> # Лабортаорная работа 2. Ряды Фурье

> # Выполнил студент группы 153503 Киселёва Е.А.

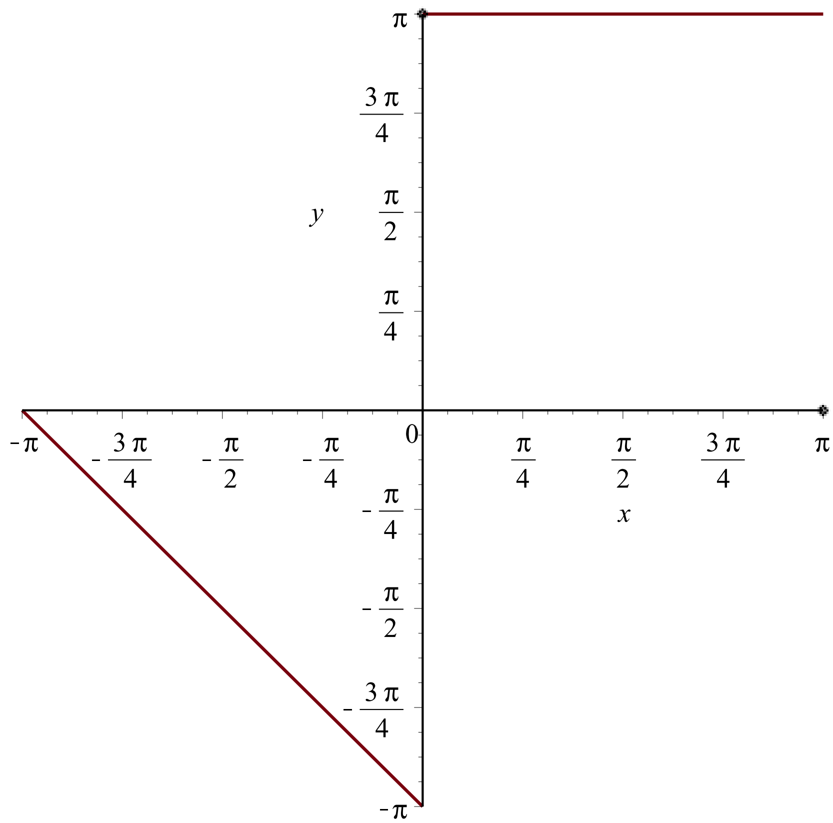
> # Вариант 10

> *restart*;
Задание 1.
Для 2π-периодической кусочно-непрерывной функции f(x) по ее аналитическому определению на главном периоде получите разложение в тригонометрический ряд Фурье. Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.
Создайте пользовательскую процедуру-функцию, осуществляющую построение тригонометрического ряда Фурье для произвольной функции, удовлетворяющей теореме Дирихле.
Постройте в одной системе координат на промежутке $[-3\pi, 3\pi]$ графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_7(x)$ ряда и его суммы $S(x)$. Сравните полученный результат с графиком порождающей функции на главном периоде.
Анимируйте построение графиков сумм ряда, взяв в качестве параметров порядковый номер частичной суммы.

1.10 f(x) = { $-\pi - x\ \ , -\pi \le x < 0;$
$\pi \qquad 0 \le x < \pi.$

$f := piecewise(-\mathrm{Pi} \le x < 0, -\mathrm{Pi} - x, 0 \le x < \mathrm{Pi}, \mathrm{Pi});$
$f := unapply(f, x) :$
$plot\big(f(x), x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}, y = -\mathrm{Pi}..\pi, discont = true\big);$

$$f := \begin{cases} -\pi - x & -\pi \le x \textbf{ and } x < 0 \\ \pi & 0 \le x \textbf{ and } x < \pi \end{cases}$$



> $a0 := simplify\left(\frac{1}{\text{Pi}} \cdot (int(-\text{Pi} - x, x = -\text{Pi}..0) + int(\text{Pi}, x = 0..\text{Pi}))\right);$

$an := simplify\left(\frac{1}{\text{Pi}} \cdot (int((-\text{Pi} - x) \cdot \cos(n \cdot x), x = -\text{Pi}..0) + int(\text{Pi} \cdot \cos(n \cdot x), x = 0..\text{Pi}))\right)$ assuming $n :: posint$;

$bn := simplify\left(\frac{1}{\text{Pi}} \cdot (int((-\text{Pi} - x) \cdot \sin(n \cdot x), x = -\text{Pi}..0) + int(\text{Pi} \cdot \sin(n \cdot x), x = 0..\text{Pi}))\right)$ assuming $n :: posint$;

$$a0 := \frac{1}{2}\pi$$

$$an := \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

$$bn := -\frac{(-1)^n - 2}{n} \qquad \textbf{(1)}$$

> $SumFourierSeries :=$ **proc**(f, k)

