

```

> # Лабораторная работа 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка
> # Выполнил студент группы 153503 Киселёва Е.А.
> # Вариант 9

```

```

> restart;
# Задание 1.
# Для данного дифференциального уравнения методом изоклин постройте интегральную
# кривую, проходящую через точку M
# 1.9.  $y' \cdot (x^2 + 2) = y$ ;  $M(2, 2)$ 

```

```

> diffEq := diff(y(x), x) =  $\frac{y(x)}{x^2 + 2}$  :

```

```

K := k =  $\frac{y(x)}{x^2 + 2}$  :

```

```

f := solve(K, y(x));

```

```

f := k (x2 + 2) (1)

```

```

> isoclines := [seq(subs(k=i, f), i=-2..2)];

```

```

isoclines := [-2 x2 - 4, -x2 - 2, 0, x2 + 2, 2 x2 + 4] (2)

```

```

> isoclinesPlot := plot(isoclines, x=-10..10, y=-10..10);

```

```

isoclinesPlot := PLOT(...) (3)

```

```

> with(DEtools) : with(plots) :

```

```

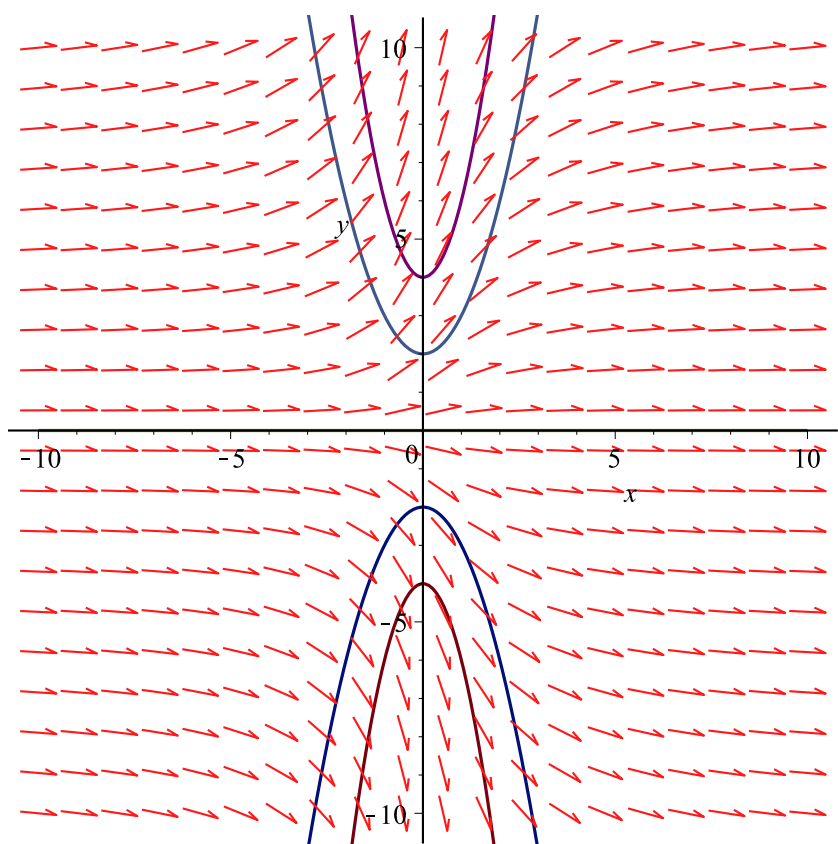
directionField := directionFieldPlot(diffEq, y(x), x=-10..10, y=-10..10) :

