D0%BB%D0%B4_%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B8), [Мартином Хеллманом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A5%D0%B5%D0%BB%D0%BB%D0%BC%D0%B0%D0%BD,_%D0%9C%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD) и независимо — [Ральфом Мерклом](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Ralph_Merkle&action=edit&redlink=1) ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Ralph Merkle). Впервые она была представлена Диффи и Хеллманом на Национальной компьютерной конференции ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) National Computer Conference). Новизна по отношению к [симметричным криптосистемам](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BC%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B) заключалась в использовании парных ключей — секретного ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) private key, secret key, SK) и открытого ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) public key, PK), создаваемых пользователем. Из названия понятно, что секретный ключ пользователь должен скрывать, а открытый может быть общедоступным. Открытый ключ нужен для шифрования, а секретный для расшифровки. Часто из секретного ключа получают открытый ключ.

**Криптосистема Меркла-Хеллмана** — первый, основанный на задаче о ранце, алгоритм для обобщённого шифрования с [открытым ключом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D1%81_%D0%BE%D1%82%D0%BA%D1%80%D1%8B%D1%82%D1%8B%D0%BC_%D0%BA%D0%BB%D1%8E%D1%87%D0%BE%D0%BC). Разработан Ральфом Мерклом и Мартином Хеллманом в 1978 году. Был опубликован одностадийный ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) singly-iterated) и мультистадийный варианты ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) multiply-iterated). Алгоритм мог быть использован только для шифрования, но [Ади Шамир](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%80,_%D0%90%D0%B4%D0%B8) адаптировал его для использования в [цифровых подписях](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%86%D0%B8%D1%84%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D0%BF%D0%B8%D1%81%D1%8C).

В дальнейшем было предложено как множество модификаций криптосистемы Меркла-Хеллмана, так и совершенно новых криптосистем на основе задачи о ранце. Среди них:

1. Рюкзак Грэм-Шамира
2. Рюкзак Гудмана-Макколи
3. Рюкзак Накаше-Штерна
4. Рюкзак Шора-Ривеста

**Шифрование с помощью задачи о рюкзаке**

Сообщение шифруется как решение набора задач о ранце.

Рюкзачным вектором назовём упорядоченный набор из n предметов.

Для шифрования [открытого текста](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D0%BA%D1%80%D1%8B%D1%82%D1%8B%D0%B9_%D1%82%D0%B5%D0%BA%D1%81%D1%82) в двоичном представлении его разбивают на блоки длины  (например,  (11100) соответствует 5-ти предметам в рюкзаке). Считается, что единица указывает на наличие предмета в рюкзаке, а ноль на его отсутствие.

**Пример** шифротекста, полученного по данному алгоритму.

Пусть задан рюкзачный вектор Α = (3 4 6 7 10 11) с длинной n = 6.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| открытый текст | 1 1 1 1 1 0 | 0 0 1 1 0 0 | 0 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 1 |
| вещи в рюкзаке | 3 4 6 7 10 11 | 3 4 6 7 10 11 | 3 4 6 7 10 11 | 3 4 6 7 10 11 |
| шифротекст | 3 + 4 + 6 + 7 + 10 = 30 | 6 + 7 = 13 | 0 | 11 |

Таблица 1. Пример шифрования

Для заданного Α - все криптосистемы - есть числа, не превышающие 41, суммарный вес всех предметов в рюкзачном векторе. Для каждого исходного текста существует единственный криптотекст. В указанном примере можно получить одинаковый шифротекст для векторов 100010 и 001100. Ошибка?

Верно, ошибка. Для шифрования необходим сверхвозрастающий рюкзак, то есть элементы упорядоченного рюкзачного вектора должны являться [сверхвозрастающей последовательностью.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%B2%D0%BE%D0%B7%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%8E%D1%89%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C)

**2.6.4 Изучение в информатике**

При решении задачи о ранце всегда нужно выбирать между точными алгоритмами, которые не применимы для «больших» рюкзаков, и приближенными, которые работают быстро, но не обеспечивают точного решения задачи. Естественно, создание быстрого и достаточно точного алгоритма представляет большой интерес с точки зрения информатики.

# **3. Рассматриваемые алгоритмы решения**

## 3.1 Точные алгоритмы решения ЗОР

### 3.1.1 Метод динамического программирования

В основе метода динамического программирования (ДП) лежит принцип оптимальности Беллмана:” Каково *бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбирать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на этом шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был оптимальным*”. Проще говоря, оптимум на i-ом шаге находится исходя из найденных ранее на предшествующих шагах. Из этого следует, что для того чтобы найти оптимальное решение на последнем шаге надо сначала найти оптимальное решения для первого, затем для второго и так далее пока не пройдем все шаги до последнего.

оптимальное решение для текущей задачи:

**(3.1.1)**

находится по следующей формуле:

**(3.1.2)**

вычисляется по рекуррентной формуле*:*

**(3.1.3)**

В работе рассмотрены два подхода к реализации ДП:

* *Табличный* (прямой). По формуле (3.1.3) последовательно вычисляются ячейки таблицы n x W.
* *Рекуррентный (обратный). По формуле (3.1.3) рекурсивно вычисляется . В обратном методе вычисляются только необходимые ячейки таблицы.*

**3.1.2 Метод ветвей и границ**

[Метод ветвей и границ](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%B2%D0%B5%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%B9_%D0%B8_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86) является вариацией метода полного перебора с исключением заведомо неоптимальных решений.

Пусть есть оптимальное решение  . Попытаемся его улучшить, рассмотрев решение на другой ветви. Если на рассматриваемой в данной момент ветви решение становится хуже (с какого-то шага), чем , то прекращаем его исследование и выбираем другую ветвь дерева.

Применяя метод ветвей и границ, можно значительно сократить количество вариантов для перебора. Однако метод ветвей и границ работает не для всех наборов данных. Существуют примеры, в которых время выполнения будет таким же, как и для простого перебора.

