> # Лабортаорная работа 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка

> # Выполнил студент группы 153503 Киселёва Е.А.

> # Вариант 9

> $restart;$
Задание 1.
Для данного дифференциального уравнения методом изоклин постройте интегральную кривую, проходящую через точку М
1.9. $y' \cdot (x^2+2) = y;\ M(2, 2)$

> $diffEq := diff(y(x), x) = \dfrac{y(x)}{x^2+2}:$

$K := k = \dfrac{y(x)}{x^2+2}:$

$f := solve(K, y(x));$

$$f := k\,(x^2+2) \qquad \textbf{(1)}$$

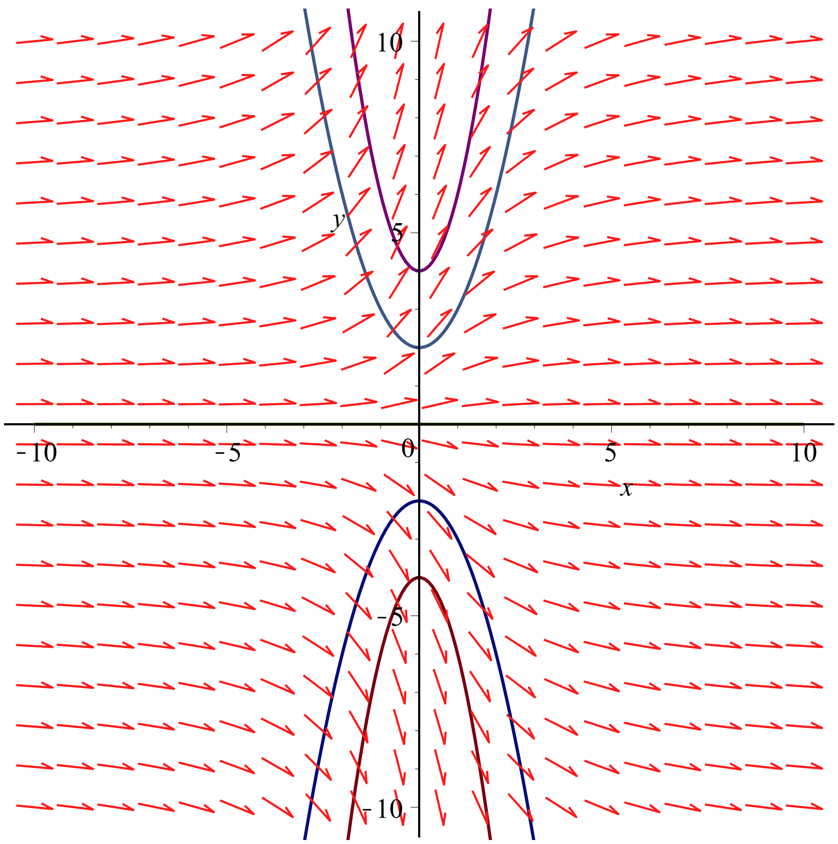
> $isoclines := [seq(subs(k=i, f), i=-2..2)];$