```

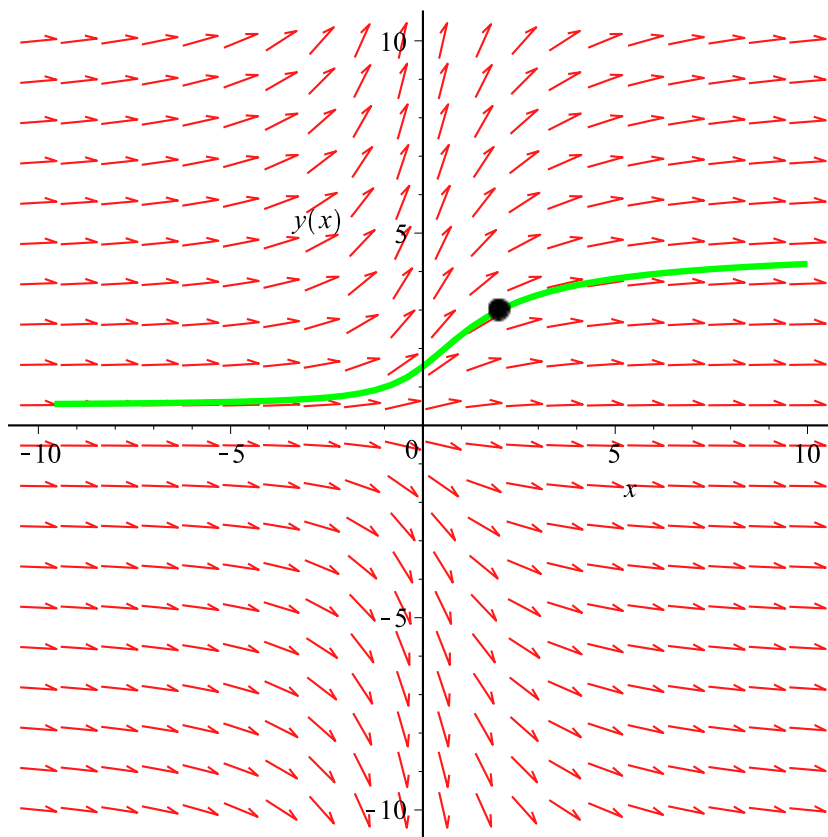
```

plots[display](isoclinesPlot, directionField);

```



```
> with(DEtools) : with(plots) :
integralCurve := DEplot(diffEq, y(x), x=-10..10, y=-10..10, [y(2)=3], linecolor=green) :
pointM := plot([2, 3], style=point, symbolsize=20, symbol=solidcircle, color=black) :
plots[display](integralCurve, pointM);
```



> restart;
Задание 2

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

Найдите линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор MN с концом на оси Oy имеет длину, равную a , и образует острый угол с положительным направлением оси Oy . Сделайте чертеж.

2.9.1. $M_0(20,3)$, $a = 29$

$a := 29$:

$y := f(x_0) + \text{diff}(f(x_0), x_0) \cdot (x - x_0)$:

$\text{tan_y_x1} := f(x) + \text{diff}(f(x), x) \cdot (x_1 - x)$:

$\text{norm_y_x1} := f(x) - \frac{1}{\text{diff}(f(x), x)} \cdot (x_1 - x)$:

$Mx(x, f(x)), Nx\left(0, f(x) + \frac{x}{\text{diff}(f(x), x)}\right)$:

$MN := \text{simplify}\left(\text{sqrt}\left((x - 0)^2 + \left(f(x) - f(x) - \frac{x}{\text{diff}(f(x), x)}\right)^2\right)\right) = a$;

$$MN := \sqrt{\frac{x^2 \left(\left(\frac{d}{dx} f(x) \right)^2 + 1 \right)}{\left(\frac{d}{dx} f(x) \right)^2}} = 29 \quad (4)$$

> *funcDiff* := solve(*MN*, diff(*f*(*x*), *x*))

$$\text{funcDiff} := -\frac{x}{\sqrt{-x^2 + 841}}, \frac{x}{\sqrt{-x^2 + 841}} \quad (5)$$