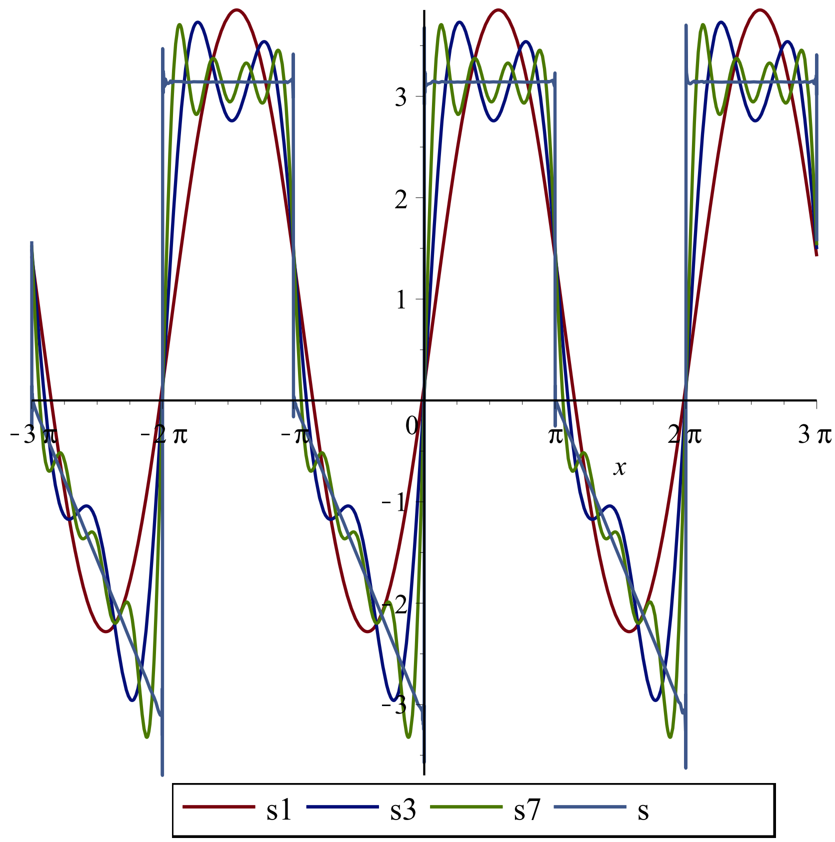
local $a0, an, bn, n$;

$a0 := simplify(int(f(x), x = -\pi..\pi)/\pi)$;

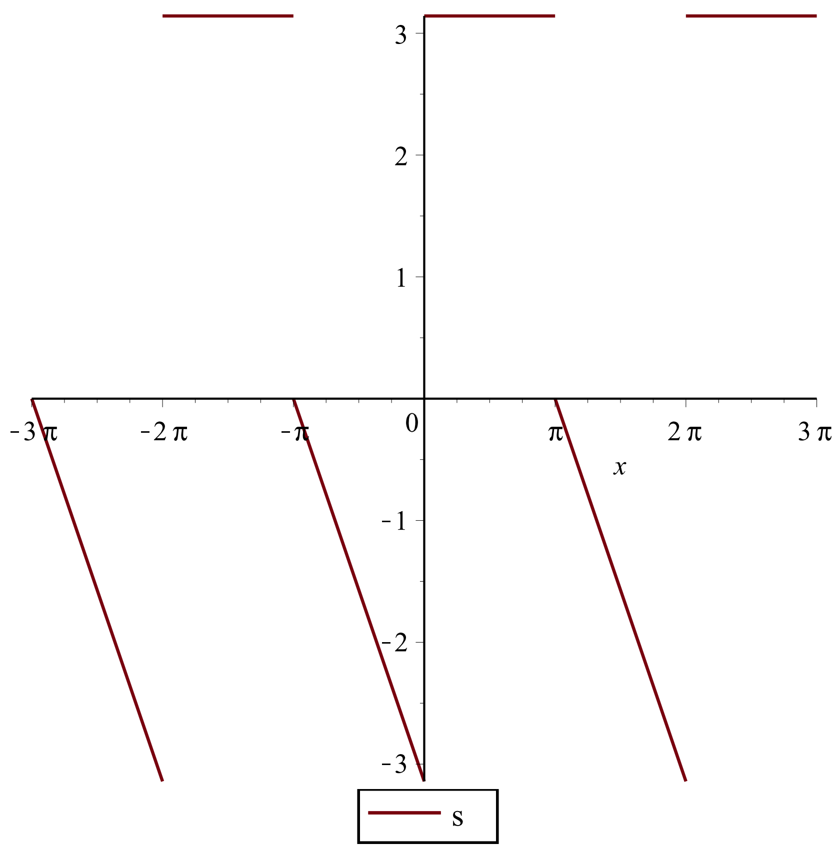
$assume(n::posint)$;

```
an := simplify( int( f(x) * cos(n * x), x = -π..π) / π);
bn := simplify( int( f(x) * sin(n * x), x = -π..π) / π);
return 1/2 * a0 + sum(an * cos(n * x) + bn * sin(n * x), n = 1 ..k)
end proc:
```

```
> plot( [SumFourierSeries(f, 1), SumFourierSeries(f, 3), SumFourierSeries(f, 7),
SumFourierSeries(f, 1000) ], x =-3π..3 π, legend = ["s1", "s3", "s7", "s"], discont = true);
```