$$isoclines := [-2\,x^2-4,\ -x^2-2,\ 0,\ x^2+2,\ 2\,x^2+4] \qquad \textbf{(2)}$$

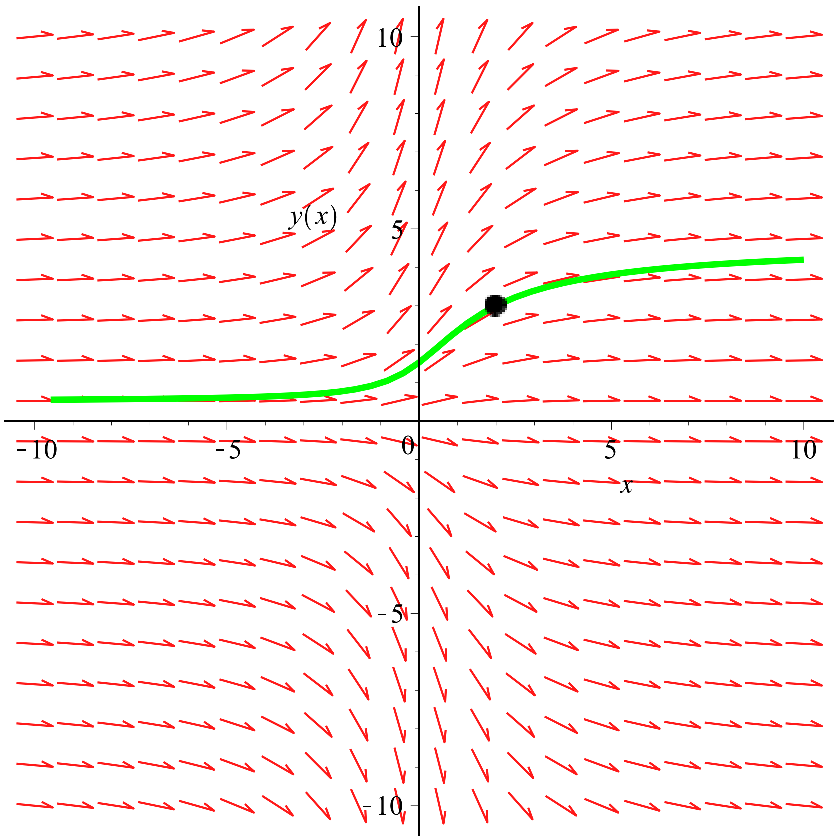
> $isoclinesPlot := plot(isoclines, x=-10..10, y=-10..10);$

$$isoclinesPlot := PLOT(\ldots) \qquad \textbf{(3)}$$

> $with(DEtools) : with(plots) :$
$directionField := directionFieldPlot(diffEq, y(x), x=-10..10, y=-10..10) :$
$plots[display](isoclinesPlot, directionField);$



> $with(DEtools):with(plots):$
$integralCurve := DEplot(diffEq, y(x), x=-10..10, y=-10..10, [y(2)=3], linecolor=green):$
$pointM := plot([[2, 3]], style=point, symbolsize=20, symbol=solidcircle, color=black):$
$plots[display](integralCurve, pointM);$



> *restart*;
 # Задание 2

 # ПЕРВАЯ ЧАСТЬ
 # Найдите линию, проходящую через точку M0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор $\overline{MN}$ с *концом на оси Oy имеет длину, равную a,* и *образует острый угол* с *положительным направлением оси Oy. Сделайте чертеж.*

 # 2.9.1. M0(20,3), a = 29

$a := 29 :$
$y := f(x0) + diff(f(x0), x0) \cdot (x - x0) :$
$tan\_y\_x1 := f(x) + diff(f(x), x) \cdot (x1 - x) :$
$norm\_y\_x1 := f(x) - \dfrac{1}{diff(f(x), x)} \cdot (x1 - x) :$
$Mx(x, f(x)), Nx\left(0, f(x) + \dfrac{x}{diff(f(x), x)}\right) :$
$MN := simplify\left(\mathrm{sqrt}\left((x - 0)^2 + \left(f(x) - f(x) - \dfrac{x}{diff(f(x), x)}\right)^2\right)\right) = a;$

$$MN := \sqrt{\frac{x^2\left(\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2+1\right)}{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}} = 29 \quad (4)$$

> *funcDiff* := *solve*(*MN*, *diff*(*f*(*x*), *x*))

$$funcDiff := -\frac{x}{\sqrt{-x^2+841}}, \frac{x}{\sqrt{-x^2+841}} \quad (5)$$

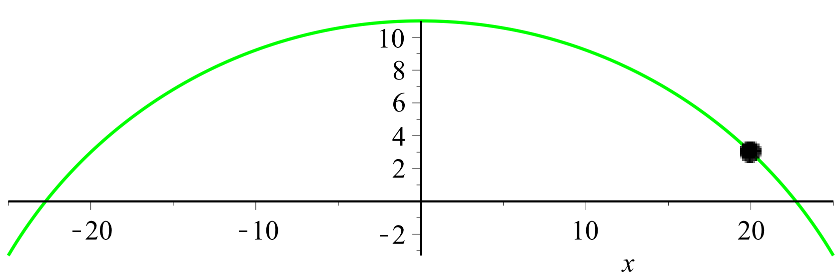
> *func* := *simplify*(*int*(*funcDiff*[1], *x*));

$$func := \sqrt{-x^2+841} \quad (6)$$

> *M0*(20, 3) :
x = 20 :
C := *fsolve*(sqrt($a^2 - 20^2$) + *C* = 3);

$$C := -18. \quad (7)$$

> *line* := *plot*(sqrt($a^2 - x^2$) + *C*, *x* = -25 ..25, *color* = *green*, *scaling* = *constrained*) :
pointM := *plot*([[20, 3]], *style* = *point*, *symbolsize* = 20, *symbol* = *solidcircle*, *color* = *black*) :
plots[*display*](*line*, *pointM*);



> *restart*;

ВТОРАЯ ЧАСТЬ
Найдите линию, проходящую через точку M0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор MN с концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox, обратно пропорциональную абсциссе точки M. Коэффициент пропорциональности равен a. Сделайте чертеж.