**Применение метода ветвей и границ:**

При использовании метода ветвей и границ строится сеть. По оси  откладываем количество предметов, по оси  — их вес. На первом шаге из начала координат строятся две линии: горизонтальная, соответствующая тому, что первый предмет не был взят, и наклонная, соответствующая взятому первому предмету. Их проекции на ось  равны весу предмета. На втором шаге опять строим 2 линии, горизонтальная (второй предмет не был взят) или наклонная (второй предмет взят). Положим длину горизонтальных дуг равной нулю, а наклонных — ценности предмета.

Таким образом, любому решению задачи соответствует некоторый путь в сети. Наша задача свелась к нахождению пути максимальной длины.

**Пример:** Пусть вместимость рюкзака .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i | Ценность | Вес |
| 1 | 3 | 5 |
| 2 | 5 | 10 |
| 3 | 4 | 6 |
| 4 | 2 | 5 |

Таблица 2. Пример задачи о ранце

На рисунке (Рисунок 4), в квадратных скобках [] стоит суммарная ценность на каждом шаге алгоритма. Видно, что для конкретного примера она равна 17.

****

Рисунок 4. График нахождения оптимума методом ветвей и границ

Рассмотрена следующая реализация метода ветвей и границ:

1. Создаем узел 1. {(индекс предмета)}. Добавляем узел 1 в контейнер. Тип контейнера зависит от выбранного пользователем обхода: в глубину – стек, в ширину – очередь. Создаем нижнюю оценку .
2. *Если* контейнер пуст*,*  – искомое оптимальное решение. *Иначе*, вынимаем узел из контейнера. Создаем узел :

**(3.1.4)**

Если то устанавливаем .

1. Если , не добавляем этот узел в контейнер.
2. Считаем нижнюю оценку для текущего узла. Если нижняя оценка больше, чем, добавляем узел в контейнер.
3. Создаем узел . Узел, который не содержит предмет в решении.

**(3.1.5)**

Считаем нижнюю оценку для текущего узла. Если нижняя оценка больше, чем, добавляем узел в контейнер. Возвращаемся к шагу 2.

В качестве алгоритма нахождения нижней оценки выбрана **жадная нижняя оценка**. Предметы, нерассмотренные в текущем решении, сортируются по невозрастанию удельной стоимости и заполняют рюкзак, если не превышают его объем.????

Перед запуском метода ветвей и границ предметы сортируются по невозрастанию удельной стоимости.

## 3.2 Точные алгоритмы для ЗОНР

## 3.2.2 Метод эффективного динамического программирования (ЭДП)

Данный алгоритм состоит из двух основных фаз: **фаза сокращения** и **стандартная фаза**.

***Предварительная обработка***

ЭДП не требует предварительной обработки, так как любой тип предмета обрабатывается после того, как будет посчитан каждый объем, меньший чем вес текущего предмета, то есть будет уже посчитан для каждого предмета j с . Преимущество данного подхода в том, что просто-, множественно- и коллективно-пороговые доминирования могут быть определены простым тестом, выполняющимся за для каждого типа предмета: если для i-ого предмета выполняется неравенство , то i-ый предмет никогда не будет использоваться в оптимальном решении, поэтому он не попадает в набор недоминируемых предметов.

***Фаза сокращения***

На этом этапе предметы обрабатываются в срезах по t, отсортированные по увеличению веса. Держится список недоминируемых элементов F, упорядоченных по невозрастанию удельной стоимости (соотношению цены и веса). В начале F пусто, . Для каждого элемента вычисляется следующим образом:

**(3.2.1)**

– текущая емкость

Если прибыль i-ого предмета больше чем текущая , то i-й предмет попадает в F. В противном случае, он отбрасывается, как порогово-доминируемый.

***Определение порогового доминирования***

В конце каждого среза предметов проверяется пороговое доминирование для каждого предмета. Предмет является порогово-доминируемым для емкостей, больших чем , если он неэффективный для какого-нибудь ранца с емкостью .

Чтобы эффективно определить это, вектор L сохраняет последнюю посчитанную емкость для каждого i-ого предмета***,*** где i-йбыл наиболее эффективным, используемым в оптимальном решении. Для поддержания данного вектора действительным, F сортируется по невозрастанию удельной стоимости, устанавливается равным , если . Итак, если полностью посчитана, любой предмет, для которого *,* может быть удален.

***Стандартная фаза***

На этом шаге высчитывается в срезах по q емкостям. В конце каждого среза проверяется пороговое доминирование для каждого предмета таким же образом, как описано выше. Если мощность F достигает единицы, алгоритм останавливается и использует формулу **периодичности**(2.5.1) для вычисления оптимального решения. Если этого не происходит, алгоритм останавливается, когда емкость достигает .

***Параметры***

Алгоритм требует два параметра:

* t– размер срезов предметов в фазе сокращения;
* q – размер срезов емкости в стандартной фазе.

В конце каждого среза проверяется пороговое доминирование для каждого предмета из F. Если значения параметров будут слишком малы, проверка будет занимать значительный промежуток времени. Если же они будут слишком велики, предметы, которые требуется удалить, будут занимать много времени в процедуре удаления. Подбор параметров t и q не исследуется в данной работе, но планируется в дальнейших работах.

Количество примитивных операций, выполняющихся в данном алгоритме, зависит от размера рюкзака и от количества предметов. Данный алгоритм можно рассматривать как вычисление таблицы. Хотя в большинстве реальных случаев периодичность достигается до вычисления , худший случай все еще может произойти. Заметим, что поскольку сложность алгоритма ограничена не размером задачи, а числовым значением ввода, его временная сложность называется псевдо-полиномиальной.