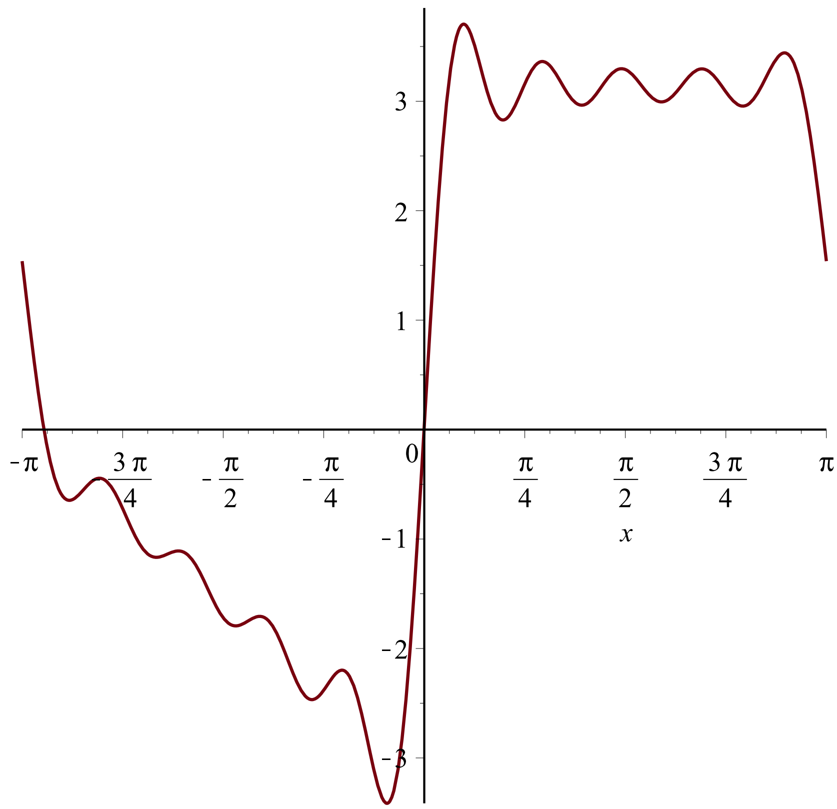



```
> plot(SumFourierSeries(f, infinity), x = -3 π..3 π, legend = ["s"], discont = true);
```



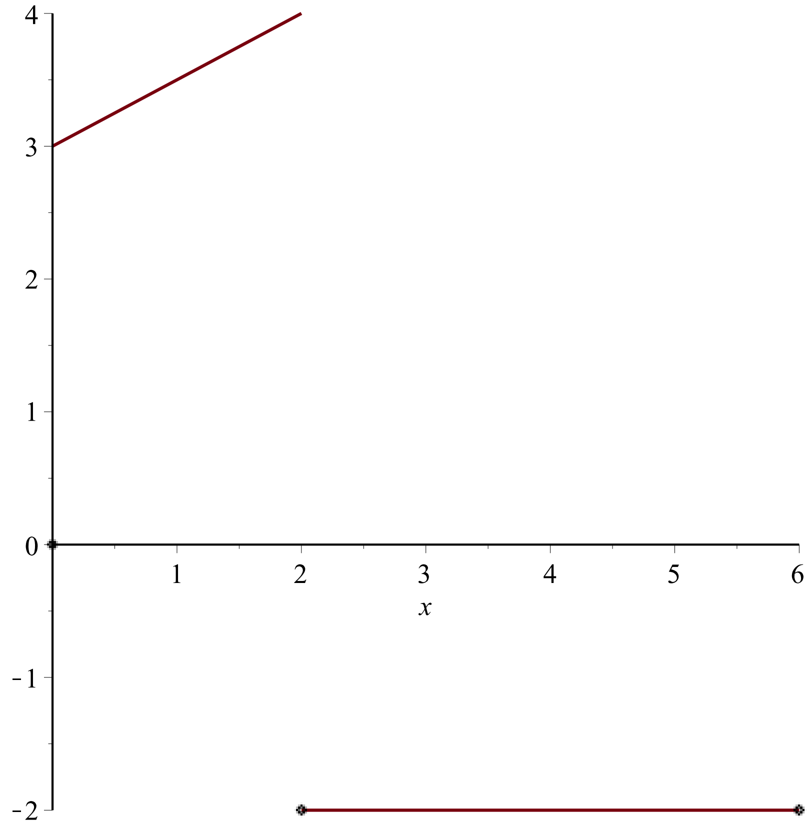
> $plots[animate](plot, [SumFourierSeries(f, k), x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}], k = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10])$

$k = 10.$



> *restart*;
> # Задание 2
> # Разложите в ряд Фурье x_2 — периодическую функцию $y = f(x)$, заданную ан промежутке $\cdot(0, x_1)$ формулой $y = ax + b$, а на $[x_1, x_2]$ - формулой $y = c$.
> # Убедитесь в правильности результата проведя расчеты в системе Maple.
> # Модифицируйте созданную ранне процедуру.
> # Постройте в одной системе координат графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_7(x)$ ряда и его суммы $S(x)$ на промежутке $[-2\,x_1, 2\,x_2]$. Сравните полученный результат с графиком порождающей функции на главном периоде.
> # Анимируйте процесс построение графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.
>
> # 2.10. a = 0,5, b = 3, c = -2, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$
>
> $f := piecewise\left(0 < x < 2, \frac{1}{2} \cdot x + 3, 2 \le x \le 6, -2\right);$
> $f := unapply(f, x)$:
> $plot(f(x), x = 0\,..6, discont = true);$

$$f := \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 & 0 < x \textbf{ and } x < 2 \\ -2 & 2 \le x \textbf{ and } x \le 6 \end{cases}$$



$> l := 3 :$

$a0 := simplify\left(\frac{1}{l} \cdot int(f(x), x = 0 ..2 \cdot l)\right);$

$an := simplify\left(\frac{1}{l} \cdot int\left(f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = 0 ..2 \cdot l\right)\right)$ assuming $n :: posint;$