2.9.2. M0(4, $\frac{1}{e^2}$), $a = 4$

$x0 := 4 :$
$y0 := \exp(-2) :$
$a := 4 :$

$expr := x - xn = \frac{a}{x} :$
$xn\_ := solve((x - xn)\cdot diff(y(x), x) = y(x), xn);$

$$xn\_ := -\frac{-\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) x + y(x)}{\frac{d}{dx} y(x)} \tag{8}$$

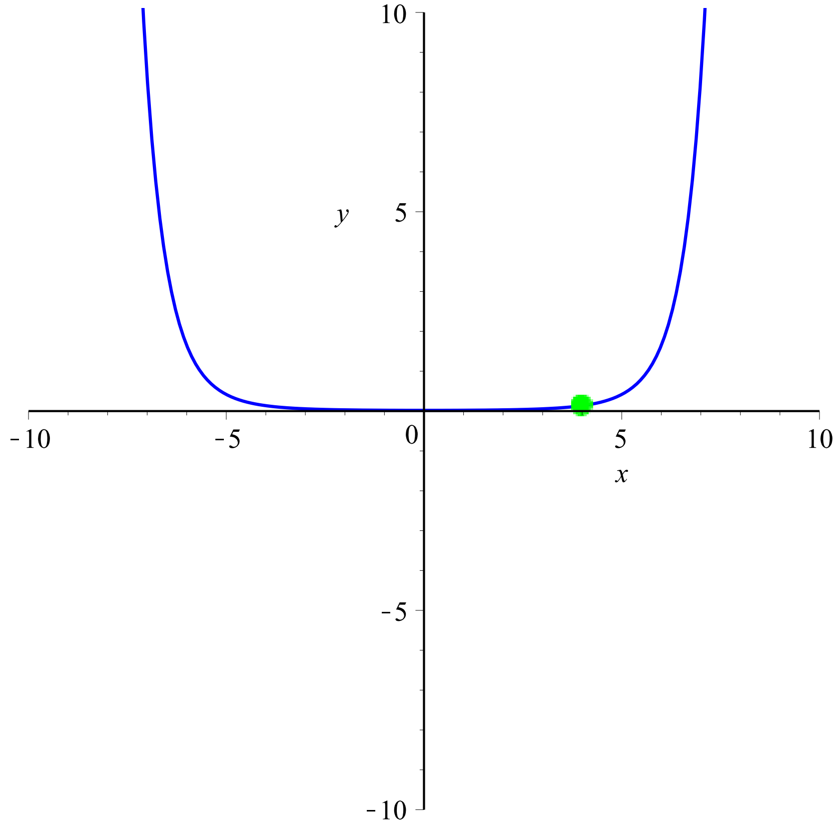
> $result := dsolve(subs(xn = xn\_, expr));$

$$result := y(x) = \_C1\ e^{\frac{1}{8} x^2} \tag{9}$$

> $simplify(dsolve(\{subs(xn = xn\_, expr), y(x0) = y0\}));$

$$y(x) = e^{-4 + \frac{1}{8} x^2} \tag{10}$$

> $line := plot(rhs(\%), x = -10..10, y = -10..10, color = blue) :$
$pointM := plot([[x0, y0]], style = point, symbolsize = 20, symbol = solidcircle, color = green) :$
$plots[display](line, pointM);$



> *restart*;

 # Задание 3
 # Найдите общий интеграл уравнения. Постройте на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и какую-либо интегральную кривую. Сделайте вывод о типе особой точки.

