Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №13
Метод сеток решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности

Выполнил: студент гр. 053501
Селивестров В.А.

Руководитель: доцент
Анисимов В.Я.

Минск 2022

1. Цель работы

- изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения теплопроводности;
- составить алгоритм решения уравнения теплопроводности методом сеток, применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы решения уравнения теплопроводности по разработанным алгоритмам;
- получить численное решение заданного уравнения теплопроводности

2. Краткие теоретические сведения

Требуется найти непрерывную на замкнутом прямоугольнике D функцию $u(x,t)$, которая на D' удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),$$

которое при $t = 0$ удовлетворяет начальном условию

$$u(x,0) = s(x),$$

а при $x = 0$ и $x = 1$ подчиняется краевым условиям

$$u(0,t) = p(t), u(1,t) = q(t),$$

где $f(x,t), s(x), p(t), q(t)$.

Такая задача называется смешанной, поскольку она содержит как начальные условия, так и краевые условия.

Пусть $h = \frac{1}{N}, \tau = \frac{T}{M}$ – шаги сетки по x и t, N и M – натуральные числа, а $x_k = kh, t_\nu = \nu\tau, u_k^\nu = u(x_k, u_\nu)$. Получим сетки:

$$\omega_h = \{(x_k, t_\nu): k = 0,1, \dots, N, \nu = 0,1, \dots, M\},$$

$$\omega_h' = \{(x_k, t_\nu): k = 1,2, \dots, N-1, \nu = 1,2, \dots, M\},$$

$$\omega_h^* = \frac{\omega_h}{{\omega_h}'}$$

Введём разностный оператор Λ:

$$\Lambda y_k^\nu = -\frac{y_{k-1}^\nu - 2y_k^\nu + y_{k+1}^\nu}{h^2}$$

Зададим на сетке ω_h^* тождественный оператор $l^h y \equiv y$ и сеточную функцию

$$g = \begin{cases} s(x_k), x = x_k, t = 0, k = 1,2, \dots, N-1 \\ p(t_\nu), x = 0, t = t_\nu, \nu = 0,1, \dots, M \\ q(t_\nu), x = 1, t = t_\nu, \nu = 0,1, \dots N \end{cases}$$

Разностные схемы

$$L_1^h y_k^\nu \equiv \frac{y_k^\nu - y_k^{\nu-1}}{\tau} + \Lambda y_k^{\nu-1} = f_k^{\nu-1},$$

$$l^h = g,$$

$$L_2^h y_k^\nu \equiv \frac{y_k^\nu - y_k^{\nu-1}}{\tau} + \Lambda y_k^\nu = f_k^\nu,$$

$$l^h y = g$$

называются двухслойными, так как шаблоны разностных уравнений содержат узлы, лежащие только на двух временных слоях – подмножествах сетки ω_h, отвечающих значениям времени $t = t_{v-1}$ и $t = t_v$. Слой, находящийся на горизонтальной прямой $t = t_{v-1}$, называется нижним, а слой, находящийся на горизонтальной прямой $t = t_v$ – верхним. Разностные уравнения выше аппроксимируют дифференциальное уравнение на решении u данной задачи со вторым порядком по h и с первым порядком по t. Конечная разностная схема имеет вид:

$$y_k^v = \frac{\tau}{h^2} y_{k-1}^{v-1} + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) y_k^{v-1} + \frac{\tau}{h^2} y_{k+1}^{v-1} + \tau f_k^{v-1}$$

3. Программная реализация

Для выполнения лабораторной работы были использованы язык программирования *Python* и среда разработки *Microsoft Visual Studio Code*.

- **Задание 1.** *task1_1_3.py (п. 1-4), task1_4.py (п. 5), task1_5_7.py (п. 6)*
- **Задание 2.** *task2_1.py (п. 4а), task2_2.py (п. 4б), task2_3.py (п.5)*
- **Задание 3.** *task3.py*
- **Задание 4.** *task4.py*

Вспомогательный модуль *utils* содержит функцию *tridiag_solve* (решение тридиагональной системы уравнений методом прогонки).

Вариант 8.

