Методы оптимизации и управления

Оглавление

Глава 1

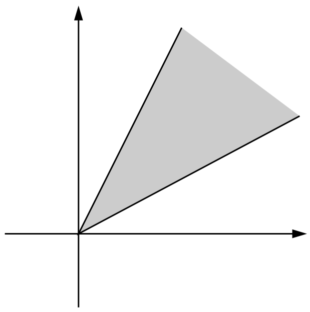
Двойственность задач линейного программирования

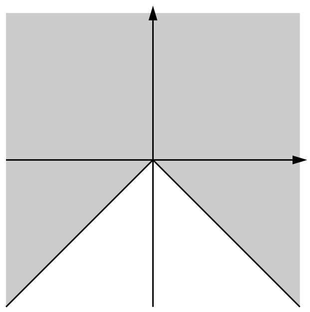
1.1 Конусы

Конусом в линейном пространстве называется множество векторов, которое замкнуто относительно умножения на неотрицательные числа.

Определение 1.1. Пусть V — линейное пространство. Непустое множество $K \subseteq V$ называется конусом, если для любого вектора $x \in K$ и любого неотрицательного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ вектор λx принадлежит множеству K.

На рисунке ниже приведены примеры конусов на плоскости. Заметим, что второй конус не является выпуклым множеством. Конусы не обязательно выпуклые множества.





Полиэдральные конусы — это конусы, которые задаются системой линейных неравенств без свободных членов.

Определение 1.2. Конус $K \subseteq \mathbb{R}^n$ называется полиэдральным, если найдется матрица A размера $m \times n$ такая, что

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0\}.$$

Определение 1.3. Конус $K \subseteq \mathbb{R}^n$ называется конечно-порожденным, если существуют точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ из K такие, что

$$K = cone(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}).$$

Полиэдральные и конечно-порожденные конусы — это одно и то же.

Теорема 1.1 (Фаркаша-Минковского-Вейля)**.** *Конус является полиэдральным в том и только в том случае, когда он является конечно-порожденным.*

Лемма 1.1 (Фаркаша)**.** *Пусть A — матрица размера $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Система*

$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

несовместна тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} A^\intercal y \geq 0, \\ b^\intercal y < 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

совместна.

Доказательство. $\boxed{\leftarrow}$. Пусть система (1.2) совместна, т.е. система имеет решение y. Рассмотрим систему (1.1). Имеем

$$\begin{aligned} Ax = b \quad \to \quad (Ax)^\intercal = b^\intercal \quad \to \quad (Ax)^\intercal y = b^\intercal y \quad \to \\ \to \quad (x^\intercal A^\intercal) y = b^\intercal y \quad \to \quad x^\intercal (A^\intercal y) = b^\intercal y. \end{aligned}$$

В последнем равенстве левая часть не меньше 0 (т.к. $x \geq 0$ и $A^\intercal y \geq 0$), а правая часть меньше 0 (т.к. $b^\intercal y < 0$). Следовательно, система (1.1) несовместна.

$\boxed{\rightarrow}$. Пусть система (1.2) не имеет решений. Рассмотрим конус

$$K = \{Ax : x \geq 0\},$$

где A — матрица размера $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Этот конус конечно-порожденный, так как он представляет собой коническую оболочку столбцов матрицы A. В самом деле, Ax — это линейная комбинация столбцов матрицы A с коэффициентами из вектора x. Поскольку $x \geq 0$, то эта линейная комбинация является конической комбинацией столбцов матрицы A. Стало быть, конус K — это коническая оболочка столбцов матрицы A, т.е.

$$K = cone(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}),$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — это столбцы матрицы A. По теореме Фаркаша–Минковского–Вейля этот конус является полиэдральным, т.е. он может быть задан как множество решений однородной системы линейных неравенств

$$K = \{z \in \mathbb{R}^m : Bz \geq 0\},$$

где B — матрица размера $n \times m$.

Заметим, что совместность задачи (1.1) равносильна принадлежности вектора b конусу K. Так как система (1.1) несовместна, то $b \notin K$. Утверждается, что вектор b и конус K отделимы друг от друга. Так как $b \notin K$, то хотя бы одно из неравенств системы $Bb \geq 0$ не выполняется. Пусть не выполняется i-ое неравенство, т.е.

$$y^\intercal b < 0, \tag{1.3}$$

где $y^\intercal$ — i-я строка матрицы B.