 # 3.9. $y' = \dfrac{7\cdot x + 57\cdot y + 64}{63\cdot x + y + 64}$

$simplify\left(dsolve\left(diff(y(x), x) = \dfrac{7\cdot x + 57\cdot y(x) + 64}{63\cdot x + y(x) + 64} \right) \right);$

$$-8\ln\left(-\frac{y(x) - x}{x+1}\right) + 7\ln\left(-\frac{y(x) + 8 + 7x}{x+1}\right) - \ln(x+1) - \_C1 = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

> $solve([7\cdot x + 57\cdot y + 64 = 0, 63\cdot x + y + 64 = 0]);$

$$\{x = -1, y = -1\} \qquad \textbf{(12)}$$

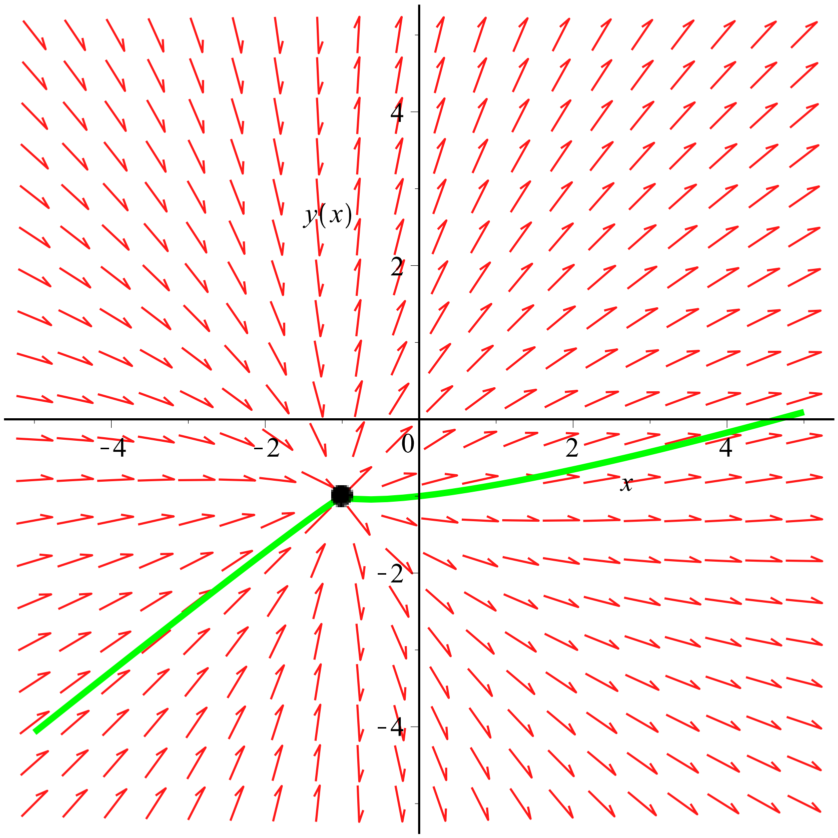
> $with(DEtools) : with(plots) :$

$integralCurve := DEplot\left(diff(y(x), x) = \dfrac{7\cdot x + 57\cdot y(x) + 64}{63\cdot x + y(x) + 64}, y(x), x = -5 ..5, y = -5 ..5, [y(0)\right.$

$=-1$], *linecolor* = *green*) :

specialPoint := *plot*([[−1, −1]], *style* = *point*, *symbolsize* = 20, *symbol* = *solidcircle*, *color* = *black*) :

plots[*display*](*integralCurve*, *specialPoint*);



> \# *Задание 4*
\# *Найдите решение задачи Коши. Сделайте чертеж интегральной кривой.*