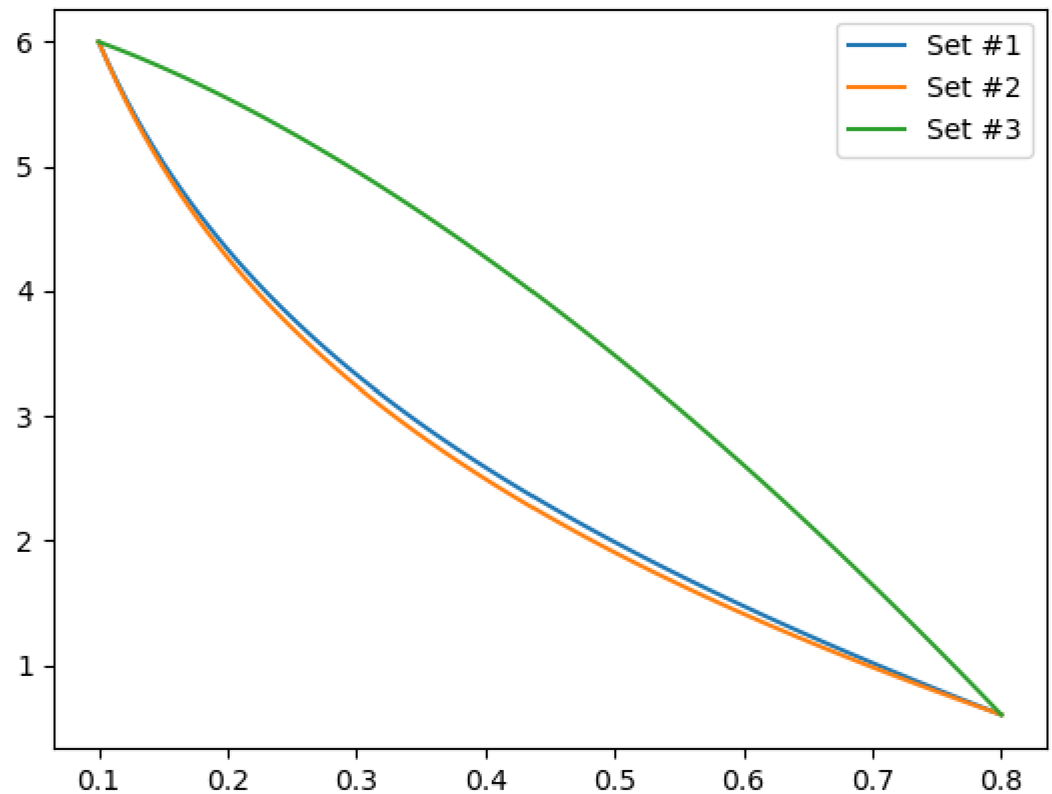
Задание 1.

Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи:

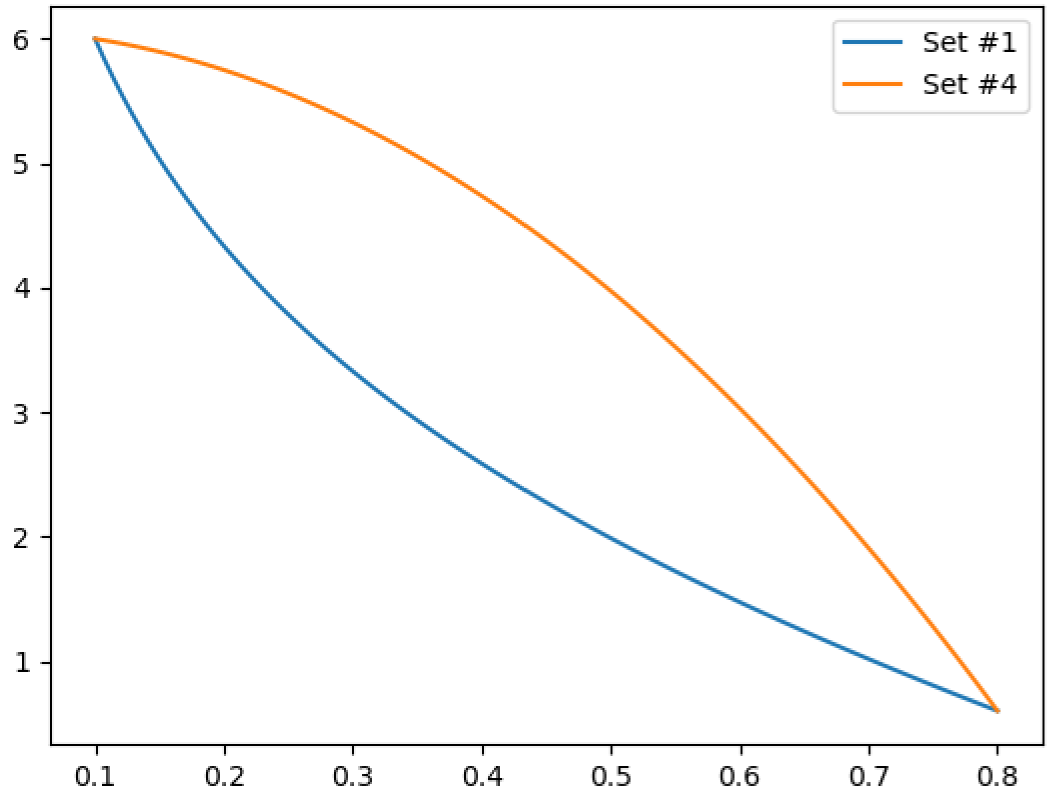
$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(K(x)\dfrac{du}{dx}\right) = f \\ u(a) = Ua, u(b) = Ub \end{cases}$$