Остается показать, что для любого вектора $z \in K$ верно

$$y^\intercal z \geq 0. \tag{1.4}$$

Но это очевидно. Действительно, вектор z принадлежит конусу K. Поэтому $Bz \geq 0$ и i-ое неравенство этой системы — неравенство (1.4) — верно. Из неравенства (1.3) следует $b^\intercal y < 0$. Для i-й строки матрицы B — строки $y^\intercal$ — выполняется вторая часть системы (1.2). Покажем справедливость первой части, т.е., что $A^\intercal y \geq 0$. Каждый столбец матрицы A принадлежит конусу K. Убедимся в этом. Для i-го столбца A_i матрицы A

$$A_i = Ae_i \in K.$$

Так как для любого $z \in K$ выполняется (1.4), то $y^\intercal A_i \geq 0$ и, как следствие, $A_i^\intercal y \geq 0$. Следовательно, $A^\intercal y \geq 0$. □

1.2 Двойственная задача линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме

$$\begin{aligned} & c^\intercal x \to \max \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{П}$$

где A — матрица, в которой m строк и n столбцов. Будем называть ее прямой задачей. Зафиксируем некоторый допустимый план x задачи. Пусть $y \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (Ax)^\intercal &= b^\intercal \end{aligned}$$

Умножим скалярно последнее равенство на вектор y. Получим $(Ax)^\intercal y = b^\intercal y$ и

$$x^\intercal A^\intercal y = b^\intercal y. \tag{1.5}$$

Пусть $y \in \mathbb{R}^m$ — это вектор такой, что

$$A^\intercal y \geq c. \tag{1.6}$$

Так как $x \geq 0$, то

$$\underbrace{x^\intercal (A^\intercal y)}_{b^\intercal y} \geq x^\intercal c.$$

Получаем

$$b^\intercal y \geq c^\intercal x.$$

Каждый вектор y, удовлетворяющий условиям (1.6), определяет верхнюю границу на значение целевой функции задачи (П) на любом допустимом плане x. Хотим получить лучшую верхнюю границу, т.е. минимальную

$$\begin{aligned} & b^\intercal y \to \min \\ & A^\intercal y \geq c \end{aligned} \tag{$\mathfrak{D}$}$$

Эта задача линейного программирования называется задачей, двойственной к прямой задаче (П). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.2 (о слабой двойственности)**.** *Если x — допустимый план прямой задачи* (П) *и y — допустимый план двойственной задачи* ($\mathfrak{D}$)*, то $c^\intercal x \leq b^\intercal y$.*

Теорема 1.3 (о сильной двойственности)**.** *Если двойственная задача* ($\mathfrak{D}$) *совместна и $\beta \in \mathbb{R}$ — это оптимальное значение целевой функции этой задачи, то прямая задача* (П) *совместна и существует допустимый план x такой, что*

$$c^\intercal x \geq \beta. \tag{1.7}$$

Если прямая задача (П) *совместна и* $\alpha \in \mathbb{R}$ — *это оптимальное значение целевой функции этой задачи, то двойственная задача* ($\mathfrak{D}$) *совместна и найдется допустимый план* y *этой задачи такой, что*

$$b^{\intercal} y \leq \alpha. \tag{1.8}$$

Доказательство. Докажем только первую часть теоремы.

Пусть двойственная задача ($\mathfrak{D}$) совместна и β — это оптимальное значение целевой функции. Достаточно показать, что существует вектор x, удовлетворяющий ограничениям прямой задачи и неравенству (1.12)

$$\begin{aligned} &Ax = b \\ &x \geq 0 \\ &c^{\intercal} x \geq \beta. \end{aligned}$$

От противного. Допустим, что эта система несовместна. Приведем эту систему к канонической форме. Введем переменную нежесткости s

$$\begin{aligned} &Ax = b \\ &c^{\intercal} x - s = \beta \\ &x \geq 0, s \geq 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Какой вид имеет матрица коэффициентов системы и столбец свободных членов? Матрица состоит из четырех блоков

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^{\intercal} & -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}.$$

Систему (1.9) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\overline{A} \cdot \overline{x} = \overline{b} \\ &\overline{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Эта система несовместна. По лемме Фаркаша найдется вектор $\overline{y}$ такой, что

$$\begin{aligned} &\overline{A}^{\intercal} \cdot \overline{y} \geq 0 \\ &\overline{b}^{\intercal} \cdot \overline{y} < 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Матрица $\overline{A}^{\intercal}$ умножается на вектор $\overline{y}$

$$\overline{A}^{\intercal} \cdot \overline{y} = \begin{pmatrix} A^{\intercal} & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Мы предполагаем, что вектор $\overline{y}$ состоит из двух частей (y, λ). Первая часть соответствует столбцам, проходящим через блок $A^\intercal$, а вторая часть — последнему столбцу матрицы $\overline{A}^\intercal$

$$\overline{y}^\intercal = \begin{pmatrix} y & \lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда условия (1.10) запишутся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A^\intercal y + c\lambda \\ 0 \cdot y - \lambda \end{pmatrix} \geq 0$$
$$b^\intercal y + \beta\lambda < 0$$

Заметим, что $\lambda \leq 0$. Утверждается, что наличие таких y и λ невозможно. Рассмотрим два случая $\lambda = 0$ и $\lambda < 0$.