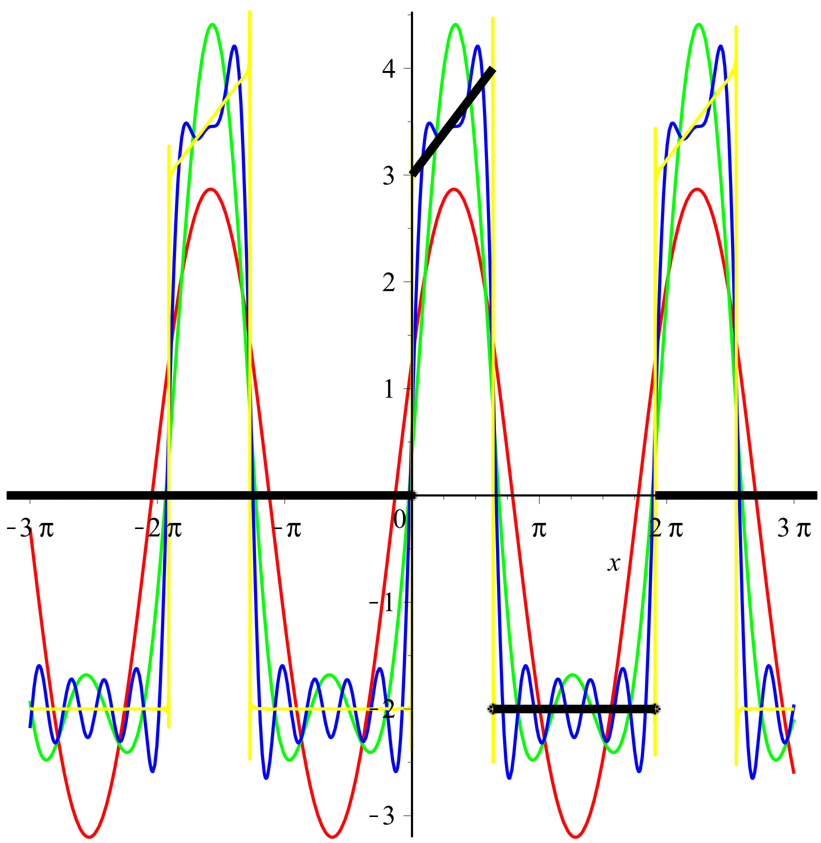
$bn := simplify\left(\frac{1}{l} \cdot int\left(f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = 0 ..2 \cdot l\right)\right)$ assuming $n :: posint;$

$$a0 := -\frac{1}{3}$$

$$an := \frac{3}{2} \frac{4 \sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right) \pi n + \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) - 1}{\pi^2 n^2}$$

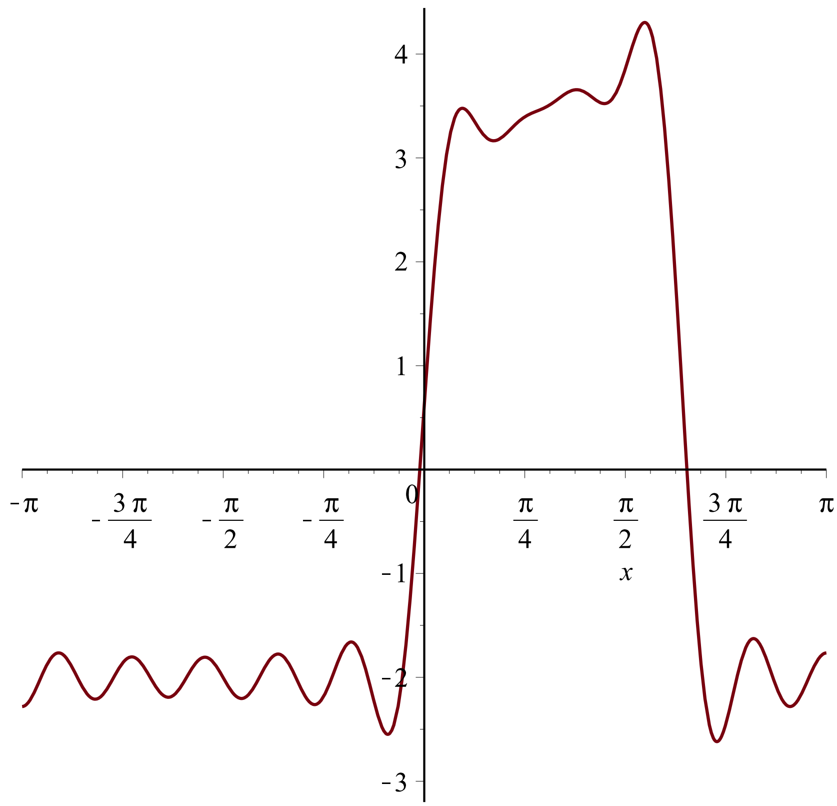
$$bn := -\frac{1}{2}\,\frac{12\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)\pi n - 10\pi n - 3\sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}{\pi^2 n^2} \tag{2}$$

```
> SumFourierSeriesModify :=proc( f, k, x1, x2)
      local a0, an, bn, n, l;
      l := 1/2*x2 − 1/2*x1;
      a0 := simplify(int( f(x), x=0..2*l)/l);
      assume(n::posint);
      an := simplify(int( f(x)*cos(π*n*x/l), x=0..2*l)/l);
      bn := simplify(int( f(x)*sin(π*n*x/l), x=0..2*l)/l);
      return 1/2*a0 + sum(an*cos(π*n*x/l) + bn*sin(π*n*x/l), n=1..k)
  end proc:
> four := plot( [SumFourierSeriesModify( f, 1, 0, 6), SumFourierSeriesModify( f, 3, 0, 6),
      SumFourierSeriesModify( f, 7, 0, 6), SumFourierSeriesModify( f, 1000, 0, 6) ], x = -3·Pi..3
      ·Pi, discont = true, color = [red, green, blue, yellow]) :
  func := plot( f(x), x = -10..10, discont = true, color = black, thickness = 4) :
  plots[display]( four, func);
```




```
> plots[animate](plot, [SumFourierSeriesModify( f, k, 0, 6), x = -Pi..Pi], k = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
      9, 10])
```