> *func* := simplify(int(*funcDiff*[1], *x*));

$$\text{func} := \sqrt{-x^2 + 841} \quad (6)$$

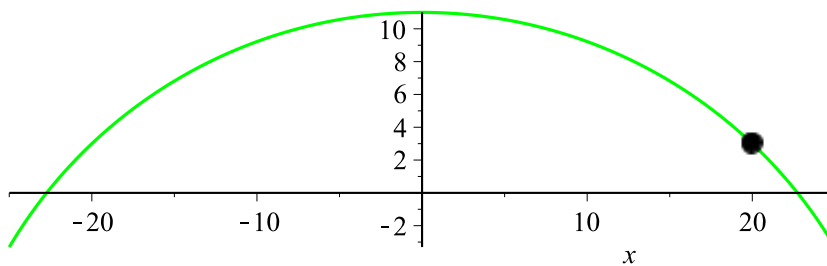
> *M0*(20, 3) :

x = 20 :

C := fsolve(sqrt(*a*² - 20²) + *C* = 3);

$$C := -18. \quad (7)$$

> *line* := plot(sqrt(*a*² - *x*²) + *C*, *x* = -25 .. 25, color = green, scaling = constrained) :
pointM := plot([20, 3], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = black) :
plots[display](*line*, *pointM*);



> restart;

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Найдите линию, проходящую через точку $M0$ и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор MN с концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox , обратно пропорциональную абсциссе точки M . Коэффициент пропорциональности равен a . Сделайте чертеж.

2.9.2. $M0(4, \frac{1}{e^2})$, $a = 4$

$x0 := 4 :$
 $y0 := \exp(-2) :$
 $a := 4 :$

$expr := x - xn = \frac{a}{x} :$
 $xn_ := solve((x - xn) \cdot diff(y(x), x) = y(x), xn);$

$$xn_ := - \frac{- \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) x + y(x)}{\frac{d}{dx} y(x)} \quad (8)$$

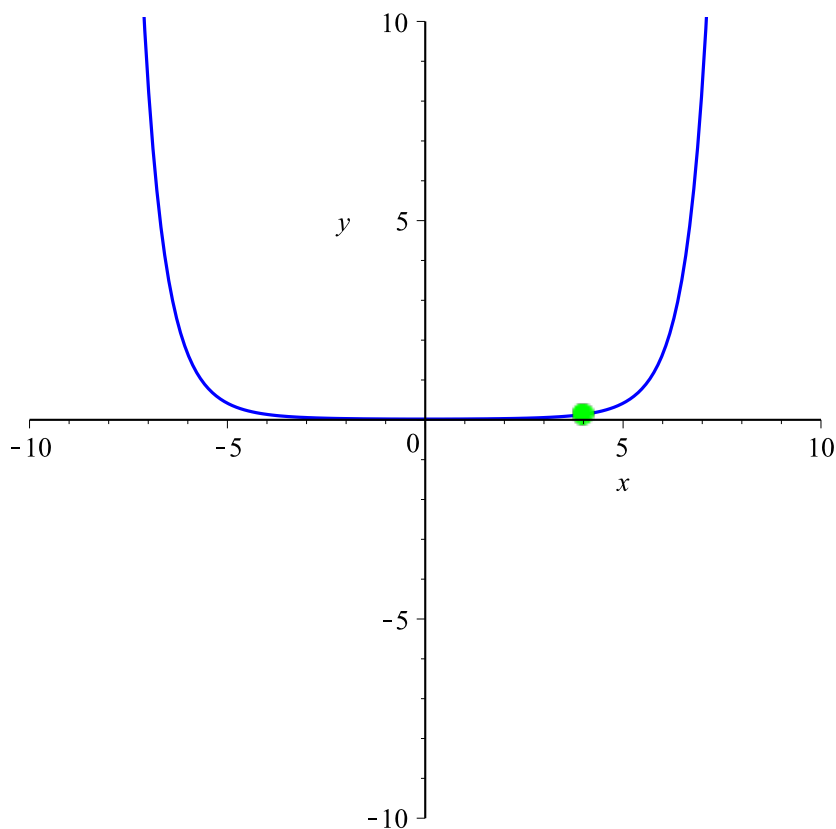
> $result := dsolve(subs(xn = xn_, expr));$