## 3.3 Приближенные алгоритмы

### 3.2.2 Генетический алгоритм

[Генетические алгоритмы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BD%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC) были предложены [Джоном Генри Холландом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A5%D0%BE%D0%BB%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B4,_%D0%94%D0%B6%D0%BE%D0%BD_%D0%93%D0%B5%D0%BD%D1%80%D0%B8) в 1970 годуи относятся к так называемым [метаалгоритмам](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%B0%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC). Идея — составление алгоритмов поиска на основе биологической модели механизмов [естественного отбора](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BE%D1%82%D0%B1%D0%BE%D1%80). Базовыми понятиями являются: популяция, отбор, мутация, скрещивание.

[***Популяция***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BF%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D1%8F)***.*** Составляется набор бинарных строк ([хромосом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A5%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D1%81%D0%BE%D0%BC%D0%B0)), возможных решений. На основе первой («старой») популяции строится вторая («новая») популяция решений, которая служит «старой» для третьей популяции и т.д

[***Отбор***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D0%B1%D0%BE%D1%80)***.*** Задается функция выбора, согласно которой, лучшие представители «старой» популяции выбираются для воспроизводства «новой». Следовательно, алгоритм выбирает наилучшее решение.

[***Скрещивание***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%89%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5)***.*** Для пары строк («родителей») с определенной длиной r выбирается произвольное число . «Родители» обмениваются между собой битами с s + 1 - го по -й и получаются две новые строки («потомки»).



Рисунок 6. Скрещивание хромосом. «Родители» обмениваются последними пятью битами и образуют новые хромосомы — «потомки»

[***Мутация***](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D1%83%D1%82%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F)***.*** Изменение, происходящее с определенной [вероятностью](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C).

Содержимое рюкзака представляется в виде хромосом или бинарных строк, i-й бит которых равен единице в случае наличия предмета в рюкзаке, нулю — в случае его отсутствия. Задается целевая функция  — вместимость рюкзака.

Отбор осуществляется следующим образом.

Выбирается произвольная хромосома. Пусть   — максимальное расхождение между целевой функцией и хромосомой.  суммарный вес всех предметов, входящих в рюкзачный вектор.  — вес рюкзака при выбранной хромосоме.

Если  то хромосома оценивается числом  .

Если  то хромосома оценивается числом .



Рисунок 7. Стадии генетического алгоритма

Алгоритм прерывается после заданного числа итераций.

Генетический алгоритм не гарантирует нахождение оптимального решения, однако показывает хорошие результаты за меньшее время по сравнению с другими алгоритмами.

# **4. Предлагаемый метод решения задачи о ранце**

*Для решения задачи комбинаторной оптимизации был выбран и запрограммирован* ***генетический алгоритм****.*

**Генети́ческий алгори́тм** ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) genetic algorithm) — это [эвристический алгоритм](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B2%D1%80%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC) поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путём случайного подбора, комбинирования и вариации искомых параметров с использованием механизмов, аналогичных [естественному отбору](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BE%D1%82%D0%B1%D0%BE%D1%80) в природе. Является разновидностью [эволюционных вычислений](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D1%8E%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%B2%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F), с помощью которых решаются оптимизационные задачи с использованием методов естественной эволюции, таких как: [наследование](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_(%D0%B1%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%8F)), [мутации](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D1%83%D1%82%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F), [отбор](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BE%D1%82%D0%B1%D0%BE%D1%80) и [кроссинговер](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80). Отличительной особенностью генетического алгоритма является акцент на использование оператора «скрещивания», который производит операцию рекомбинации решений-кандидатов, роль которой аналогична роли скрещивания в живой природе.

Интерпретация задачи о ранце и операторов генетического алгоритма с помощью понятий популяционной генетики[[4]](#footnote-4):

Наименьшей неделимой единицей биологического вида, подверженной действию факторов эволюции, является особь , (индекс *k* обозначает номер особи, а индекс *t* – некоторый момент времени эволюционного процесса). В качестве аналога особи *,* примем произвольное допустимое решение, которому присвоено имя . Действительно, вектор управляющих переменных – это наименьшая неделимая единица, характеризующая в задаче о ранце внутренние параметры на каждом *t-*м шаге поиска оптимального решения, которые изменяют свои значения в процессе максимизации критерия оптимальности *Q*. Как уже было отмечено, символьная модель экстремальной задачи о ранце может быть представлена в виде множества двоичных кодировок, которые описывают конечное множество допустимых решений принадлежащих области поиска . Для описания особей введем два типа вариабельных признаков, отражающих качественные и количественные различия между особями по степени их выраженности:

• качественные признаки – признаки, которые позволяют однозначно разделять совокупность особей на четко различимые группы;

• количественные признаки – признаки, проявляющие непрерывную изменчивость, в связи с чем степень их выраженности можно охарактеризовать числом. Качественные признаки особи , определяются из символьной модели задачи - как кодировка *s(x)*, соответствующая точке с именем и составляющие ее . Приведем интерпретацию этих признаков в терминах хромосомной теории наследственности. В качестве гена – единицы наследственного материала, ответственного за формирование альтернативных признаков особи, примем комбинацию , которая определяет фиксированное значение целочисленного кода управляющей переменной . Каждая особь характеризуется n генами, а структуру строки можно интерпретировать хромосомой, содержащей *n* сцепленных между собой генов, которые следуют друг за другом в строго определенной последовательности. Хромосому особи будем обозначать , т.е.

**(4.1)**

Согласно хромосомной теории наследственности передача генетической информации будет осуществляться через хромосомы от «родителей» к «потомкам». Местоположение определенного гена в хромосоме называется локусом, а альтернативные формы одного и того же гена, расположенные в одинаковых локусах хромосомы, называются аллелями (аллелеформами). В задаче поиска *i-*й локус соответствует *i-*й позиции в строковой кодировке *s(x)*, а аллели – это аналоги множества значений управляющих переменных.