Случай 1. Пусть $\lambda = 0$. Тогда

$$A^\intercal y \geq 0$$
$$b^\intercal y < 0.$$

Пусть y^* — это оптимальный план двойственной задачи ($\mathfrak{D}$). Убедимся, что $y^* + y$ — это допустимый план задачи ($\mathfrak{D}$):

$$A^\intercal(y^* + y) = A^\intercal y^* + A^\intercal y \geq A^\intercal y^* \geq c.$$

Более того, в двойственном задаче ($\mathfrak{D}$) значение целевой функции на плане $y^* + y$ меньше, чем на плане y^*

$$b^\intercal(y^* + y) = b^\intercal y^* + b^\intercal y < b^\intercal y^* = \beta.$$

Мы нашли допустимый план, на котором значение целевой функции «лучше», чем на y^*, что противоречит тому, что y^* — это оптимальный план.

Случай 2. Пусть $\lambda < 0$. Тогда

$$A^\intercal y + c\lambda \geq 0$$
$$b^\intercal y + \beta\lambda < 0.$$

Разделим оба неравенства на $-\lambda > 0$

$$-\frac{1}{\lambda}A^\intercal y \geq c$$
$$-\frac{1}{\lambda}b^\intercal y < \beta.$$

Рассмотрим вектор $y' = -\frac{1}{\lambda}y$. Тогда

$$A^\intercal y' \geq c$$
$$b^\intercal y' < \beta,$$

т.е. y' — это допустимый план двойственной задачи ($\mathfrak{D}$), на котором значение целевой функции меньше β. Это противоречит тому, что оптимальное значение целевой функции в двойственной задаче равно β. $\square$

Какими бывают задачи линейного программирования? Задачи бывают совместными и несовместными. Совместные задачи делятся на два типа: задачи на максимум и задачи на минимум. Задачи линейного программирования на максимум классифицируются на два класса: задачи с оптимальными планами и задачи, в которых целевые функции не ограничены сверху на множестве допустимых планов. Задачи линейного программирования на минимум также разбивается на два семейства: задачи, имеющие оптимальные планы, и задачи, целевые функции которых не ограничены снизу на множестве допустимых планов.

Следствие 1.1. *Для задач* (П) *и* ($\mathfrak{D}$) *справедлива следующая альтернатива:*

- *а) обе задачи* (П) *и* ($\mathfrak{D}$) *совместны и их целевые функции ограничены на множестве допустимых планов сверху и снизу, соответственно; более того, оптимальные значения целевых функций этих задач равны;*
- *б) обе задачи несовместны;*
- *в) задача* (П) *несовместна и целевая функция задачи* ($\mathfrak{D}$) *не ограничена снизу на множестве допустимых планов;*
- *г) целевая функция задачи* (П) *не ограничена сверху на множестве допустимых планов и задача* ($\mathfrak{D}$) *несовместна.*

Доказательство. $\boxed{a)}$ Пусть (П) и ($\mathfrak{D}$) — совместные задачи с ограниченными на множестве допустимых планов, соответственно, сверху и снизу целевыми функциями. Покажем, что оптимальные значения целевых функций задач равны.

Пусть α — оптимальное значение целевой функции задачи (П), β — оптимальное значение целевой функции задачи ($\mathfrak{D}$). По теореме о слабой двойственности

$$\alpha \leq \beta. \tag{1.11}$$

По теореме о сильной двойственности существует допустимый план x^* прямой задачи (П) такой, что

$$c^{\mathsf{T}} x^* \geq \beta \tag{1.12}$$

и существует допустимый план y^* задачи ($\mathfrak{D}$) такой, что

$$b^{\mathsf{T}} y^* \leq \alpha. \tag{1.13}$$

Из (1.11), (1.12) и (1.13) следует

$$b^\intercal y^* \leq \alpha \leq \beta \leq c^\intercal x^*.$$

Получаем, что $b^\intercal y^* \leq c^\intercal x^*$. По теореме о слабой двойственности $c^\intercal x^* \leq b^\intercal y^*$. Следовательно, $c^\intercal x^* = b^\intercal y^*$ и $\alpha = \beta$.

$\boxed{б)}$ Приведем пример прямо-двойственной пары несовместных задач

$$\begin{aligned} & x_1 \to \max \\ & 0x_1 = -1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \qquad (\Pi') \qquad\qquad \begin{aligned} & -y_1 \to \min \\ & 0y_1 \geq 1 \end{aligned} \qquad (\mathfrak{D}')$$

$\boxed{в)}$ Пусть прямая задача (П) несовместна, а двойственная задача ($\mathfrak{D}$) совместна. Наша цель — доказать, что целевая функция двойственной задачи ($\mathfrak{D}$) не ограничена снизу на множестве допустимых планов. От противного. Допустим, что целевая функция задачи ($\mathfrak{D}$), наоборот, ограничена снизу на множестве допустимых планов. Тогда по теореме о сильной двойственности прямая задача (П) совместна, что противоречит изначальному предположению о несовместности задачи (П).

