Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе

на тему

ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр.153503 Киселёва Е.А.

Руководитель: кандидат

физико-математических наук,

доцент Анисимов В.Я.

Минск 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомые функции и их производные.

Устойчивость — свойство решения дифференциального уравнения притягивать к себе другие решения при условии достаточной близости их начальных данных.

Системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием являются современным направлением в теории дифференциальных уравнений, которое имеет приложения к задачам математического моделирования в механике, технике и математической биологии. Важной проблемой для этого класса систем является проблема устойчивости решений.

Актуальной и важной с практической точки зрения является задача об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях. Этот принцип, являясь важным инструментом при исследовании критических случаев, фактически сводит изучение системы дифференциальных уравнений к изучению качественного поведения этой системы на центральном многообразии.

Первым важным техническим вопросом, решенным с помощью теории устойчивости, был вопрос об условиях работы регулятора Уатта. В изобретенной Уаттом паровой машине имеется механизм — центробежный регулятор, который должен поддерживать постоянную скорость работы машины. Но когда стали строить большие паровые машины, регулятор Уатта часто не справлялся с работой. Русский инженер Вышнеградский, чтобы найти причины плохой работы регулятора, составил систему дифференциальных уравнений, описывающую работу паровой машины вместе с регулятором, и исследовал эту систему на устойчивость. Он получил условия устойчивости в виде ограничений на конструктивные параметры регулятора. Регуляторы, изготовленные с учетом этих ограничений, работали хорошо. [10]

Во многих задачах механики и техники бывает важно знать не конкретные значения решения при данном конкретном значении аргумента, а характер поведения решения при изменении аргумента и, в частности, при неограниченном возрастании аргумента. Например, бывает важно знать, являются ли решения, удовлетворяющие данным начальным условиям, периодическими, приближаются ли они асимптотически к какой-либо известной функции и т.д. Этими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений, а одним из основных её вопросов является вопрос об устойчивости решения или об устойчивости движения.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Любая система дифференциальных уравнений описывает с определенной степенью точности реальный физический процесс.

Приборы, фиксирующие то или иное физическое явление, не совершенны. Может оказаться, что малая погрешность измерения начальных данных вызывает ”ощутимые” изменения решений уравнений. В этой ситуации нельзя гарантировать, что выбранная математическая модель реально отражает описываемое ею физическое явление.

И, наоборот, если малые возмущения начальных условий мало изменяют решения на всем промежутке их существования, то соответствующую математическую модель следует признать удачной.

Так возникает важный для приложений вопрос: при каких условиях, математическая модель, описываемая системой дифференциальных уравнений, будет устойчивой.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}),\ t \ge t_0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}^n.$$

Полагаем, что выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши, а именно:

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений *n*–го порядка

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y}),\ \text{или}\ \frac{d\boldsymbol{Y}}{dx} = \boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y}),$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n,) \\ f_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n,) \\ \dots \\ f_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n,) \end{pmatrix}$$

Задачей Коши для

для этой системы называется следующая задача: найти такое решение Y = Y(x) системы Y' = F(x,Y), что $Y(x_0)=Y_0$, где Y_0 — некоторый постоянный вектор.

Справедлива следующая теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Теорема Коши. Пусть в области D из $\mathbf{R}^{n+1}$ непрерывны все компоненты вектора правой части **F**(x,**Y**) и их частные производные по **Y**:

$$\boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y})=\begin{pmatrix} f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \\ f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \\ \ldots \\ f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \end{pmatrix}, \frac{\partial f_j(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_i}, i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n.$$

Тогда, какова бы ни была начальная точка $(x_0,Y_0) \equiv (x_0,y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{n,0})$ $\in D$, существует такой отрезок $[x_0 - h; x_0 + h]$, что задача Коши $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y})$, что $\boldsymbol{Y}(x_0)=\boldsymbol{Y}_0$ имеет единственное решение. [11]

Пусть некоторое фиксированное решение x = φ(t) этой системы существует при всех $t \geq t_0$.

Решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ системы называется устойчивым по Ляпунову при $t \geq t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ (зависящее, вообще говоря, от ε) такое, что:

— решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ задачи Коши с начальным условием $\mathbf{x}(t_0)$, $|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta$, существует при всех $t \geq t_0$;

— для всех таких решений справедливо неравенство $|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta$, при всех $t \geq t_0$.

Геометрически это означает, что интегральные кривые $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, близкие в момент $t = t_0$ к интегральной кривой $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, остаются близкими к ней и на всем промежутке $[t_0 , \infty)$.

Интегральные кривые и фазовые траектории, отвечающие устойчивым решениям, тоже называются устойчивыми.

2.1 Основные определения

Устойчивость — свойство решения дифференциального уравнения притягивать к себе другие решения при условии достаточной близости их начальных данных. В зависимости от характера притяжения выделяются различные виды устойчивости. Устойчивость является предметом изучения таких дисциплин, как теория устойчивости и теория динамических систем.

Рассмотрим дифференциальное уравнение I порядка $x(t) = f(t,x)$. Пусть $x = \varphi(t)$ — его частное решение, определяемое начальными условием $\varphi(t_0) = \varphi_0$, а $x = \psi(t)$ — частное решение, отвечающее изменённому начальному условию $\psi(t_0) = \psi_0$, $\psi_0 \neq \varphi_0$.

Решение $\varphi(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta(\varepsilon) > 0$ — такое, что из неравенства $|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ следует: $|\varphi(t\;\;) - \psi(t\;\;)| < \varepsilon \; \forall t \geq t_0$.

Это означает, что решения, близкие в начальный момент времени, остаются таковыми и в дальнейшем (см. рис. II.1).

Если решение $\varphi(t)$ устойчиво и $\exists \delta_1 > 0$ — такое, что из условия $|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta_1$ следует: $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$, то решение называется асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Это означает, что решение, близкие в начальный момент времени t_0 к асимптотически устойчивому решению, не только остаются близкими к нему при $t \geq t_0$, но и неограниченно приближаются к нему с течением времени.

Решение, не обладающее свойством устойчивости, называется неустойчивым.

Неустойчивые решения лишь в редких случаях представляют интерес в практических задачах. [9]

2.2 Устойчивость решения системы

Аналогично определяются устойчивость и асимптотическая устойчивость решения системы $\dot{x_i}(t) = f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Решение $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta(\varepsilon) > 0$ — такое, что из неравенства $|\varphi_i(t_0) - \psi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ следует: $|\varphi_i(t_0) - \psi_i(t_0)| < \varepsilon \; \forall t \geq t_0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ (см. рис. II.2). [9]

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t) y_k + f_j(t) \; (j = 1, \; \cdots, n),$$

где $a_{jk}(t)$, $f_j(t) \in C(I^+)$, т. е. коэффициенты системы и свободные члены ее непрерывны в интервале $I^+ = (a < t < \infty)$, причем a — число или символ — ∞. Если не оговорено противное, то функции $a_{jk}(t)$ и $f_j(t)$ предполагаются действительными. Что касается решений $y_j = y_j(t)(j = 1, \cdots, n)$, то, вообще говоря, мы будем считать их комплекснозначными. [2]

2.3 Методы Ляпунова

Метод выяснения устойчивости или неустойчивости решения системы дифференциальных уравнений, в котором надо знать общее решение системы(обычно получаемое в виде некоторого ряда), называется первым методом Ляпунова.

Для системы с постоянными коэффициентами достаточно знать не общее решение системы, а лишь знаки вещественных частей характеристических чисел.

Второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова) основан на использовании подходящим образом подобранной функции Ляпунова. Во втором методе не требуется знать ни общего решения системы, ни какой-либо его характеристики.