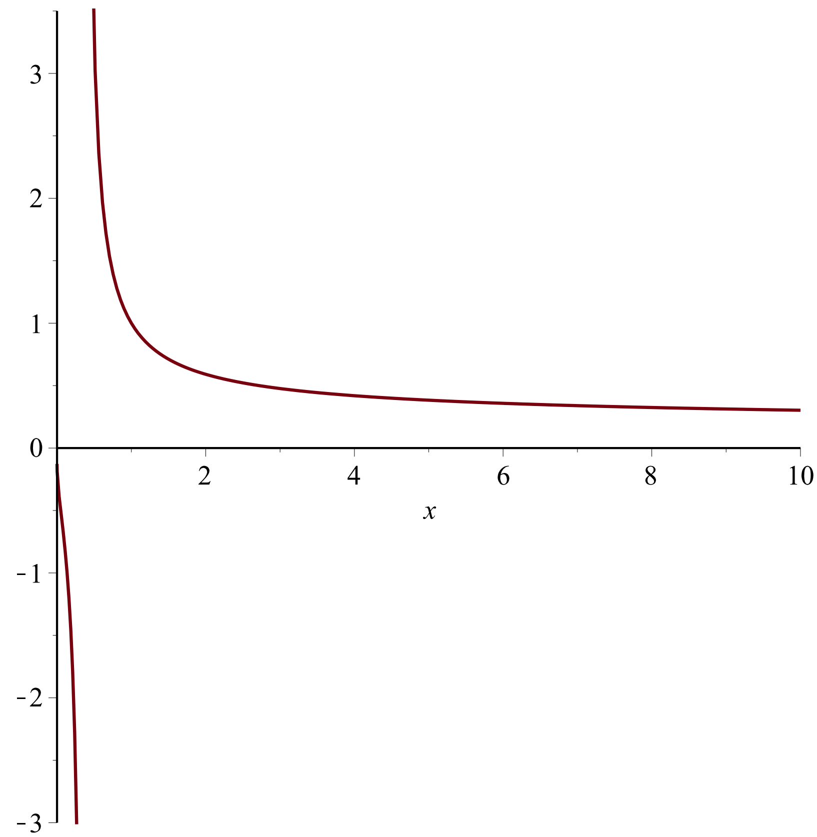
\#*4.9.* $x \cdot y' + y = y^2 \cdot \ln(x),\ y(1) = 1$

dsolve$\left(x \cdot diff(y(x), x) + y(x) = \ln(x) \cdot (y(x))^2\right)$;
dsolve$\left(\{ x \cdot diff(y(x), x) + y(x) = \ln(x) \cdot (y(x))^2, y(1) = 1\}\right)$;

$$y(x) = \frac{1}{1 + x\_C1 + \ln(x)}$$

$$y(x) = \frac{1}{\ln(x) + 1} \qquad \textbf{(13)}$$

> *plot*$\left(\frac{1}{\ln(x) + 1}, discont = true\right)$;



> \# Задание 5
\# Решите дифференциальные уравнения. Постройте в одной системе координат интегральные кривые при целых значениях произвольной постоянно от -1 до 1

restart;

\# ПЕРВАЯ ЧАСТЬ
\#5.9.1. $x = y' \cdot sinh(y') + cosh(y')$;

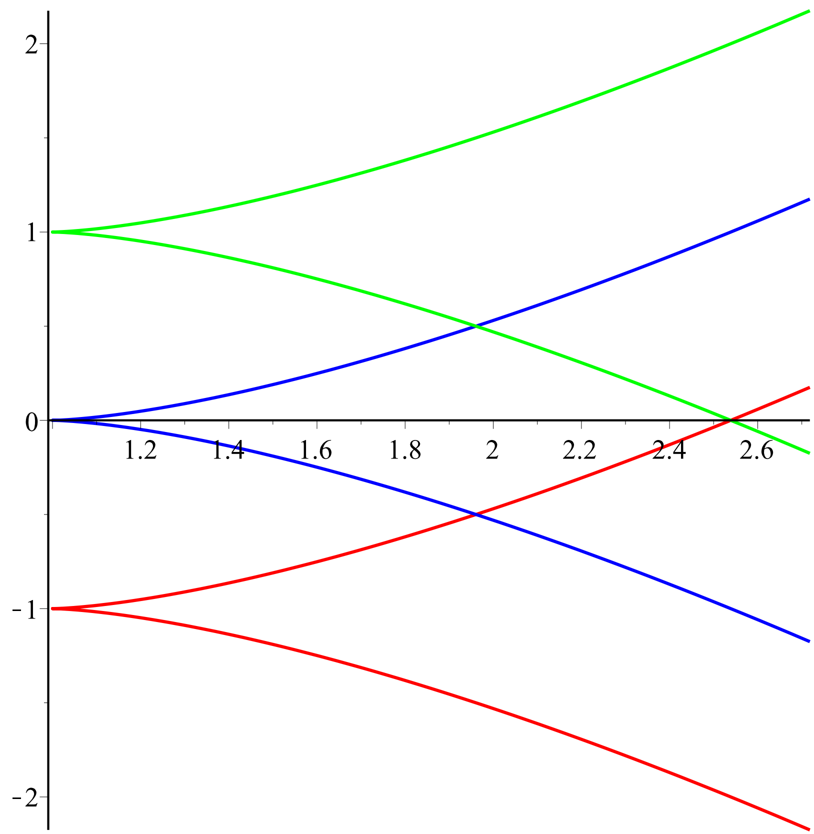
$X := \cosh(t) + t \cdot \sinh(t)$;
$dX := diff(X, t)$;

$$X := \cosh(t) + t\sinh(t)$$
$$dX := 2\sinh(t) + t\cosh(t) \qquad \textbf{(14)}$$