Задача формализуется таким образом, чтобы её решение могло быть закодировано в виде [вектора](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80_(%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5)) («[генотипа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%B8%D0%BF)») генов, где каждый ген может быть [битом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D1%82), числом или неким другим объектом. В классических реализациях генетического алгоритма (ГА) предполагается, что генотип имеет фиксированную длину. Однако существуют вариации ГА, свободные от этого ограничения.

Некоторым, обычно случайным, образом создаётся множество генотипов начальной популяции. Они оцениваются с использованием «функции приспособленности», в результате чего с каждым генотипом ассоциируется определённое значение («приспособленность»), которое определяет насколько хорошо [фенотип](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B5%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%B8%D0%BF), им описываемый, решает поставленную задачу. При выборе «функции приспособленности» (или fitness function в англоязычной литературе) важно следить, чтобы её «рельеф» был «гладким».

**Операторы, реализованные в программе:**

**4.1 Операторы создания начальной популяции**

***4.1.1 Алгоритм Данцига для линейной одномерной задачи о ранце***

Начальная популяция генерируется в зависимости от удельной стоимости. Удельная стоимость (стоимость/вес) сортируется в порядке невозрастания, помещается в рюкзак то, что помещается и одновременно и самое дорогое, т.е с максимальным отношением цены к весу.

Что бы получить несколько особей, введен элемент случайности - предметы с вероятностью 50% могут попасть в рюкзак.

***4.1.2 Случайный алгоритм***

Полностью рандомно генерируются случайные особи с учётом функции приспособленности.

## 4.2 Операторы скрещивания[[5]](#footnote-5)

Механизм размножения с помощью операторов кроссовера прост, т. к. содержит следующие простейшие операции:

* генерация случайных чисел;
* копирование строк фиксированной длины , являющихся «родительскими» кодировками;
* обмен кусками «родительских» кодировок, разрываемых в одной и той же точке хромосомы.

Применение этих операторов приводит к тому, что кодировки-потомки будут содержать новые сочетания аллелей генов, принадлежащих кодировкам родителей, т.е. происходит только перераспределение суще-ствующих аллелей родителей по хромосомам потомков.

***4.2.1 Одноточечный кроссовер***

Одноточечный кроссовер работает следующим образом.

Сначала, случайным образом выбирается одна точка разрыва из  интервала с вероятностью *.* Точка разрыва - участок между соседними битами в строке. Обе родительские структуры разрываются на два сегмента по этой точке. Затем, соответствующие сегменты различных родителей склеиваются и получаются два генотипа потомков.

***4.2.2 Двуточечный кроссовер***

«Родительские» кодировки * ' ,  ''* разрываются в двух точках *r1* и *r2 (r1 < r2)*случайным образом выбранных с равной вероятностью без возвращения из интервала

***4.2.3 Однородный кроссовер***

Оператор кроссовера, в котором единственный потомок воспроизводится таким образом, что аллель каждого гена копируется в хромосому потомка либо из хромосомы одного родителя, либо из хромосомы другого родителя с вероятностью .

## 4.3 Операторы мутации[[6]](#footnote-6)

***4.3.1 Точечная мутация***

Кодировка мутанта получается путем однократной перестановки аллелей в случайно выбранном локусе и соседнем с ним.

***4.3.2 Инверсия***

Кодировкаразрывается в двух точках*r1*и*r2**(r1**<**r2),*случайно выбранных с равной вероятностью из интервала ; значения аллелей во всех генах куска изменяются на обратные («1» на «0» или «0» на «1»); кодировка мутанта образуется путем соединения вновь двух старых кусков и нового куска. *( r1 1 ,..., r2 ) :  M = (1,...,r1 ,  r1 1,..., r2 , r2 1,...,L )*

***4.3.3 Сальтация***

В кодировке ** случайным образом выбираются 2k (2k) локусов, в каждой паре локусов переставляются значений аллелей.

***4.3.4 Транслакация***

В кодировке**выделяется не один кусок*[r1,**r2]*,а сразу несколько непересекающихся между собой участков «родительской» хромосомы **; значения аллелей в мутанте внутри этих участков инвертируются.

## 4.4 Оператор обработки ограничений[[7]](#footnote-7)

***4.4.1 Метод штрафных функций***

Идея использования штрафных функций - значительное уменьшение приспособленности особей, не являющихся кодировками допустимых решений. Штрафные функции можно разделить на постоянные и адаптивные. *Постоянная* функция штрафа на все недопустимые особи накладывает одинаковый штраф, *адаптивная* накладывает штраф тем больше, чем «дальше» представляемое решение от допустимой области, например, квадратичная функция штрафа.

*В программе использована адаптивная функция шрафа:*

**(4.4.1)**

**(4.4.2)**

После применения штрафа к функции приспособленности, некоторые особи, генотип которых является кодировкой недопустимого решения, могут иметь отрицательную или нулевую приспособленность. Существуют два варианта работы с недопустимыми особями:

* Первый – *удаление особей* с приспособленностью меньшей или равной нулю из популяции, но это значительно сокращает численность и генетическое разнообразие популяции.
* Второй вариант *– масштабирование приспособленностей*. В этом случае все особи сохраняются в популяции, но недопустимые особи имеют очень низкую, по сравнению с остальными особями, приспособленность. Одним из наиболее простых и часто используемых методов является *линейное динамическое масштабирование*.

В реализации генетического алгоритма был использован второй вариант, *метод линейного динамического* масштабирования для избежания сокращения численности и генетического разнообразия:

*(a) = at m(a) + bt* **(4.4.3)**

где *at > 0* ( для задачи максимизации); *bt* – коэффициент масштабирования.

Коэффициенты *at* и *bt* выбираются в каждом *t-*м поколении по информации о значениях функции приспособленности m для обрабатываемых кодировок *s*, исходя из следующих двух условий.