$\boxed{г)}$ Пусть целевая функция прямой задачи (П) не ограничена сверху на множестве допустимых планов, т.е. для любого $\theta \in \mathbb{R}$ найдется допустимый план $x(\theta)$ такой, что $c^\intercal x(\theta) > \theta$. Необходимо доказать, что двойственная задача ($\mathfrak{D}$) несовместна. От противного. Допустим, что задача ($\mathfrak{D}$) совместна, т.е. найдется допустимый план y этой задачи. Положим $\theta = b^\intercal y$. Тогда для допустимого плана $x(\theta)$ прямой задачи (П) выполняется $c^\intercal x(\theta) > \theta = b^\intercal y$, что противоречит теореме о слабой двойственности. $\square$

Если оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач существуют, то они равны. Часто удобно изучать прямую и двойственную задачи вместе. Однако прямая задача задача может и не быть в канонической форме. Необходимо уметь строить двойственные задачи для задач общего вида, причем без перевода их в каноническую форму. Существуют правила, которые позволяют по задаче линейного программирования построить ее двойственную задачу, для которой справедливы теоремы о слабой и сильной двойственности.

Рассмотрим прямую задачу линейного программирования в общем виде

$$
\begin{aligned}
& c^{\mathsf{T}}x \to \max / \min \\
& a_i^{\mathsf{T}}x \le b_i, i \in I_{\le} \\
& a_i^{\mathsf{T}}x \ge b_i, i \in I_{\ge} \\
& a_i^{\mathsf{T}}x = b_i, i \in I_{=} \\
& x_i \ge 0, i \in I_{+} \\
& x_i \le 0, i \in I_{-} \\
& x_i \in \mathbb{R}, i \in I_{\pm},
\end{aligned} \tag{П}
$$

где $x^{\mathsf{T}} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — вектор переменных, $a_i \in \mathbb{R}^n$ для любого индекса $i \in I_{\le} \cup I_{\ge} \cup I_{=}$. Для такой прямой задачи можно построить ее двойственную задачу. Переменные, на знак которых есть ограничения, классифицируем на два типа — хорошие и плохие: переменная x_i хорошая, если $i \in I_{+}$, и плохая, если $i \in I_{-}$. Все оновные ограничения типа неравенства также разобъем на хорошие и плохие в зависимости от направления оптимизации целевой функции

	min	max
$\le$	плохое ограничение	хорошее ограничение
$\ge$	хорошее ограничение	плохое ограничение

В двойственной задаче переменные называются двойственными переменными. Двойственных переменных столько сколько основных ограничений в прямой задаче. Пусть $y^{\mathsf{T}} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ — двойственные переменные, где m — число основных ограничений в прямой задаче $m = |I_{\le} \cup I_{\ge} \cup I_{=}|$.

Переменным прямой задачи взаимно однозначно соответствуют основные ограничения двойственной задачи. Переменным двойственной задачи взаимно однозначно соответствуют основные ограничения прямой задачи. При этом хорошим переменным соответствуют хорошие основные ограничения, плохим переменным — плохие основные ограничения, а переменным, на знак которых нет ограничений, отвечают основные ограничения типа равенства.

Правила построения двойственной задачи.

1. Если x_i — хорошая (плохая) переменная в прямой задаче (П), то i-е основное ограничение в двойственной задаче ($\mathfrak{D}$) хорошее (соответственно, плохое) и имеет вид

$$A_i^{\mathsf{T}} y \lesseqgtr c_i,$$

где A_i — столбец коэффициентов при переменной x_i в основных ограничениях прямой задачи, c_i — коэффициент при переменной x_i в целевой функции прямой задачи, знак $\leq$ или $\geq$ зависит от направления оптимизации целевой функции в двойственной задачи $(\mathfrak{D})$ и выбирается таким образом, чтобы ограничение было хорошим (соответственно, плохим).

2. Если $x_i \in \mathbb{R}$ — ни хорошая, ни плохая переменная, то i-е основное ограничение в двойственной задаче $(\mathfrak{D})$ ни хорошее, ни плохое и имеет вид
$$A_i^\intercal y = c_i.$$
3. Если i-е основное ограничение прямой задачи (П) хорошее (плохое), то переменная y_i в двойственной задаче $(\mathfrak{D})$ хорошая, т.е. $y_i \geq 0$ (соответственно, плохая, т.е. $y_i \leq 0$).
4. Если i-е основное ограничение прямой задачи (П) ни хорошее, ни плохое, т.е. ограничение типа равенства, то переменная $y_i \in \mathbb{R}$ в двойственной задаче $(\mathfrak{D})$ ни хорошая, ни плохая, т.е. в задаче $(\mathfrak{D})$ на знак переменной y_i нет ограничений.
5. Целевая функция в задаче $(\mathfrak{D})$ имеет вид $b^\intercal y$, где b — это вектор, состоящий из правых частей основных ограничений прямой задачи.
6. Направление оптимизации целевой функции в двойственной задаче $(\mathfrak{D})$ противоположно направлению оптимизации целевой функции в прямой задаче (П).