$k = 10.$

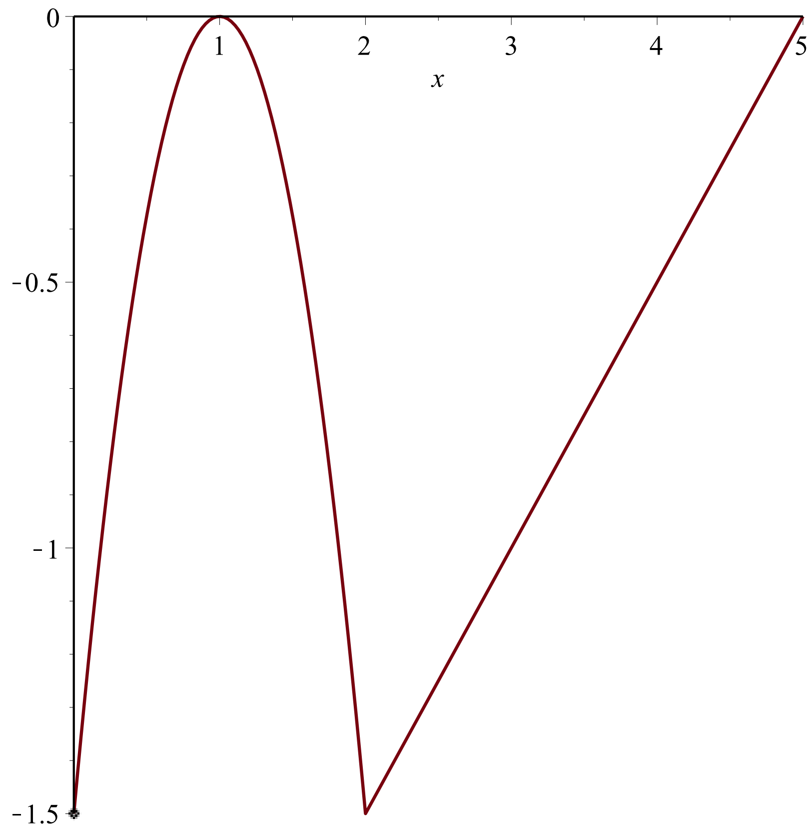


> *# Задание 3*
 # Для графически заданной на промежутке функции как комбинации квадратиной и линейной постройте три разложения в тригонометрический ряд Фурье, считая, что функция определена:1) на полном периоде,2)на полупериоде(является четной),3)на полупериоде(является нечетной).
 # Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple
 # Постройте графики сумм полученных рядов на промежутке, превышающем длину заданного в 3 раза. Сравните с графиками порождающих их функций.
#НА ПОЛНОМ ПЕРИОДЕ
restart;

$f := piecewise\left(0 \le x \le 2, -\frac{3\cdot(x-1)^2}{2}, 2 \le x \le 5, \frac{1}{2}\cdot x - \frac{5}{2}\right);$

$f := unapply(f, x):$
$plot(f(x), x = 0..5, discont = true);$

$$f := \begin{cases} -\frac{3}{2}(x-1)^2 & 0 \le x \textbf{ and } x \le 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} & 2 \le x \textbf{ and } x \le 5 \end{cases}$$



$$> \; l := \frac{5}{2} :$$

$$a0 := simplify\left(\frac{2}{5}\left(int\left(-\frac{3}{2}\,(x-1)^2, x=0..2\right) + int\left(\frac{1}{2}\,x - \frac{5}{2}, x=2..5\right)\right)\right);$$

$$an := simplify\left(\frac{2}{5}\left(int\left(\left(-\frac{3}{2}\,(x-1)^2\right)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), x=0..2\right) + int\left(\left(\frac{1}{2}\,x - \frac{5}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), x=2..5\right)\right)\right) \text{assuming } n :: posint;$$

$$bn := simplify\left(\frac{2}{5}\left(int\left(\left(-\frac{3}{2}\,(x-1)^2\right)\cdot\sin\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), x=0..2\right) + int\left(\left(\frac{1}{2}\,x - \frac{5}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), x=2..5\right)\right)\right) \text{assuming } n :: posint;$$

$$S := k \rightarrow \frac{a0}{2} + sum\left(an\cdot\cos\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right) + bn\cdot\sin\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), n=1..k\right);$$