$$N = 100, A = 0.1, B = 0.8, Ua = 6, Ub = 0.6$$

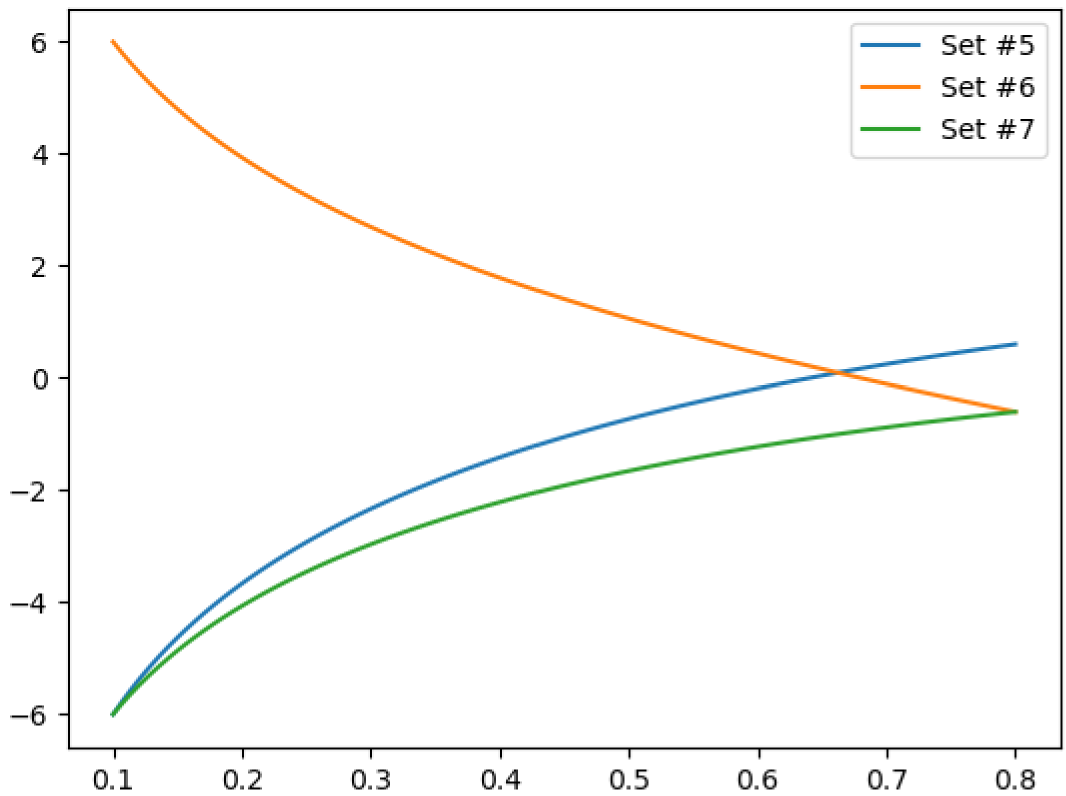
Решения задачи для наборов параметров 1-3.