* Среднее значение масштабированной функции приспособленности для множества Rt

**(4.4.4)**

должно равняться среднему значению необработанной функции приспособленности для множества

**(4.4.5)**

Учитывая **(4.4.1)** получим:

*at bt (t)* **(4.4.6)**

Выполнение этого равенства гарантирует, что всякая кодировка *s* , имеющая значение функции приспособленности совпадающее со значением средней приспособленности по популяции, при использовании схемы пропорциональной селекции репродуцирует в среднем одну ожидаемую копию в популяцию .

* Наибольшее значение масштабируемой функции приспособленности должно находиться в следующем отношении со средним значением необработанной функции приспособленности:

**(4.4.7)**

где ***с*** *= const,**c**[1.2; 2.0]* – ожидаемое число копий для особи, которая имеет максимальное значение необработанной функции приспособленности в . Выполнение равенства гарантирует, что «наилучшая» кодировка множества репродуцирует при использовании схемы пропорциональной селекции в среднем c ожидаемых копий в популяцию .

Таким образом, решая уравнения **(4.4.5) – (4.4.7)** получаем, что для масштабируемой функции приспособленности **(4.4.3)** в каждом t-м поколении коэффициенты at и bt должны вычисляться согласно следующим выражениям:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *at =* | *(c -1) × m****ср*** *(t)* | | |  |
|  |  |  |  | | |
|  |  | *m + (t) - m****ср*** *(t)* |
|  |  |  | | |
| *bt =* | *m****ср*** *(t) × (m + (t) - c × m****ср*** *(t))* | | | | | |
| *m + (t) - m****ср*** *(t)* | | | | | |

**(4.4.8)**

Здесь *m+(t)* – значение функции приспособленности «наилучшей» особи в .



Рисунок 8. Зависимость значений масштабируемой функции приспособленности от для и

Одно из требований, предъявляемых к необработанной функции приспособленности *m*, состоит в том, что она должна принимать неотрицательные значения для всех *s S*. Это требование должно сохраняться и для масштабируемой функции приспособленности:

**(4.4.9)**

Однако для некоторых репродукционных множеств масштабируемая функция приспособленности **(4.4.7)** с коэффициентами *at* и *bt* из выражений **(4.4.8)** может принимать отрицательные значения. Такая ситуация возникает обычно, когда большинство кодировок репродукционного множества являются наиболее приспособленными, и их значения необработанной функции приспособленности отличаются друг от друга очень мало, в то время как ряд кодировок этого же множества имеет значения необработанной функции

приспособленности значительно ниже среднего значения приспособленности *.*

Рисунок 9. Зависимость значений масштабируемой функции приспособленности от для и

Для решения проблемы исключения отрицательных значений масштабируемой функции приспособленности **(4.4.3)** потребуем, чтобы она удовлетворяла следующим двум условиям: 1)

2) – значение масштабированной функции приспособленности «наихудшей» кодировки. С учетом этих условий находим, что коэффициенты at и bt , обеспечивающие неотрицательные значения масштабируемой функции приспособленности, должны вычисляться согласно следующим выражениям:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *at* | *=* | *m****ср*** *(t)* |  |  |
|  |  |  | |
| *m****ср*** *(t) -* |  |
|  |  |  | |
| *bt* | *=* | *m****ср*** *(t) ×* | |  | |
| *m****ср*** *(t) -* | |

**(4.4.10)**

*Зависимость значений масштабированной функции приспособленности от значений необработанной функции приспособленности приведена на данном рисунке.*

**

Рисунок 10. Зависимость значений масштабируемой функции приспособленности от для и

Учитывая выражение **(4.4.3)**, условие **(4.4.9)** для «наихудшей» кодировки из можно записать в следующем виде:

*at + bt* **(4.4.11)**

Тогда, подставляя в неравенство **(4.4.11)** значения at, bt из выражений **(4.4.8)**, получаем неравенство:

**(4.4.12)**

Таким образом, при линейном динамическом масштабировании **(4.4.3)**, если неравенство **(4.4.12)** для заданного значения *c* [1.2; 2.0] выполняется, то коэффициенты *at* и *bt* вычисляются с помощью выражений **(4.4.8)**, в противном случае коэффициенты *at* и *bt* вычисляются с помощью выражений **(4.4.10)**. В нашем случае, коэффициенты вычисляются по формуле **(4.4.10)**.

## 4.5 Операторы селекции[[8]](#footnote-8)

***4.5.1 Линейно-ранговая схема селекции***

Схема линейной ранговой селекции (scheme of linear rank selection) основана на том, что в ней вместо значений функции приспособленности используются ранги :

**(4.5.1)**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

– ранг *i-*й кодировки, когда все особи множества , отсортированы в порядке монотонного неубывания значений функции приспособленности.

– нижняя граница ожидаемого числа копий для «наихудшей» особи с наименьшим значением функции приспособленности, имеющей ранг ;

– верхняя граница ожидаемого числа копий для «наилучшей» кодировки с наибольшим значением функции приспособленности, имеющей ранг.

Для того чтобы определить численные значения граничных оценок ожидаемого числа копийи, требуется, чтобы значения,определяемые формулой **(4.5.1)** удовлетворяли следующим условиям:

* значениядолжны монотонно увеличиваться0...по отношению к возрастанию значений функции приспособленности   ... ;
* общая сумма ожидаемого числа копий решений, репродуцируемых в популяцию , должна равняться численности n этой популяции

выбирается из интервала1,2случайным образом или детерминированно, авычисляется по формуле:

На втором этапе селекции был использован алгоритм вероятностного отбора - *остаточный стохастический выбор с возвращением*

* Пусть целая часть числа, а - дробная часть числа,являются действительными числами, определенными на первом этапе оператора селекции.