$$plot(S(1000), x=-10..10, discont=true);$$

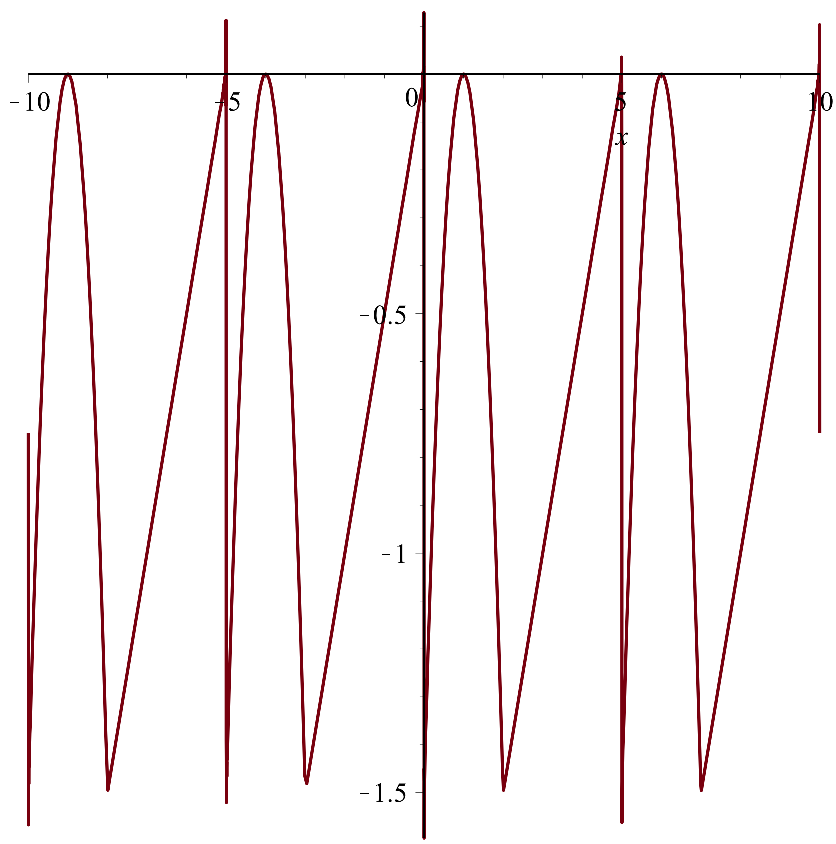
$$\#plots[animate](plot, [S(n,x), x=-5..10], n=[seq(i, i=1..10)]);$$

$$a0 := -\frac{13}{10}$$

$$an := -\frac{5}{4}\,\frac{7\,\pi\,n\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\,n\right)+5\,\pi\,n-15\sin\left(\frac{4}{5}\,\pi\,n\right)}{\pi^3\,n^3}$$

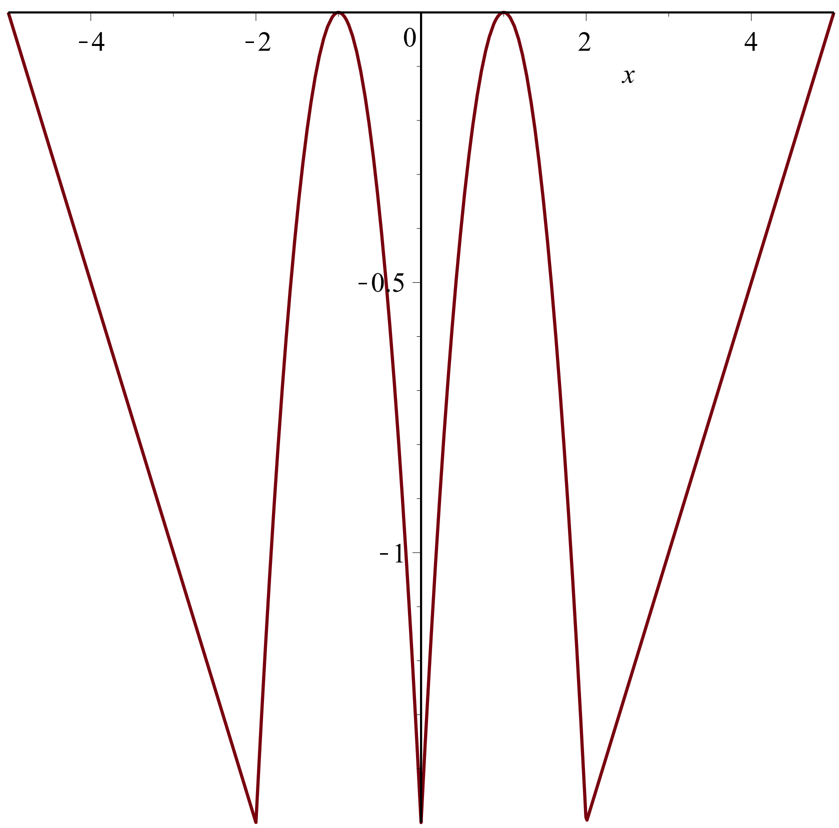
$$bn := -\frac{1}{4}\,\frac{6\,\pi^2\,n^2+35\,\pi\,n\sin\left(\frac{4}{5}\,\pi\,n\right)+75\cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\,n\right)-75}{\pi^3\,n^3}$$

$$S := k \rightarrow \frac{1}{2}\,a0+\sum_{n=1}^{k}\left(an\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\,n\,x\right)+bn\sin\left(\frac{2}{5}\,\pi\,n\,x\right)\right)$$