Решения задачи для наборов параметров 1 и 4.



Решения задачи для наборов параметров 5-7.



Задание 2.

Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи – переменного коэффициента теплопроводности $k(x)$ и плотности источников тепла $f(x)$:

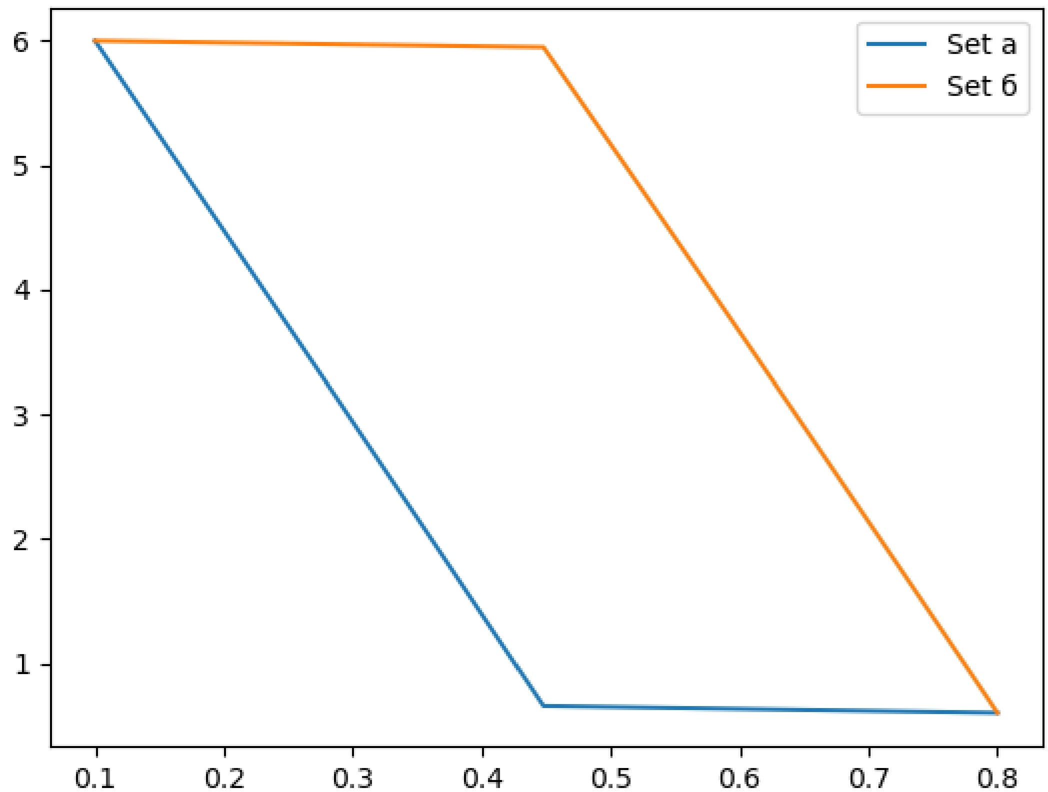
$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f, \\ u(a) = Ua, u(b) = Ub \end{cases}$$

$$N = 150, A = 0.1, B = 0.8, Ua = 6, Ub = 0.6$$

Решение задачи, положив, что стержень состоит из двух материалов с различными коэффициентами теплопроводности $k(x)$:

$$k(x) = \begin{cases} k1, a \le x \le a + \frac{b-a}{3} \\ k2, 0.5(b+a) < x \le b \end{cases}$$

при: а) $k1(1) \ll k2(100)$, б) $k1(100) \gg k2(1)$:



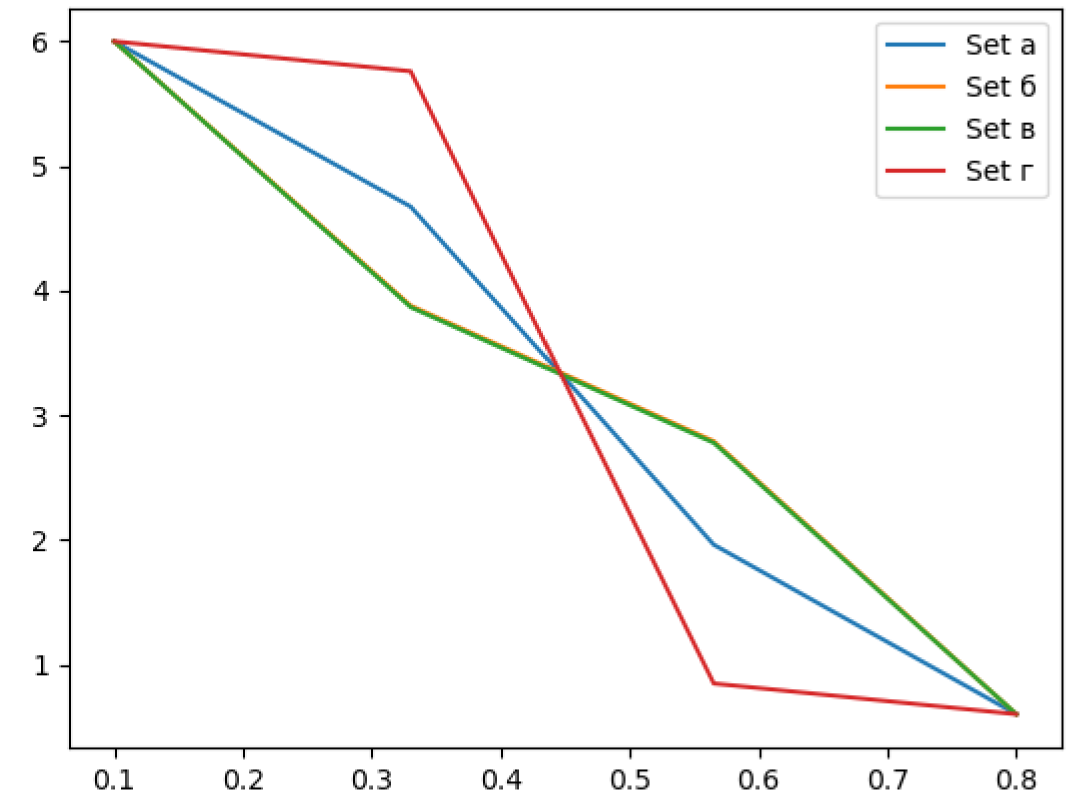
Решение задачи, положив, что стержень состоит из трёх материалов с различными свойствами:

$$k(x) = \begin{cases} k1, a \le x \le a + \dfrac{b-a}{3} \\ k2, a + \dfrac{b-a}{3} \le x \le a + \dfrac{2(b-a)}{3} \\ k3, a + \dfrac{2(b-a)}{3} < x \le b \end{cases}$$

при а) $k1(5) < k2(10) < k3(20)$; б) $k1(20) > k2(10) > k3(5)$;

в) $k1(100) = k, k2(200) = 2k, k3(100) = k$;

г) $k1(100) = 20k, k2(5) = k, k3(100) = 20k$.