*Целочисленная фаза.*

* Детерминированно в популяцию репродуцируется копий для каждого решения из репродукционного множества .
* Определяется число недостающих копий v,необходимых для заполнения популяции полностьюvкопиями:

**(4.5.2)**

* Еслиv0,то алгоритм завершает свою работу.

*Дробная фаза.*

* Определяется
* Осуществляется отображение всех решений из в смежные отрезки на оси действительных чисел 0,Nтак, чтобы каждый сегмент *i-*го решения равнялся дробной частиего ожидаемого числа копий .
* Случайным образом с равной вероятностью генерируется число 0, N .
* В качестве копии выбирается то решение, в отрезок которого попало число .
* Процедура стохастического выбора с возвращением повторяется с шага 7 до тех пор, пока не будет получено vкопий. (см. приложение)

***4.5.2турнир***

Схема -турнирной селекции ( - tournament selection) организована следующим образом:

Случайно, с равной вероятностью из выбирается группа из особей. Среди выбранных в группу особей определяется «наилучшая» особь, копия которой репродуцируется в популяцию следующего поколения. Группа особей возвращается в . Процедура выбора копии «наилучших» особей повторяется требуемое число раз. Число решений называется размером турнира. (см. приложение)

Наиболее простым является бинарный турнир, проводимый между двумя решениями *2*

## 4.6 Оператор модификации поколения

***4.6.1) Модификация поколения***

Попадаются задачи, с которыми метод штрафов не справляется - *незначительно* уменьшает функцию приспособленности у недопустимых кодировок, в результате чего алгоритм может сойтись к такой кодировке. Например, случай, когда у особи, не являющейся кодировкой допустимого решения, вес на единицу превосходит ограничение, а функция приспособленности близка к максимальной.

Во избежание такой ситуации после селекции применяется модификация поколения.

Для всех недопустимых кодировок находится удельная стоимость (стоимость/вес), сортируется в порядке не убывания и, случайным образом с равной вероятностью аллели с значением “1” заменяются на “0”, до тех пор, пока вес не станет допустимым.

# **5. Классы тестовых задач**

*Для задачи формирования инвестиционного портфеля рассматриваются следующие 4 класса:*

**5.1 Задачи без корреляции**

В этом случае не существует корреляции между стоимостью и весом элемента. Такие примеры иллюстрируют ситуации, когда вес и стоимость независимы. Некоррелированые экземпляры, как правило, легко решить, так как существует большая разница меджу весами, из-за чего легко заполнить ранец.

случайно выбираются из – диапазон

**5.2 Задачи с корреляцией**

Стоимость коррелирует с весом. Как правило, стоимость отличается от веса на пару процентов. Такие случаи - одни из наиболее реалистичных в управлении (возврат инвестиций, как правило, пропорционален вложенной сумме в некоторых небольших вариациях). Корреляция означает трудность в устранении переменных от верхний связанных испытаний.

****

**5.3 Задачи с сильной корреляцией**

Такие случаи соответствуют реальной ситуации, где возвращается линейная функция от инвестиций плюс - минус некоторый фиксированный расход по каждому проекту.

Сильно коррелированые задачи о ранце трудно решить по двум причинам:

* Все аллели вокруг элемента разрыва имеют сходные веса, а это значит, что трудно объединить их таким образом, что бы заполнить ранец.
* Существует очень большая относительная потеря путем удаления мелких взвешенных элементов, что значит, что мы вообще не можем удалить любые мелкие предметы, что бы освободить место для большого предмета.



Такие задачи используются в качестве меры возможности алгоритма для решения сложных проблем. Сортировка по невозрастанию относительной стоимости

соответствует упорядочению согласно неубывания весов. Так для

*0-1* рюкзака относительно легко ввести дополнительное ограничение:

, *b –* индекс элемента разрыва **(5.3.1)**

Ограничение говорит, что ни одно решение не будет содержать более предметов, и эти предметы будут самыми лёгкими. Любое решение, содержащее более тяжелые предметы, будет содержать меньшее количество предметов. Ограничения с противоложным неравенством могут быть наложены в том случае, если имеет место быть отрицательная стоимость.

На основании этого наблюдения Martello, Toth разработали эффективный алгоритм для решения сильно коррелированных задач. Но очевидно, что если хотя бы несколько предметов не последуют структуре сильно коррелированной задачи, то ограничение **(5.3.1)** будет слишком слабым, чтобы иметь какой - нибудь эффект.

**5.4 Задачи с подсуммами**

Они отражают ситуацию, когда прибыль каждого элемента является линейной функцией веса. Таким образом, единственная цель состоит в том, что бы получить заполненный ранец. Задачи с подсуммами нетрудно решаемы.



Для всех 4 классов задач емкость рюкзака вычисляется по формуле - .

# **6. Эксперимент**

## 6.1 Описание

Мною было замоделировано поведение эволюционного генетического алгоритма при помощи программной реализации. Для подбора параметров ГА, влияющих на наиболее эффективный поиск оптимального решения был реализован алгоритм проведения «исследования ГА».

Для проведения исследования задаются начальные данные:

* Количество особей.
* Количество итераций (поколений).
* Так как перебираются все возможные комбинации операторов генетического алгоритма, учитывается задание значения (для – турнира, по умолчанию = 2).
* Количество экспериментов для конкретной задачи из класса тестовых задач. Один эксперимент - запуск программы с различными комбинациями операторов генетического алгоритма (всего 48 комбинаций = 48 запусков ГА для одного эксперимента).
* Количество запускаемых задач для каждого класса.

Все отчеты представляют собой Excel таблицу. Они находятся в папке “C:/Users/%UserName%/Documents/gen\_algorithm\_doc/reports\_%CurrentTime%”/ (UserName – имя пользователя компьютера, CurrentTime – текущие дата и время).