> *restart*;
#НА ПОЛУПЕРИОДЕ (ЯВЛЯЕТСЯ ЧЕТНОЙ)
$f := piecewise\left(-5 \le x < -2, -\frac{1}{2}\cdot x-\frac{5}{2}, -2 \le x \le 0, -\frac{3\cdot(-x-1)^2}{2}, 0 \le x \le 2, -\frac{3\cdot(x-1)^2}{2}, 2 < x \le 5, \frac{1}{2}\cdot x-\frac{5}{2}\right);$
$f := unapply(f, x)$:
$plot(f(x), x=-5..5, discont=true)$;

$$f := \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} & -5 \le x \textbf{ and } x < -2 \\ -\frac{3}{2}(-x-1)^2 & -2 \le x \textbf{ and } x \le 0 \\ -\frac{3}{2}(x-1)^2 & 0 \le x \textbf{ and } x \le 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} & 2 < x \textbf{ and } x \le 5 \end{cases}$$



$$> a0 := simplify\left(\frac{2}{5}\left(int\left(-\frac{3}{2}(x-1)^2, x = 0..2\right) + int\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, x = 2..5\right)\right)\right);$$

$$an := simplify\left(\frac{2}{5}\left(int\left(\left(-\frac{3}{2}(x-1)^2\right)\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), x = 0..2\right) + int\left(\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), x = 2..5\right)\right)\right) \text{assuming } n :: posint;$$

$$bn := 0;$$

$$S := k \rightarrow \frac{a0}{2} + sum\left(an\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right) + bn\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), n = 1..k\right);$$

$Sk := k \rightarrow \frac{a0}{2} + sum\left(an \cdot \cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{5}\right), n = 1..k\right):$

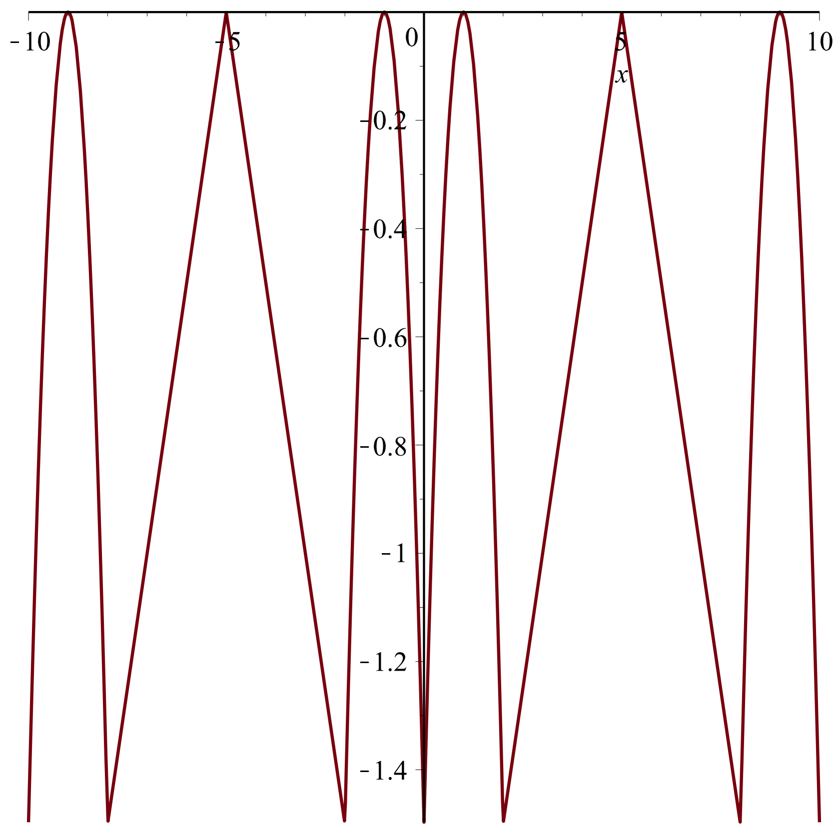
$plot(Sk(1000), x = -10..10, discont = true);$

$$a0 := -\frac{13}{10}$$

$$an := \frac{5\,(-1)^{n}\,\pi\,n - 35\,\pi\,n\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\,n\right) - 30\,\pi\,n + 150\sin\left(\frac{2}{5}\,\pi\,n\right)}{\pi^{3}\,n^{3}}$$

$$bn := 0$$

$$S := k \rightarrow \frac{1}{2}\,a0 + \sum_{n=1}^{k}\left(an\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\,n\,x\right) + bn\sin\left(\frac{1}{5}\,\pi\,n\,x\right)\right)$$