$$result := y(x) = _C1 e^{\frac{1}{8} x^2} \quad (9)$$

> $simplify(dsolve(\{subs(xn = xn_, expr), y(x0) = y0\}));$

$$y(x) = e^{-4 + \frac{1}{8} x^2} \quad (10)$$

> $line := plot(rhs(\%), x = -10..10, y = -10..10, color = blue) :$
 $pointM := plot([x0, y0], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = green) :$
 $plots[display](line, pointM);$



> restart;

Задание 3

Найдите общий интеграл уравнения. Постройте на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и какую-либо интегральную кривую. Сделайте вывод о типе особой точки.

$$\# 3.9. y' = \frac{7 \cdot x + 57 \cdot y + 64}{63 \cdot x + y + 64}$$

$$\text{simplify}\left(\text{dsolve}\left(\text{diff}(y(x), x) = \frac{7 \cdot x + 57 \cdot y(x) + 64}{63 \cdot x + y(x) + 64}\right)\right);$$

$$-8 \ln\left(-\frac{y(x) - x}{x + 1}\right) + 7 \ln\left(-\frac{y(x) + 8 + 7x}{x + 1}\right) - \ln(x + 1) - _CI = 0 \quad (11)$$

> solve([7·x + 57·y + 64 = 0, 63·x + y + 64 = 0]);

$$\{x = -1, y = -1\} \quad (12)$$

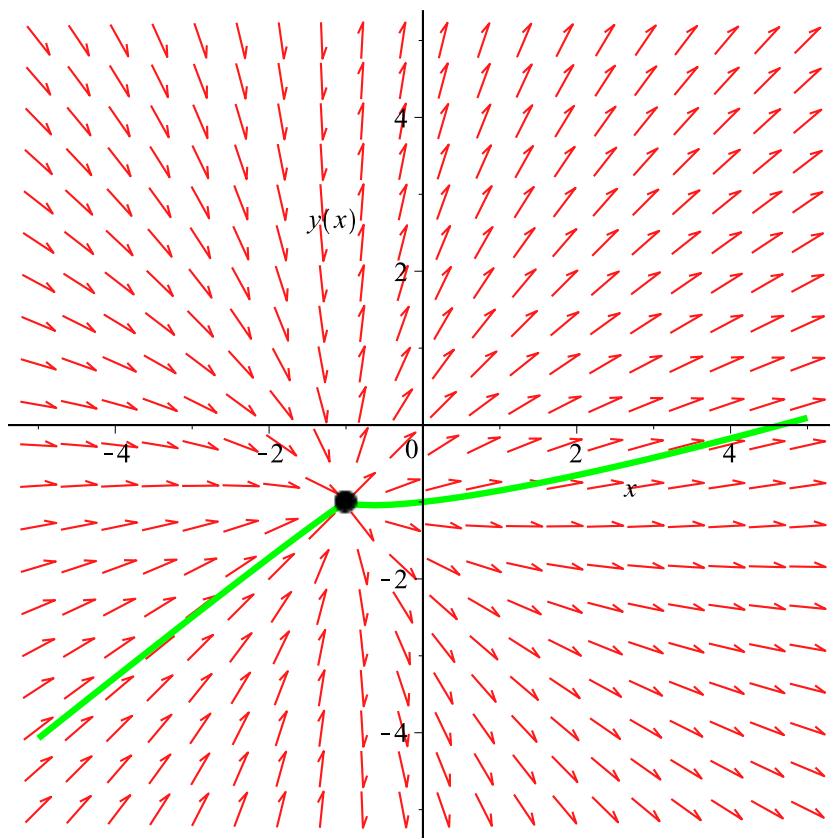
> with(DEtools) : with(plots) :

$$\text{integralCurve} := \text{DEplot}\left(\text{diff}(y(x), x) = \frac{7 \cdot x + 57 \cdot y(x) + 64}{63 \cdot x + y(x) + 64}, y(x), x = -5 \dots 5, y = -5 \dots 5, [y(0)]\right)$$

```

    = -1], linecolor = green) :
specialPoint := plot( [[ -1, -1 ]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color
    = black) :
plots[display](integralCurve, specialPoint);

```



> # Задание 4

Найдите решение задачи Коши. Сделайте чертеж интегральной кривой.