Соответствие между компонентами прямой задачи на максимум и двойственной задачи представлено в таблице.

Прямая задача	Двойственная задача
$c^\intercal x \to \max$	$b^\intercal y \to \min$
$a_i^\intercal x \leq b_i, i \in I_\leq$	$y_i \geq 0, i \in I_\leq$
$a_i^\intercal x \geq b_i, i \in I_\geq$	$y_i \leq 0, i \in I_\geq$
$a_i^\intercal x = b_i, i \in I_=$	$y_i \in \mathbb{R}, i \in I_=$
$x_i \geq 0, i \in I_+$	$A_i^\intercal y \geq c_i, i \in I_+$
$x_i \leq 0, i \in I_-$	$A_i^\intercal y \leq c_i, i \in I_-$
$x_i \in \mathbb{R}, i \in I_\pm$	$A_i^\intercal y = c_i, i \in I_\pm$

Пример 1.1. Для следующей задачи ЛП

$$
\begin{aligned}
&-1x_1 + 1x_2 - 2x_3 \to \min,\\
&x_1 + x_3 \le 1,\\
&x_1 - x_3 \ge 2,\\
&x_1 + x_2 = 10,\\
&x_1 \ge 0,\\
&x_2 \le 0.
\end{aligned}
$$

двойственная к ней задача ЛП имеет вид

$$
\begin{aligned}
&1y_1 + 2y_2 + 10y_3 \to \max\\
&y_1 \le 0,\\
&y_2 \ge 0,\\
&y_1 + y_2 + y_3 \le -1,\\
&y_3 \ge 1,\\
&y_1 - y_2 = -2
\end{aligned}
$$

Обозначим через A матрицу матрицу, составленную из строк $a_i^\intercal$, $i \in I_\le \cup I_\ge \cup I_=$. Столбцы матрицы A обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Теорема 1.4 (о дополняющей нежесткости)**.** *В прямой задаче* (П) *допустимый план x, в двойственной задаче* ($\mathfrak{D}$) *допустимый план y являются оптимальными в том и только в том случае, когда*

а) $\forall i \in I_\le \cup I_\ge \cup I_= \quad \underbrace{y_i(b_i - a_i^\intercal x)}_{u_i} = 0$*;*

б) $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \underbrace{(A_j^\intercal y - c_j)x_j}_{v_j} = 0.$

Доказательство. Будем предполагать, что в прямой задаче (П) целевая функция максимизируется (для минимизационного варианта задачи рассуждения аналогичны).

Утверждается, что $u_i \ge 0$ для любого $i \in I_\le \cup I_\ge \cup I_=$. Действительно,

а) если $a_i^\intercal x \le b_i$, то это ограничение прямой задачи хорошее и, поэтому в двойственной задаче переменная y_i тоже хорошая, т.е. $y_i \ge 0$, и

$$y_i(b_i - a_i^\intercal x) \ge 0;$$

б) если $a_i^\intercal x \geq b_i$, то это ограничение прямой задачи плохое и, поэтому в двойственной задаче переменная y_i тоже плохая, т.е. $y_i \leq 0$, и

$$y_i(b_i - a_i^\intercal x) \geq 0;$$

в) если $a_i^\intercal x = b_i$, то $y_i(b_i - a_i^\intercal x) \geq 0$.

Утверждается, что $v_j \geq 0$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. В самом деле,

а) если в прямой задаче имеется ограничение $x_j \geq 0$, то j-я переменная хорошая и, поэтому в двойственной задаче j-е основное ограничение хорошее, т.е. $A_j^\intercal y \geq c_j$, и

$$(A_j^\intercal y - c_j)x_j \geq 0;$$

б) если в прямой задаче имеется ограничение $x_j \leq 0$, то j-я переменная плохая и, поэтому в двойственной задаче j-е основное ограничение плохое, т.е. $A_j^\intercal y \leq c_j$, и

$$(A_j^\intercal y - c_j)x_j \geq 0;$$

в) если в прямой задаче нет ограничений по знаку на переменную x_j, т.е. $x_j \in \mathbb{R}$, то в двойственной задаче j-е ограничение имеет вид $A_j^\intercal y = c_j$ и, как следствие, $(A_j^\intercal y - c_j)x_j \geq 0$.