> $Y := dsolve(diff(y(t), t) = t \cdot (2\sinh(t) + t\cosh(t)))$;

$$Y := y(t) = \sinh(t)\, t^2 + \_C1 \qquad \textbf{(15)}$$

> $f1 := plot([\cosh(t) + t \cdot \sinh(t), t^2 \cdot \sinh(t) - 1, t = -1..1], color = red)$:
$f2 := plot([\cosh(t) + t \cdot \sinh(t), t^2 \cdot \sinh(t), t = -1..1], color = blue)$:
$f3 := plot([\cosh(t) + t \cdot \sinh(t), t^2 \cdot \sinh(t) + 1, t = -1..1], color = green)$:
$plots[display](f1, f2, f3)$;



> *restart*;

\# *ВТОРАЯ ЧАСТЬ*

\#*5.9.2.* $y = \frac{1}{9} \cdot y'^3 \cdot (3 \cdot \ln(y') - 1)$

> $Y := \frac{1}{9} \cdot t \cdot (3 \cdot \ln(t) - 1);$
$dY := diff(Y, t);$

$$Y := \frac{1}{9}\, t\, (3 \ln(t) - 1)$$

$$dY := \frac{1}{3} \ln(t) + \frac{2}{9} \tag{16}$$

> $X := dsolve\left(diff(x(t), t) = \frac{\frac{1}{3} \ln(t) + \frac{2}{9}}{t}\right);$

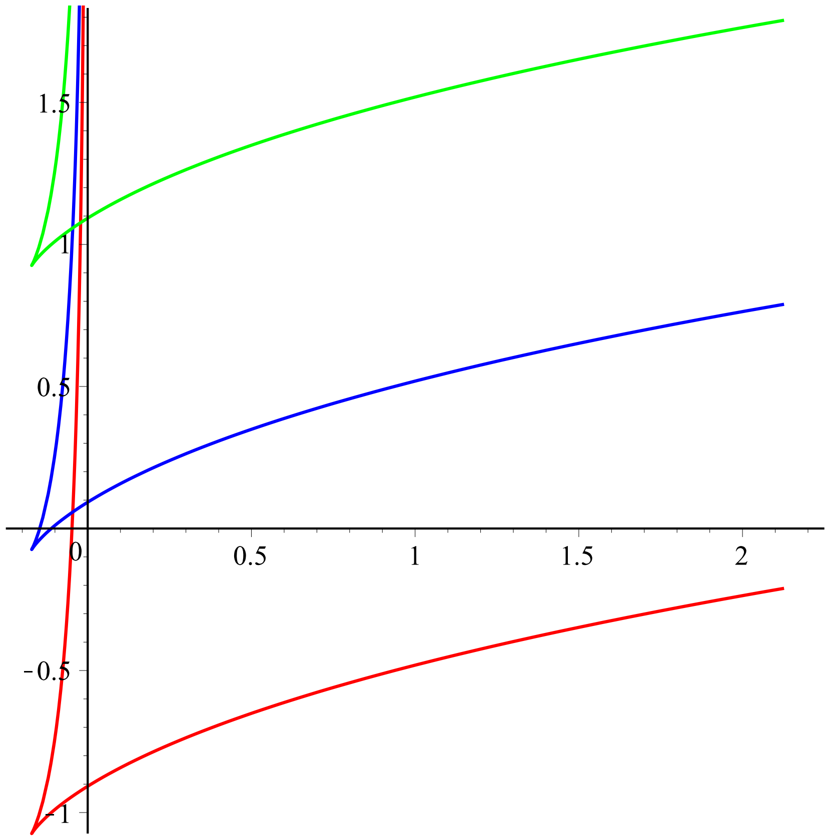
$$X := x(t) = \frac{1}{6} \ln(t)^2 + \frac{2}{9} \ln(t) + \_C1 \tag{17}$$