#4.9. $x \cdot y' + y = y^2 \cdot \ln(x)$, $y(1) = 1$

```

dsolve(x·diff(y(x), x) + y(x) = ln(x) · (y(x))2);
dsolve({ x·diff(y(x), x) + y(x) = ln(x) · (y(x))2, y(1) = 1 });

```

$$y(x) = \frac{1}{1 + x_CI + \ln(x)}$$

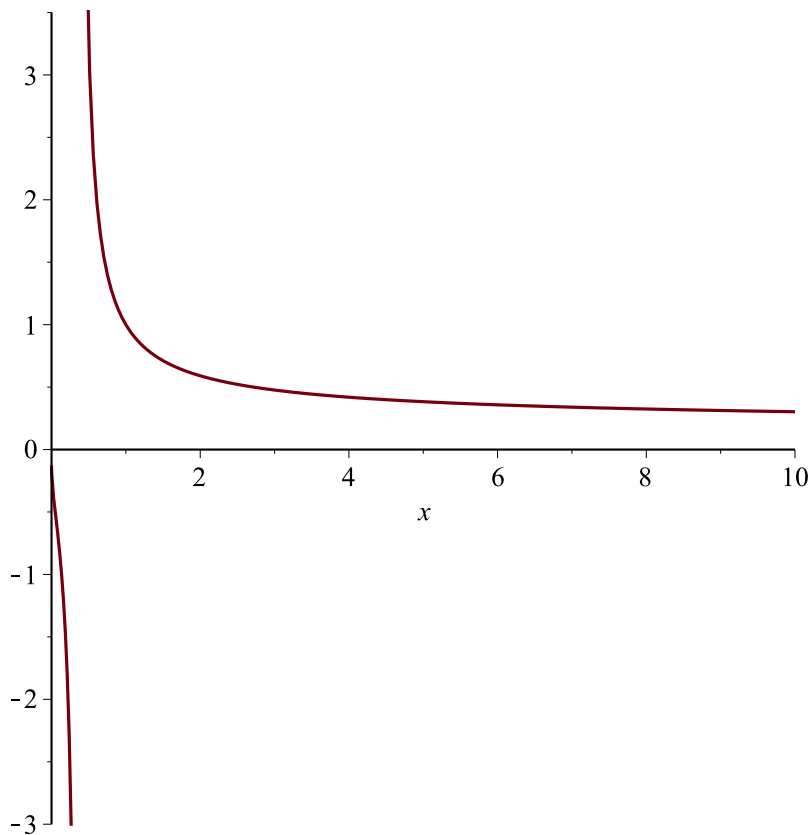
$$y(x) = \frac{1}{\ln(x) + 1}$$

(13)

```

> plot(1/(ln(x) + 1), discount = true);

```



> # Задание 5
 # Решите дифференциальные уравнения. Постройте в одной системе координат интегральные кривые при целых значениях произвольной постоянно от -1 до 1

restart;

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

#5.9.1. $x = y' \cdot \sinh(y') + \cosh(y')$;

$X := \cosh(t) + t \cdot \sinh(t)$;

$dX := \text{diff}(X, t)$;

$X := \cosh(t) + t \sinh(t)$
 $dX := 2 \sinh(t) + t \cosh(t)$

(14)

> $Y := \text{dsolve}(\text{diff}(y(t), t) = 2 \sinh(t) + t \cosh(t))$;