Так как $u_i \geq 0$ для любого $i \in I_\leq \cup I_\geq \cup I_=$, то

$$\sum_{i \in I_\leq \cup I_\geq \cup I_=} u_i = 0$$

в том и только в том случае, когда

$$\forall i \in I_\leq \cup I_\geq \cup I_= \ u_i = 0.$$

Так как $v_j \geq 0$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$\sum_{j=1}^{n} v_j = 0$$

в том и только в том случае, когда

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \ v_j = 0.$$

Докажем, что
$$\sum_{i\in I_{\le}\cup I_{\ge}\cup I_{=}} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = b^{\mathsf T}y - c^{\mathsf T}x. \tag{1.14}$$
Имеем
$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I_{\le}\cup I_{\ge}\cup I_{=}} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j &= \sum_{i\in I_{\le}\cup I_{\ge}\cup I_{=}} y_i(b_i - a_i^{\mathsf T}x) + \sum_{j=1}^{n} x_j(A_j^{\mathsf T}y - c_j) = \\
&= \sum_{i\in I_{\le}\cup I_{\ge}\cup I_{=}} (y_ib_i - y_ia_i^{\mathsf T}x) + \sum_{j=1}^{n} (x_jA_j^{\mathsf T}y - c_jx_j) = \\
&= \underbrace{\sum_{i\in I_{\le}\cup I_{\ge}\cup I_{=}} y_ib_i}_{b^{\mathsf T}y} - \sum_{i\in I_{\le}\cup I_{\ge}\cup I_{=}} y_ia_i^{\mathsf T}x + \sum_{j=1}^{n} x_jA_j^{\mathsf T}y - \\
&- \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_jx_j}_{c^{\mathsf T}x} = b^{\mathsf T}y - c^{\mathsf T}x - \left(\sum_{i\in I_{\le}\cup I_{\ge}\cup I_{=}} y_ia_i^{\mathsf T}\right)x + \\
&+ \left(\sum_{j=1}^{n} x_jA_j^{\mathsf T}\right)y = b^{\mathsf T}y - c^{\mathsf T}x - (y^{\mathsf T}A)x + (x^{\mathsf T}A^{\mathsf T})y = \\
&= b^{\mathsf T}y - c^{\mathsf T}x - (x^{\mathsf T}A^{\mathsf T}y)^{\mathsf T} + (x^{\mathsf T}A^{\mathsf T}y) = b^{\mathsf T}y - c^{\mathsf T}x.
\end{aligned}$$
Имеет место следующая цепочка равносильных переходов:
$$\begin{aligned}
\begin{cases} x - \text{оптимальный план задачи } (\Pi) \\ y - \text{оптимальный план задачи } (\mathfrak{D}) \end{cases} &\leftrightarrow c^{\mathsf T}x = b^{\mathsf T}y \leftrightarrow b^{\mathsf T}y - c^{\mathsf T}x = 0 \xleftrightarrow{(1.14)} \\
&\xleftrightarrow{(1.14)} \sum_{i\in I_{\le}\cup I_{\ge}\cup I_{=}} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = 0 \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i\in I_{\le}\cup I_{\ge}\cup I_{=}} u_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} v_j = 0 \end{cases} \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \begin{cases} u_i = 0, \quad \forall i \in I_{\le}\cup I_{\ge}\cup I_{=} \\ v_j = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{cases}
\end{aligned}$$
□

1.3 Двойственный симплекс-метод

Помимо симплекс-метода существуют и другие вычислительные схемы решения задач линейного программирования. Мы рассмотрим одну из них, которая носит название двойственный симплекс-метод.

Двойственный симплекс-метод состоит, фактически, в применении симплекс-метода к двойственной задаче. Этот метод удобен тем, что его можно применять в том случае, когда решается не одна, а несколько задач линейного программирования, каждая из которых получается из предыдущей добавлением одного нового ограничения.

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования (П)

$$
\begin{aligned}
&c^{\intercal}x \to \max \\
&Ax = b \qquad \text{(A)} \\
&x \geq 0, \qquad \text{(B)}
\end{aligned}
$$

где $x^{\intercal} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — переменные, A — матрица размера $m \times n$. Предполагаем, что $rank(A) = m$.

В двойственном симплекс-методе строится последовательность векторов $\kappa \in \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют условию (A), но при этом необязательно удовлетворяют условию (B), — последовательность так называемых псевдопланов.

Определение 1.4. Пусть y — допустимый план двойственной задачи ($\mathfrak{D}$) и $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Пара (y, B) называется базисным двойственным планом, если

а) $|B| = m$;

б) $|A_B| \neq 0$;

в) $y^{\intercal} = c_B^{\intercal} A_B^{-1}$.

Вектор $\kappa \in \mathbb{R}^n$, который строится по правилам $\kappa_B = A_B^{-1}b$ и $\kappa_N = 0$, называется псевдопланом, соответствующим базисному двойственному плану (y, B).