> $restart;$

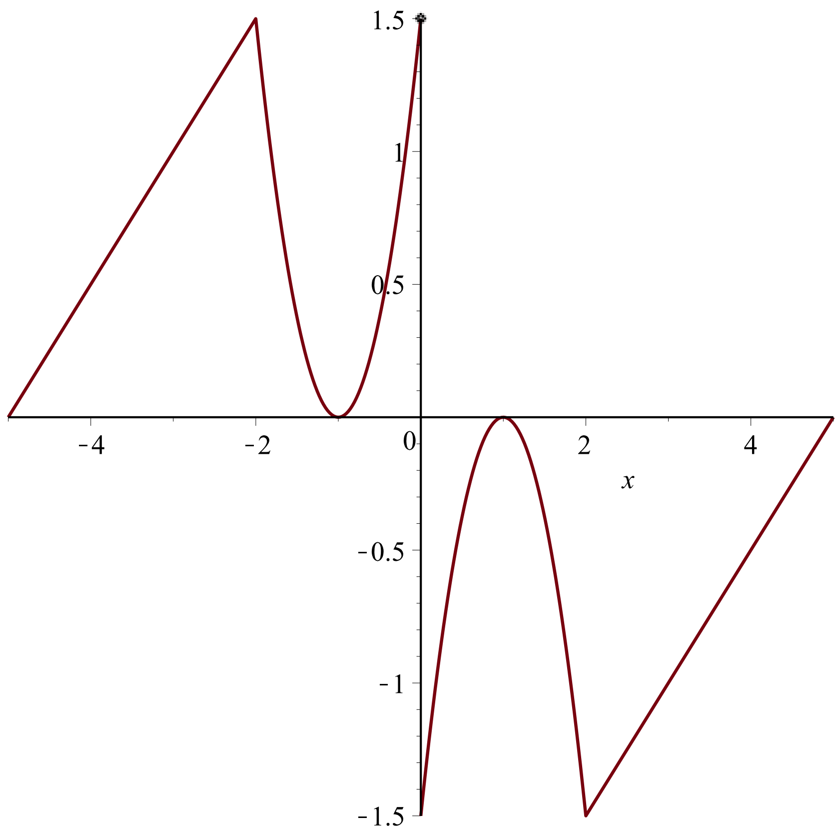
#НА ПОЛУПЕРИОДЕ (ЯВЛЯЕТСЯ НЕЧЕТНОЙ)

$f := piecewise\left(-5 \le x < -2, \frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2}, -2 \le x \le 0, \frac{3 \cdot (-x-1)^{2}}{2}, 0 \le x \le 2, -\frac{3 \cdot (x-1)^{2}}{2},\right.$

$2 < x \le 5,\ \frac{1}{2} \cdot x - \frac{5}{2}\Big);$

$f := unapply(f, x):$
$plot(f(x), x = -5..5, discont = true);$

$$f := \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & -5 \le x \textbf{ and } x < -2 \\ \frac{3}{2}(-x-1)^2 & -2 \le x \textbf{ and } x \le 0 \\ -\frac{3}{2}(x-1)^2 & 0 \le x \textbf{ and } x \le 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} & 2 < x \textbf{ and } x \le 5 \end{cases}$$



> $a0 := 0;$
> $an := 0;$

$$bn := simplify\left(\frac{2}{5}\left(int\left(\left(-\frac{3}{2}(x-1)^2\right)\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), x=0..2\right) + int\left(\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), x=2..5\right)\right)\right)\text{assuming } n :: posint;$$

$$S := k \to \frac{a0}{2} + sum\left(an\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right) + bn\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), n=1..k\right);$$

$$Sk := k \to sum\left(bn\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), n=1..k\right):$$

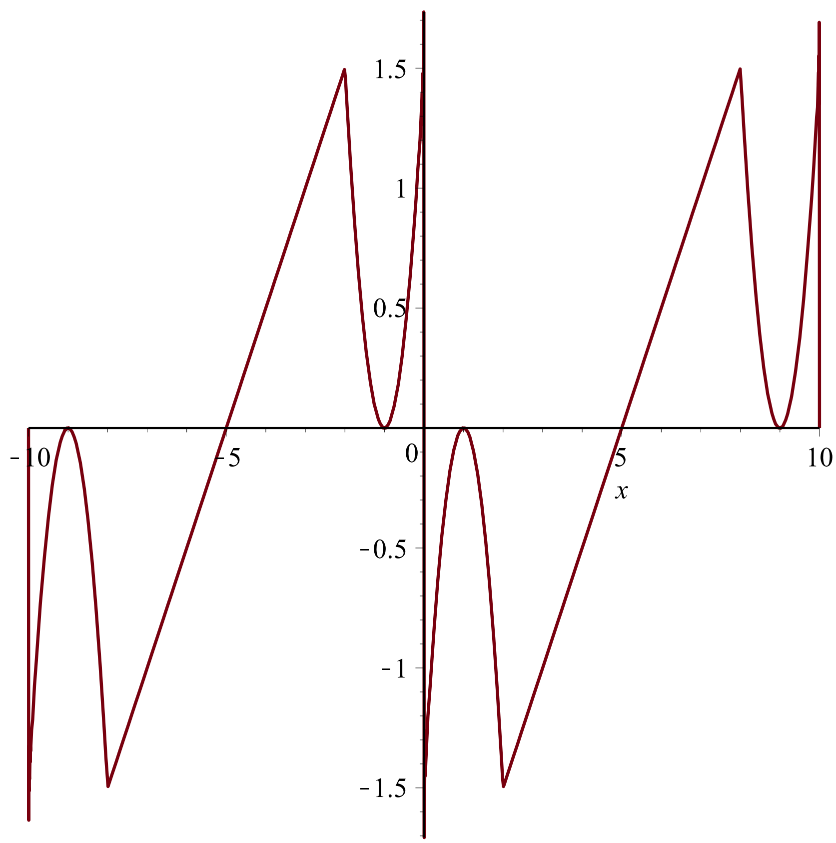
$plot(Sk(1000), x=-10..10, discont=true);$

$$a0 := 0$$

$$an := 0$$

$$bn := \frac{-3\pi^2 n^2 - 35\pi n \sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right) - 150\cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 150}{\pi^3 n^3}$$

$$S := k \to \frac{1}{2}a0 + \sum_{n=1}^{k}\left(an\cos\left(\frac{1}{5}\pi n x\right) + bn\sin\left(\frac{1}{5}\pi n x\right)\right)$$



>