$Y := y(t) = \cosh(t) + t \sinh(t) + _C1$

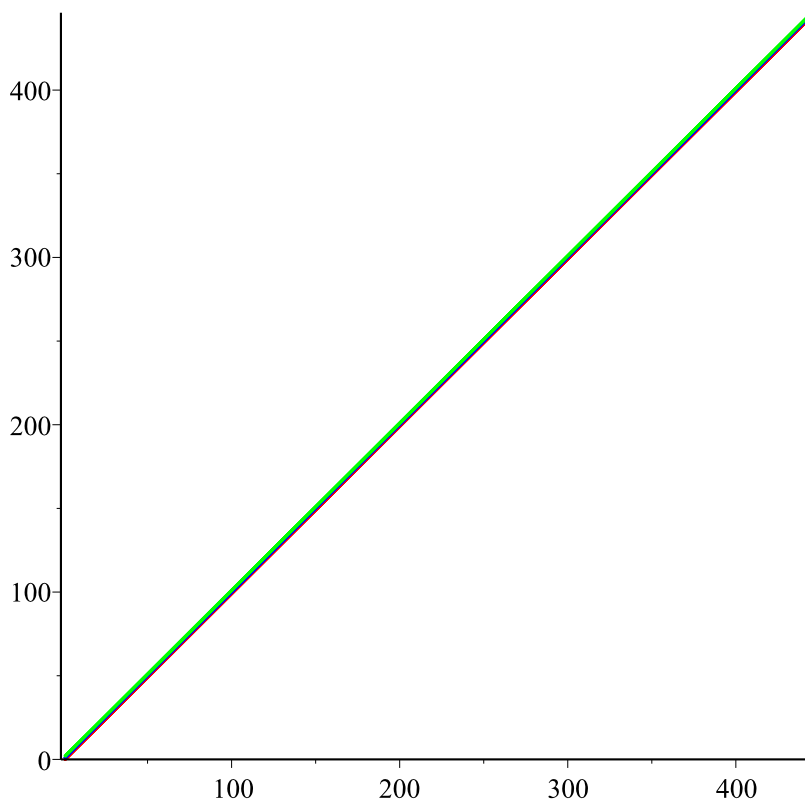
(15)

> $f1 := \text{plot}([\cosh(t) + t \cdot \sinh(t), \cosh(t) + t \sinh(t) - 1, t = -5 .. 5], \text{color} = \text{red})$:

$f2 := \text{plot}([\cosh(t) + t \cdot \sinh(t), \cosh(t) + t \sinh(t), t = -5 .. 5], \text{color} = \text{blue})$:

$f3 := \text{plot}([\cosh(t) + t \cdot \sinh(t), \cosh(t) + t \sinh(t) + 1, t = -5 .. 5], \text{color} = \text{green})$:

$\text{plots}[\text{display}](f1, f2, f3)$;



```
> restart;
```

```
# ВТОРАЯ ЧАСТЬ
```

```
#5.9.2.  $y = \frac{1}{9} \cdot y'^3 \cdot (3 \cdot \ln(y') - 1)$ 
```

```
> Y :=  $\frac{1}{9} \cdot t \cdot (3 \cdot \ln(t) - 1)$ ;
```

```
dY := diff(Y, t);
```

$$Y := \frac{1}{9} t (3 \ln(t) - 1)$$

$$dY := \frac{1}{3} \ln(t) + \frac{2}{9}$$

(16)