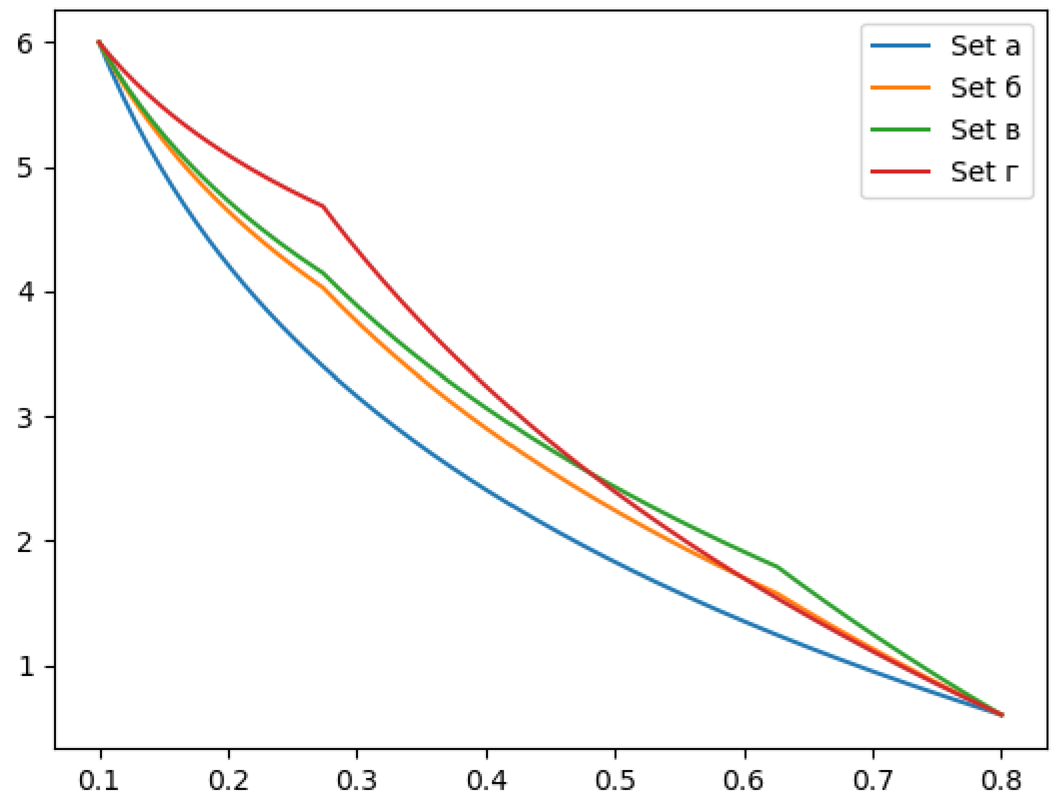
Решение задачи в зависимости от правой части – функции $f(x) = c\delta(x - x0)$ – точечного источника тепла. Взяты следующие варианты расположения источника:

а) точечный источник поставлен в середину отрезка $[a, b]$;

б) два одинаковых источника по мощности поставлены в разные точки отрезка, симметричные относительно середины отрезка;

в) два различных по мощности источника поставлены симметрично;

г) два одинаковых по мощности источника поставлены следующим образом – первый поставлен в середину отрезка $[a, b]$, а второй в середину отрезка между точкой a и первым источником.



Задание 3.

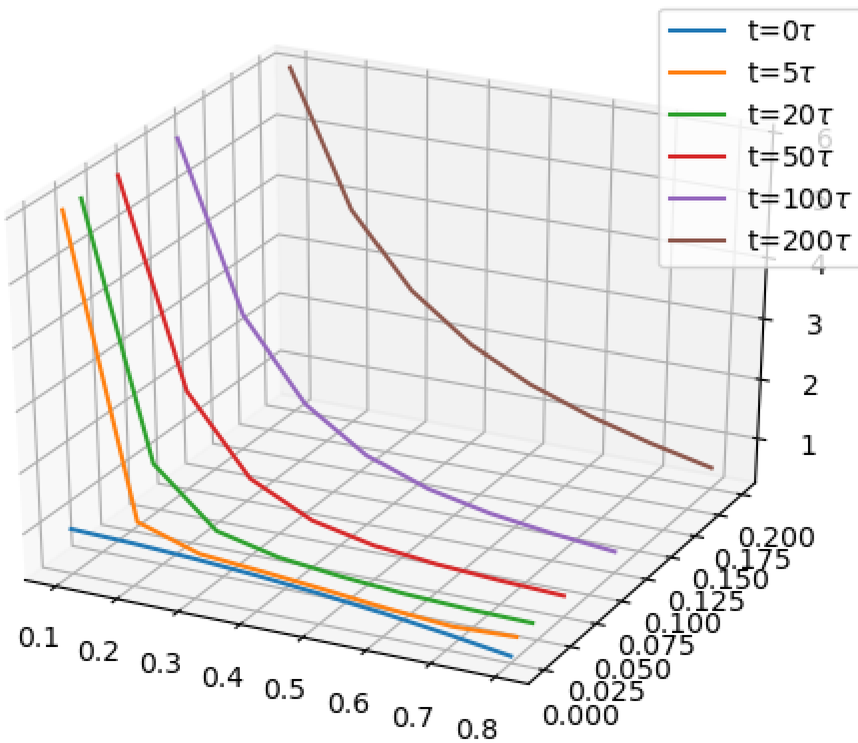
Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи – коэффициента теплопроводности и начальной температуры:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x)(1 - e^{-t}), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0,t) = Ua, u(1,t) = Ub, 0 \le t < T, \\ u(x,0) = \phi(x), 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