Лемма 1.2. *Псевдоплан κ удовлетворяет условию* (A).

Доказательство. Имеет место следующая цепочка переходов: $\kappa_B = A_B^{-1}b \to A_B\kappa_B = b \to A_B\kappa_B + A_N\kappa_N = b \to A\kappa = b$. □

Лемма 1.3. *Если псевдоплан* $\kappa \geq 0$, *то* κ *— оптимальный план задачи* (П).

Доказательство. Пусть $\kappa \geq 0$ — псевдоплан, ассоциированный с базисным двойственным планом (y, B). Для того, чтобы доказать, что κ — оптимальный план прямой задачи (П) достаточно показать, что $c^\intercal x = b^\intercal y$. Имеем

$$\begin{aligned}
&c_B^\intercal \underbrace{A_B^{-1} b}_{\kappa_B} = \underbrace{c_B^\intercal A_B^{-1}}_{y^\intercal} b \\
&c_B^\intercal \kappa_B = y^\intercal b \\
&c_B^\intercal \kappa_B + c_N^\intercal \kappa_N = y^\intercal b \\
&c^\intercal x = b^\intercal y.
\end{aligned}$$

□

Если $\kappa \geq 0$, то κ — оптимальный план задачи (П). Рассмотрим ситуацию, когда в псевдоплане κ есть отрицательные компоненты.

Лемма 1.4. *Пусть* $(\kappa_B)_s < 0$ (s*-я по счету базисная компонента псевдоплана* κ *меньше* 0) *и*

$$(s\text{-я строка } A_B^{-1}) A_N \geq 0. \tag{1.15}$$

Тогда целевая функция двойственной задачи ($\mathfrak{D}$) *не ограничена снизу на множестве допустимых планов, а прямая задача* (П) *несовместна.*

Доказательство. Пусть (y, B) — базисный двойственный план и κ — соответствующий псевдоплан такой, что $(\kappa_B)_s < 0$. Предположим (1.15).

Рассмотрим произвольное число $\theta \in \mathbb{R}$. Покажем, что существует допустимый план $y(\theta)$ двойственной задачи ($\mathfrak{D}$), на котором значение целевой функции меньше θ, т.е. $b^\intercal y(\theta) < \theta$. Положим $y(\theta) = y + \Delta y$, где $\Delta y^\intercal = \sigma(s\text{-я строка } A_B^{-1})$, $\sigma > 0$ — положительное число. Убедимся, что $y(\theta)$ — допустимый план задачи ($\mathfrak{D}$). Достаточно доказать, что $A_B^\intercal y(\theta) \geq c_B$ и $A_N^\intercal y(\theta) \geq c_N$.

Легко доказать первое неравенство

$$\begin{aligned}
A_B^\intercal y(\theta) = A_B^\intercal (y + \Delta y) = A_B^\intercal y + A_B^\intercal \Delta y = c_B + (\Delta y^\intercal A_B)^\intercal = \\
= c_B + \sigma(0, \dots, 0, \underset{s}{1}, 0, \dots, 0)^\intercal \geq c_B.
\end{aligned}$$

Аналогично, для второго неравенства

$$\begin{aligned}
A_N^\intercal y(\theta) = A_N^\intercal (y + \Delta y) = A_N^\intercal y + A_N^\intercal \Delta y \geq c_N + (\Delta y^\intercal A_N^\intercal)^\intercal = \\
= c_N + \sigma((s\text{-я строка } A_B^{-1}) A_N)^\intercal \geq c_N.
\end{aligned}$$

Оценим $b^\intercal \Delta y$:

$$\begin{aligned} b^\intercal \Delta y = \Delta y^\intercal b = \Delta y^\intercal A_B \kappa_B = \sigma(s\text{-я строка}\, A_B^{-1}) A_B \kappa_B = \\ = \sigma(0, \dots, 0, \underset{s}{1}, 0, \dots, 0)\kappa_B = \sigma(\kappa_B)_s. \end{aligned}$$

Так как $\sigma > 0$ и $(\kappa_B)_s < 0$, то

$$b^\intercal \Delta y = \sigma(\kappa_B)_s < 0. \tag{1.16}$$

Получаем, что

$$b^\intercal y(\theta) = b^\intercal(y + \Delta y) = b^\intercal y + b^\intercal \Delta y = b^\intercal y + \sigma(\kappa_B)_s.$$

Выберем $\sigma > 0$ так, чтобы $b^\intercal y(\theta) < \theta$, т.е. $b^\intercal y + \sigma(\kappa_B)_s < \theta$. Выразим σ

$$\sigma > \frac{\theta - b^\intercal y}{(\kappa_B)_s}.$$

□

Осталось рассмотреть случай, когда (*а*) в псевдоплане κ есть отрицательные компоненты, т.е. $(\kappa_B)_s < 0$ и (*б*) условие (1.15) не выполняется, т.е. найдется небазисный индекс $j \in N$ такой, что

$$(s\text{-я строка}\, A_B^{-1}) A_j < 0.$$

Мы хотим по базисному двойственному плану (y, B) построить новый базисный двойственный план (y', B') такой, что значение целевой функции двойственной задачи на y' меньше, чем на y.