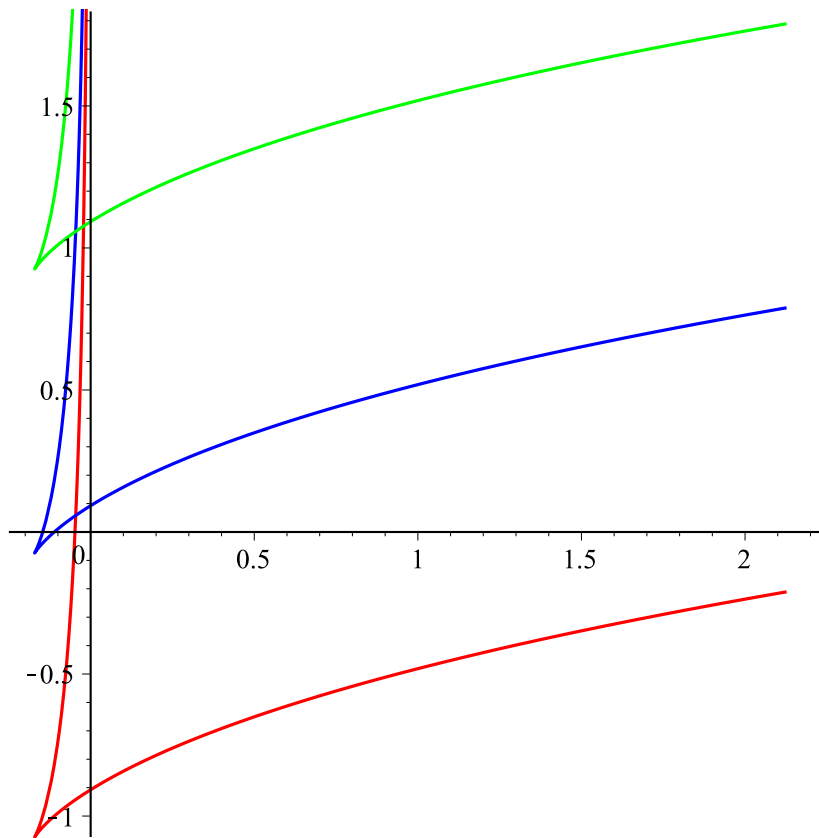
```
> X := dsolve( $\left( \text{diff}(x(t), t) = \frac{\frac{1}{3} \ln(t) + \frac{2}{9}}{t} \right)$ );
```

$$X := x(t) = \frac{1}{6} \ln(t)^2 + \frac{2}{9} \ln(t) + _C1$$

(17)

```
> fl := plot( $\left[ \frac{1}{9} \cdot t \cdot (3 \cdot \ln(t) - 1), \frac{1}{6} \ln(t)^2 + \frac{2}{9} \ln(t) - 1, t = -5 .. 5 \right]$ , color = red) :
```

```
f2 := plot( [ 1/9 * t * (3 * ln(t) - 1), 1/6 ln(t)^2 + 2/9 ln(t), t=-5..5 ], color=blue ) :
f3 := plot( [ 1/9 * t * (3 * ln(t) - 1), 1/6 ln(t)^2 + 2/9 ln(t) + 1, t=-5..5 ], color=green ) :
plots[display](f1,f2,f3);
```



```
> restart;
```

```
# Задание 6
```

```
# Найдите все решения уравнения. Постройте в одной системе координат график особого  
решения и интегральных кривых при целых значениях произвольной постоянной от -3  
до 3
```

```
# 6.9.  $y = xy' + 2 \cdot y^2 - 3$ 
```

```
df := dsolve(y(x) = x * diff(y(x), x) + 2 * (diff(y(x), x))^2 - 3);
```

$$df := y(x) = -\frac{1}{8} x^2 - 3, y(x) = 2_CI^2 + _CI x - 3 \quad (18)$$

```
> comm := rhs(df[2]);
```

$$comm := 2_CI^2 + _CI x - 3 \quad (19)$$

```
> spec := rhs(df[1]);
```

$$spec := -\frac{1}{8}x^2 - 3 \quad (20)$$

```
> f := seq(subs(_C1 = i, comm), i = -3..3);  
      f := -3x + 15, -2x + 5, -x - 1, -3, x - 1, 2x + 5, 3x + 15
```

```
> plot([f, spec], color = [green, green, green, green, green, green, green, red]);
```