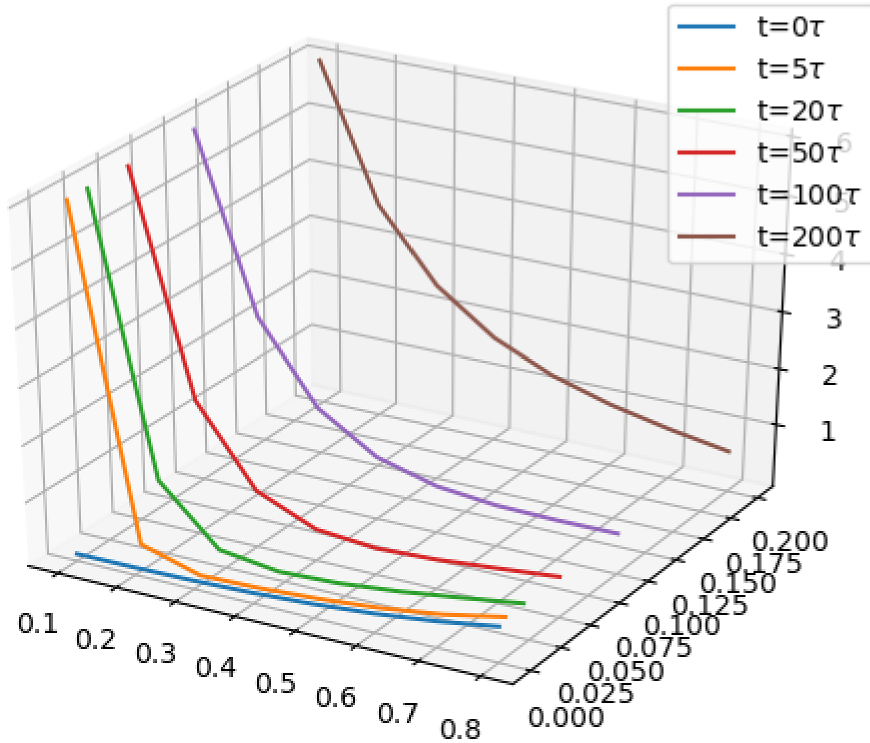
$$\tau \leq 0.5(\frac{h^2}{k})$$

$$a = 0.1, b = 0.8, Ua = 6, Ub = 0.6, k(x) = x, f(x) = x + x^{1/3}.$$

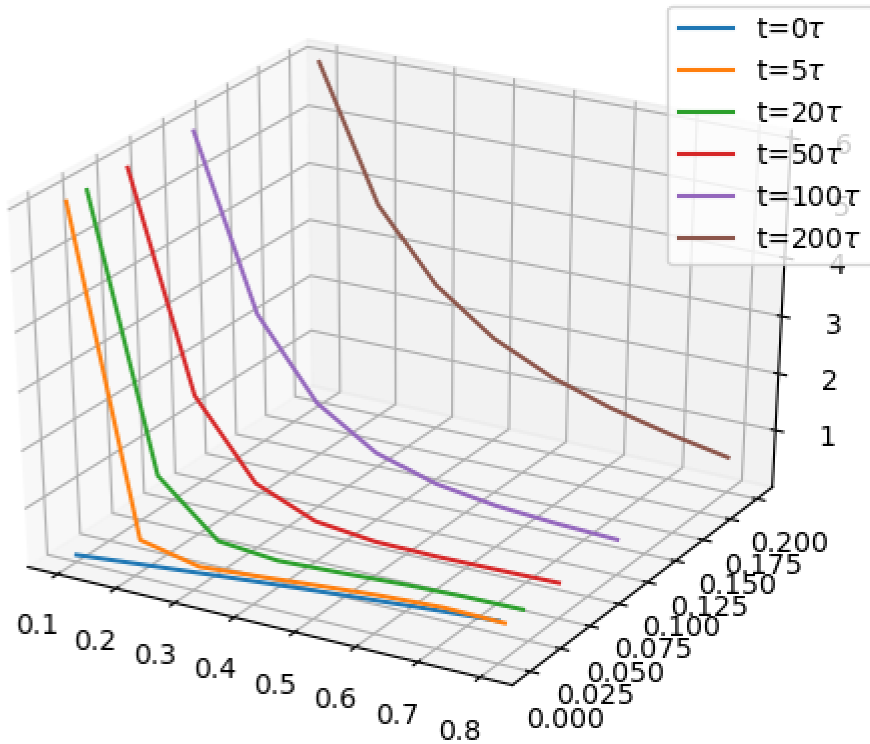
Решение задачи при $\phi(x) = 1 - x^2$:



Решение задачи при $\phi(x) = x^3$:



Решение задачи при $\phi(x) = \sin(x)$:



Задание 4.

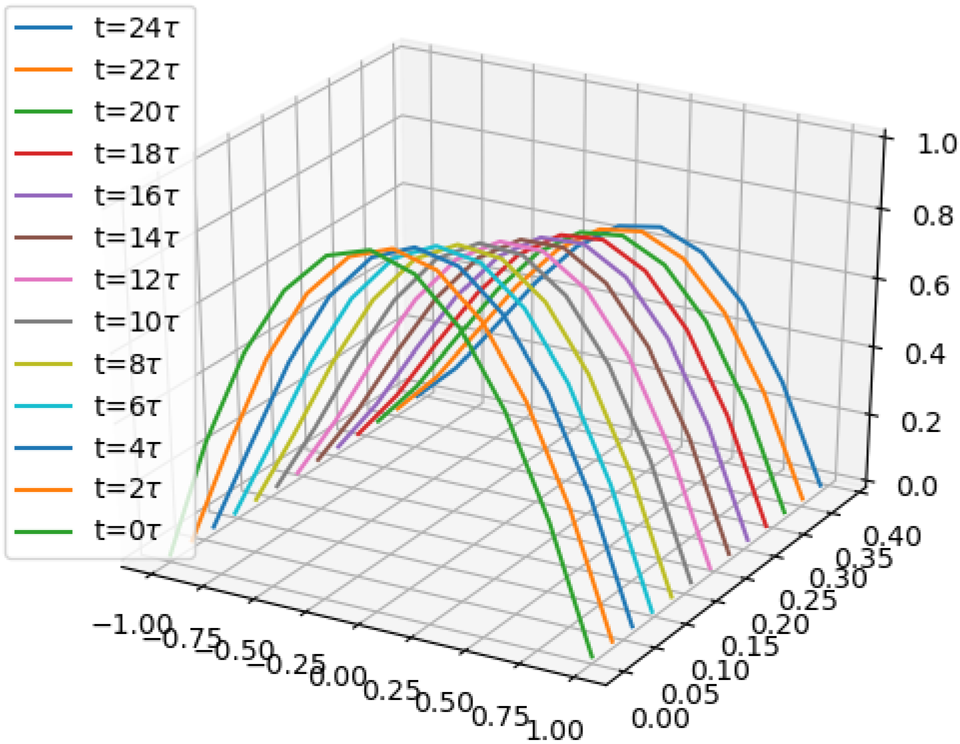
Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), a < x < b, 0 < t \le T, \\ u(a,t) = g_1(t), u(b,t) = g_2(t), 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), a \le x \le b \end{cases}$$

$$N = 10, a = -1, b = 1, k = 0.5, T = 0.4, \varphi(x) = 1 - x^2, g_1(t) = 0,$$

$$g_2(t) = 0, f(x,t) = x.$$

$$\tau \le 0.5(\frac{h^2}{k})$$



t=24τ
t=22τ
t=20τ
t=18τ
t=16τ
t=14τ
t=12τ
t=10τ
t=8τ
t=6τ
t=4τ
t=2τ
t=0τ
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.40
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

4. Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы был применён метод разностных аппроксимаций (в т.ч. явная и неявная разностные схемы) для уравнения теплопроводности, составлены алгоритмы и созданы реализации соответствующих программ на языке Python для решения поставленной задачи. Также были промоделированы стационарные и нестационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от исходных данных.