Положим

$$y' = y + \Delta y,$$

где $\Delta y^\intercal = \sigma(s\text{-я строка}\, A_B^{-1})$. Согласно (1.16)

$$b^\intercal \Delta y = \sigma(\kappa_B)_s < 0.$$

Тогда

$$b^\intercal y' = b^\intercal(y + \Delta y) = b^\intercal y + b^\intercal \Delta y < b^\intercal y.$$

Значение целевой функции двойственной задачи ($\mathfrak{D}$) на y' меньше, чем на y. Выберем положительное число σ таким образом, чтобы y' был допустимым планом задачи ($\mathfrak{D}$).

Так как y — допустимый план задачи ($\mathfrak{D}$), то $A^\intercal y \ge c$, т.е. $(A^\intercal y)_B \ge c_B$ и $(A^\intercal y)_N \ge c_N$. Нас интересует значение $\sigma > 0$, при котором $A^\intercal y' \ge c$:

$$A^\intercal y' = A^\intercal(y + \Delta y) = A^\intercal y + A^\intercal \Delta y = A^\intercal y + (\Delta y^\intercal A)^\intercal.$$

При этом

$$\Delta y^\intercal A = \sigma(s\text{-я строка } A_B^{-1})(A_B \mid A_N) = (\underbrace{0,\dots,0,\overset{s}{\sigma},0,\dots,0}_{(\Delta y^\intercal A)_B} \mid \underbrace{\sigma(s\text{-я строка } A_B^{-1})A_N}_{(\Delta y^\intercal A)_N}).$$

Тогда

$$(A^\intercal y')_B = (A^\intercal y)_B + (\Delta y^\intercal A)_B \geq (A^\intercal y)_B \geq c_B;$$
$$(A^\intercal y')_N = (A^\intercal y)_N + (\Delta y^\intercal A)_N = (A^\intercal y)_N + \sigma((s\text{-я строка } A_B^{-1})A_N)^\intercal.$$

Рассмотрим произвольный небазисный индекс j. Мы хотим, чтобы

$$(A^\intercal y)_j + \sigma \underbrace{((s\text{-я строка } A_B^{-1})A_j)}_{\mu_j} \geq c_j. \tag{1.17}$$

Если $\mu_j \geq 0$, то неравенство (1.17) выполняется при любом σ. Пусть $\mu_j < 0$. Выразим в (1.17) величину σ

$$\sigma \leq \frac{c_j - (A^\intercal y)_j}{\mu_j}.$$

Каждый небазисный индекс j, для которого $\mu_j < 0$, определяет верхнюю грань на значение величины σ. Выберем в качестве σ минимальную грань

$$\sigma = \min_{j \in N: \mu_j < 0} \frac{c_j - (A^\intercal y)_j}{\mu_j}.$$

Остается подкорректировать множество базисных индексов

$$B' = (B \setminus \{s\text{-й базисный индекс в } B\}) \cup \{j\},$$

где j — это индекс, на котором достигается минимум при вычислении σ.

Двойственный симплекс-метод

Вход: c, A, b — параметры задачи (П), (y, B) — базисный двойственный план.

Выход: сообщение о том, что задача (П) несовместна или оптимальный план задачи (П).

Шаг 1. Находим псевдоплан $\kappa = (\kappa_B = A_B^{-1}b, \kappa_N = 0)$, соответствующий базисному двойственному плану (y, B).

Шаг 2. Если $\kappa \geq 0$, то STOP: κ — оптимальный план задачи (П).

Шаг 3. Находим отрицательную компоненту в псевдоплане κ, $(\kappa_B)_s < 0$.

Шаг 4. Если $(s\text{-я строка } A_B^{-1})A_N \geq 0$, то STOP: задача (П) несовместна.

Шаг 5. Находим

$$\sigma = \min \frac{c_j - (A^\intercal y)_j}{(s\text{-я строка } A_B^{-1})A_j},$$

где минимум берется по всем небазисным индексам $j \in N$ таким, что

$$(s\text{-я строка } A_B^{-1})A_j < 0.$$

Шаг 6. Находим $\Delta y^\intercal = \sigma(s\text{-я строка } A_B^{-1})$.

Шаг 7. $y \leftarrow y + \Delta y$, $B \leftarrow (B \setminus \{s\text{-й базисный индекс в } B\}) \cup \{j\}$, где j — индекс, на котором достигается минимум на шаге 5.

Шаг 8. Переходим на шаг 1.