Для каждой задачи создается отдельная книга, название которой состоит из типа класса тестовых задач и индекса самой задачи, например “uncorreled\_1.xlsx”, в ней:

* Для каждого эксперимента создается отдельный лист, в котором столбцы – комбинации операторов, а в строках выводится следующая информация:
* Значение функции приспобленности для каждого поколения (всего 40).
* Максимальная функция приспособленности среди всех поколений.
* Количество итераций до получения к лучшей особи.
* Последний лист – общий результат экспериментов по данной задаче. В нем столбцы – комбинации операторов, а строки содержат следующую информацию:
* Максимальное значение функций приспособленности среди всех экспериментов.
* Вероятность получения лучшей особи среди всех экспериментов.
* Среднее значение количества итераций до получения лучшей особи среди всех экспериментов.

По всем сумммарным отчётам одного класса тестовых задач делается общий отчёт в отдельной книге “(type)\_summary.xlsx”(type – тип задачи), в котором в строках выводятся комбинации операторов ГА, а в столбцах:

* Минимальное отклонение значения функции приспособленности в процентном соотношении от оптимума (для нахождения оптимума реализован метод полного перебора).
* Средняя вероятность получения лучшей особи в процентах.
* Cреднее количество итераций среди всех задач в процентом соотношении от наибольшего среднего количества итераций до получения лучшей особи (средняя скорость до наилучшего решения).

**Для одного запуска генетического алгоритма взяты следующие параметры:**

* 30 особей
* 40 поколений
* = 14 (для бетта - турнирной селекции)

**Всего проведено 600 экспериментов (28800 запусков ГА), из них:**

* 30 экспериментов на 1 задачу
* По 5 задач на конкретный класс тестовых задач
* Всего 4 класса тестовых задач

Для генерации задачи диапазон значений веса и цены - .

Каждая задача прорешена программно методом полного перебора, что бы найти точное решение для исследования.

Отчеты по задачам в приложении.

## 6.2 Результаты

По проведенному исследованию генетического алгоритма для каждого класса тестовых задач выбрано по 5 эффективных комбинаций.

*Эффективные (лучшие)* комбинации – комбинации операторов, влияющих на наиболее эффективный поиск решения.

Критериями отбора являлись:

* Вероятность нахождения глобального оптимума
* Скорость нахождения глобального оптимума

Для всех классов тестовых задач выбраны три эффективные комбинации. Критерий отбора - количество классов, содержащих комбинацию.

* *Для класса тестовых задач без корреляции* эффективными комбинациями оказались (в порядке невозрастания вероятности до нахождения глобального оптимума, неубывания скорости нахождения глобального оптимума):

1. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Точечная мутация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,95 итерации с вероятностью 72 %*.*
2. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,62 итерации с вероятностью 68,67%.
3. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Транслокация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 16, 93 итерации с вероятностью 69,33%.
4. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,17 итерации с вероятностью 69,33%.
5. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,4 итерации с вероятностью 69,33%.

* *Для класса тестовых задач с корреляцией* эффективными комбинациями оказались (в порядке невозрастания вероятности до нахождения глобального оптимума, неубывания скорости нахождения глобального оптимума):

1. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Точечная мутация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,57 итерации с вероятностью 22,67 %*.*
2. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 16,6 итерации с вероятностью 20,67 %*.*
3. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 18,32 итерации с вероятностью 20,66%.
4. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Транслокация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,32 итерации с вероятностью 18,67%.
5. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 14,82 итерации с вероятностью 17,33%.

* *Для класса тестовых задач с сильной корреляцией* эффективными комбинациями оказались (в порядке невозрастания вероятности до нахождения глобального оптимума, неубывания скорости нахождения глобального оптимума):

1. *Алгоритм Данцига. Двуточечный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 15,62 итерации с вероятностью 22,67 %*.*
2. *Алгоритм Данцига. Одноточечный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 15,72 итерации с вероятностью 17,33 %*.*
3. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 14,03 итерации с вероятностью 16%.
4. *Случайный алгоритм. Двуточечный кроссовер. Точечная мутация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 17,13 итерации с вероятностью 16%.
5. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Транслокация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 13,18 итерации с вероятностью 15,33%.

* *Для класса тестовых задач с подсуммами* эффективными комбинациями оказались (в порядке невозрастания вероятности до нахождения глобального оптимума, неубывания скорости нахождения глобального оптимума):

1. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 13,1 итерации с вероятностью 84,67 %*.*
2. *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 13,78 итерации с вероятностью 80,67 %*.*
3. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Точечная мутация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 14,62 итерации с вероятностью 78%.
4. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 13,23 итерации с вероятностью 76,66%.
5. *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Транслокация. Линейная ранговая схема селекции.* Алгоритмнаходит глобальный оптимум за 13,01 итерации с вероятностью 74%.

Для всех классов выявлены следующие эффективные комбинации:

* *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Комбинация встретилась во всех 4 классах.
* *Алгоритм Данцига. Однородный кроссовер. Инверсия. Линейная ранговая схема селекции.* Комбинация встретилась в 3 из 4 классов.
* *Случайный алгоритм. Однородный кроссовер. Сальтация. Линейная ранговая схема селекции.* Комбинация встретилась в 3 из 4 классов.

В 85% выявленных комбинаций из 20 вариантов (по 5 лучших комбинаций на каждый класс) в качестве оператора кроссовера выступает однородный кроссовер.

Во всех лучших комбинациях в качестве оператора селекции выступает линейная ранговая схема. Это подтверждает теорию о том, что данная схема предотвращает преждевременную сходимость и приводит к наиболее лучшему решению.

Для классов тестовых задач с корреляцией и с сильной корреляцией вероятность нахождения глобального оптимума не превышает 22,67%, что подтверждает теорию о труднорешаемости таких задач, напротив, для классов тестовых задач без корряции и с подсуммами вероятность нахождения глобального оптимума достигает 72% и 84,67%, соответственно, что говорит о менее трудном нахождении их решения.