> $f1 := plot\left(\left[\frac{1}{9} \cdot t \cdot (3 \cdot \ln(t) - 1),\ \frac{1}{6} \ln(t)^2 + \frac{2}{9} \ln(t) - 1,\ t = -5..5\right], color = red\right):$

$f2 := plot\left(\left[\frac{1}{9}\cdot t\cdot(3\cdot\ln(t)-1), \frac{1}{6}\ln(t)^2+\frac{2}{9}\ln(t), t=-5..5\right], color=blue\right):$

$f3 := plot\left(\left[\frac{1}{9}\cdot t\cdot(3\cdot\ln(t)-1), \frac{1}{6}\ln(t)^2+\frac{2}{9}\ln(t)+1, t=-5..5\right], color=green\right):$

$plots[display](f1, f2, f3);$



> $restart;$

 # Задание 6
 # Найдите все решения уравнения. Постройте в одной системе координат график особого решения и интегральных кривых при целых значениях произвольной постоянной от -3 до 3

 # 6.9. $y = xy' + 2\cdot y'^2 - 3$

$df := dsolve\left(y(x) = x\cdot diff(y(x), x) + 2\cdot(diff(y(x), x))^2 - 3\right);$

$$df := y(x) = -\frac{1}{8}x^2 - 3, y(x) = 2\_C1^2 + \_C1\,x - 3 \quad \textbf{(18)}$$

> $comm := rhs(df[2]);$

$$comm := 2\_C1^2 + \_C1\,x - 3 \quad \textbf{(19)}$$

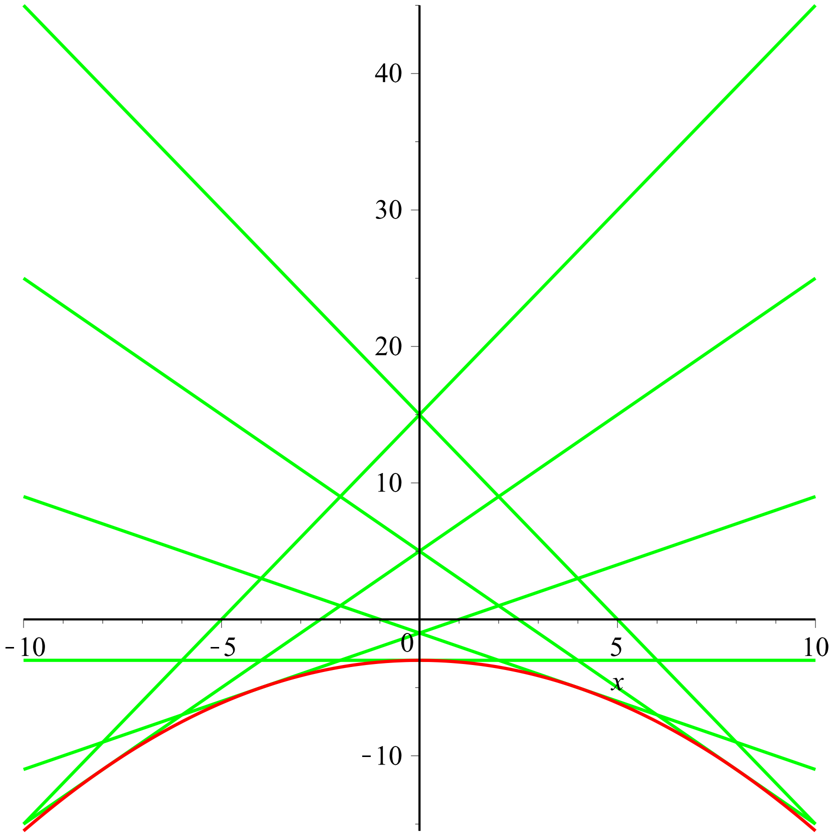
> $spec := rhs(df[1]);$

$$spec := -\frac{1}{8}x^2 - 3 \quad \textbf{(20)}$$

> $f := seq(subs(\_C1 = i, comm), i = -3..3);$

$$f := -3x + 15, -2x + 5, -x - 1, -3, x - 1, 2x + 5, 3x + 15 \quad \textbf{(21)}$$

> $plot([f, spec], color = [green, green, green, green, green, green, green, red]);$



>