# **7. Заключение**

**Итоги о проделанной работе:**

* Изучен материал о классической задачи о ранце, варианты ее постановки, области применения, вычислительная сложность, известные методы решения.
* В качестве метода решения и исcледуемого объекта выбран генетический алгоритм.
* Рассмотрены классы тестовых задач для задачи формирования инвестиционного портфеля:
* Задачи без корреляции
* Задачи с корреляцией
* Задачи с сильной корреляцией
* Задачи с подсуммами
* Pеализован генетический алгоритм для классической задачи о ранце с различными параметрами (2 оператора начальной популяции, 3 оператора кроссовера, 4 оператора мутации, 2 оператора селекции, 1 оператор обработки ограничений).
* Для увеличения генетического разнообразия в поколении реализованы линейное динамическое масштабирование в операторе обработки ограничений и модификация генотипа, применяющаяся после оператора селекции.
* Проведено «исследование алгоритма» (подбор параметров ГА) для каждого класса тестовых задач на выявление эффективных комбинаций из 48 вариантов, описанное в главе 6.
* Из полученых результатов исследования для каждого класса тестовых задач выбрано по 5 эффективных комбинаций. Критериями отбора являлись:
* Вероятность нахождения глобального оптимума
* Скорость нахождения глобального оптимума
* Для всех классов тестовых задач выбраны три эффективные комбинации. Критерий отбора - количество классов, содержащих комбинацию.
* Данные результаты так же проанализированы и сделаны выводы, подтверждающие теоретический материал:
* Во всех оптимальных комбинациях в качестве оператора селекции выступает линейная ранговая схема. Это подтверждает теорию о том, что данная схема предотвращает преждевременную сходимость и приводит к наиболее лучшему решению.
* Для классов тестовых задач с корреляцией и с сильной корреляцией вероятность нахождения глобального оптимума не превышает 22,67%, что подтверждает теорию о труднорешаемости таких задач, напротив, для классов тестовых задач без корряции и с подсуммами вероятность нахождения глобального оптимума достигает 72% и 84,67%, соответственно, что говорит о менее трудном нахождении их решения.

**Практическая значимость исследования** состоит в том, что подобраные эффективные наборы параметров генетического алгоритма для задачи формирования инвестиционного портфеля ускорят процесс и дадут наиболее точное решение для выбора самых выгодных акций по ограниченной цене.

Так как проблемы, решаемые генетическим алгоритмом, являются актуальными и по сей день, в дальнейшем можно продолжить его исследование исходя из других свойств:

* Метод кодировки решений.
* Настройки параметров, такие как:
  + количество особей,
  + количество итераций.
* Частный критерий успеха.

# **8. Литература**

1. Батищев, «Применение генетических алгоритмов к решению задач дискретной оптимизации» / Д.И. Батищев, Е. А. Неймарк, Н. В. Старостин. – Н.Н : ННГУ им. Лобачевского, 2007.
2. Пападимитриу, «Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность» / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985.
3. Гери, «Вычислительные машины и трудноҏешаемые задачи» / М. Гери, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982.
4. David Persinger, Algorithms for Knapsack Problems, Ph.D. thesis, February 1995, Dept, of Computer Science, University of Copenhagen, Universitetsparken 1, DK-2100 Copenhagen, Denmark
5. И. Сигал, «Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы» / И. Сигал, А. Иванова – 2 изд. – М.: Физматлит, 2007 – 304 с.
6. [A.N.M. Bazlur Rashid](http://www.amazon.com/s/ref=dp_byline_sr_book_1?ie=UTF8&text=A.N.M.+Bazlur+Rashid&search-alias=books&field-author=A.N.M.+Bazlur+Rashid&sort=relevancerank), The 0-1 Knapsack Problem: A solution by Genetic Algorithm Paperback – October 1, 2010
7. KEN-LI LI, GUANG-MING DAI, QING-HUA LI, A Genetic Algorithm for the Unbounded Knapsack Problem, November 2003, Computer School, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074, China
8. LEONARDO FERNANDO DOS SANTOS MOURA, An Efficient Dynamic Programming Algorithm For The Unbounded Knapsack Problem, Porto Alege, December 14th, 2012
9. Vincent Poirriez, Nicola Yanev, Rumen Andonov, A Hybrid Algorithm gor the Unbounded Knapsack Problem
10. Swarna Chitra Lyer, A Complementary Heuristic for the Unbounded Knapsack Problem, Department of Computer and Mathematical Sciences Victoria University of Technology December, 199

**9. Приложение**

1. dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/107129 – словари и энциклопедии на Академике [↑](#footnote-ref-1)
2. dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/107129 – словари и энциклопедии на Академике [↑](#footnote-ref-2)
3. dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/107129 – словари и энциклопедии на Академике [↑](#footnote-ref-3)
4. Д.И. Батищев, Е. А. Неймарк, Н. В. Старостин «Применение генетических алгоритмов к решению задач дискретной оптимизации»,Н.Н,2007, c.33 - 34 [↑](#footnote-ref-4)
5. Д.И. Батищев, Е. А. Неймарк, Н. В. Старостин «Применение генетических алгоритмов к решению задач дискретной оптимизации»,Н.Н,2007, с. 73 - 75 [↑](#footnote-ref-5)
6. Д.И. Батищев, Е. А. Неймарк, Н. В. Старостин «Применение генетических алгоритмов к решению задач дискретной оптимизации»,Н.Н,2007, с. 77 - 78 [↑](#footnote-ref-6)
7. Аналогично ссылке, с. 27 – 28, 65 - 71 [↑](#footnote-ref-7)
8. Д.И. Батищев, Е. А. Неймарк, Н. В. Старостин «Применение генетических алгоритмов к решению задач дискретной оптимизации»,Н.Н,2007, с. 55 - 58 [↑](#footnote-ref-8)