Примечание. Общего метода нахождения функции Ляпунова не существует. В простейших случаях ее следует искать в виде $V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $V = ax^2 + by^4$ и т. п., подбирая надлежащим образом постоянные a и b. [9]

2.4 Второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова)

Функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется положительно определенной в H -окрестности ($\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \le H$) начала координат, если она положительна во всех точках этой окрестности, за исключением начала координат, где она равна нулю:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \text{если} \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 > 0, v(0,0, \dots,0) = 0.$$

Например, функция $v = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$ будет положительно определенной функцией в пространстве переменных x_1, x_2, x_3. Функция $u = x_1{}^2 + x_2{}^2$ будет лишь знакопостоянной в этом пространстве, но не положительно определенной, ведь она обращается в ноль на всей оси O_{x_3}, а не только в точке (0, 0, 0), она же будет положительно определенной в пространстве x_1, x_2.

Если $v(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ при $\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 > 0$ и $v(0,0, \dots,0) = 0$, то функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется отрицательно определенной.

Функция $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется положительно определенной в H -окрестности начала координат при $t \ge t_0$, если существует такая не зависящая от t положительно определенная функция $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что $\upsilon(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при всех указанных значениях аргументов и $\upsilon(t, 0,0, \dots,0) = 0$. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \ (i = 1,2, \dots, n), \qquad (1)$$

и пусть

$$\upsilon(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

есть непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Полная производная по t функции $\upsilon(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, вычисленная в силу системы (1) (вдоль интегральных кривых), равна

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \qquad (2)$$

Если правые части системы (1) не содержат явно t, то такая система называется автономной или стационарной.

1. Теорема А. М. Ляпунова об устойчивости. Если система дифференциальных уравнений (1) такова, что существует функция $\upsilon(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, положительно определенная при $t \geq t_0$ в некоторой H-окрестности начала координат, производная которой $\frac{d\upsilon}{dt}$, вычисленная в силу системы (1), неположительна, то тривиальное решение системы (1) устойчиво.

2. Теорема А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости (случай автономных систем). Если автономная система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \ (i = 1,2, \dots, n) \qquad (3)$$

такова, что существует функция $\upsilon(x_1, x_2, \dots, x_n)$, положительно определенная в некоторой H -окрестности начала координат, производная которой $\frac{d\upsilon}{dt}$, вычисленная в силу системы (3), отрицательно определена, то тривиальное решение $x_i \equiv 0 \ (i = 1,2, \dots, n)$ асимптотически устойчиво.

Функции $\upsilon(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\upsilon(x_1, x_2, \dots, x_n)$, фигурирующие в приведеиных выше теоремах, называются функциями Ляпунова.

Назовем областью $\upsilon > 0$ какую-нибудь область окрестности

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \leq H$$

начала координат пространства переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, ограниченную поверхностью $\upsilon = 0$, в которой функция υ принимает положительные значения.

Допустим, что функция υ обладает следующими свойствами:

1) при сколь угодно больших значениях t в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $\upsilon > 0$;

2) в области $\upsilon > 0$ функция υ ограничена;

3) в области $\upsilon > 0$ производная $\frac{d\upsilon}{dt}$, составленная в силу системы уравнений (2), положительно определена.

3. Теорема Н. Г. Четаева о неустойчивости. Если для системы дифференциальных уравнений (2) можно найти функцию, удовлетворяющую условиям 1), 2), 3), то тривиальное решение этой системы неустойчиво.

Замечание. Если в системе (2) все f_i не зависят явно от t, то функцию Ляпунова нужно искать как не зависящую явно от t. [4]

РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Невозмущённое решение $\varphi(t)$ системы (1) называется равномерно устойчивым по Ляпунову, если δ из предыдущего определения зависит только от ε:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x_0, \forall t_0 \in I : \|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta \Rightarrow \forall t \in J^+ : \|x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon.$$

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Невозмущённое решение $\varphi(t)$ системы (1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и является притягивающим, то есть выполняется условие $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)\| = 0$ для любого решения $x(t)$ с начальными данными x_0, для которых выполняется неравенство $||x_0 - \varphi(t_0)|| < \delta_0$ при некотором δ_0.

Существуют определённые разновидности асимптотической устойчивости[2]. Невозмущённое решение $\varphi(t)$ системы (1) называется:

- эквиасимптотически устойчивым, если оно устойчивое и эквипритягивающее ($x(t)$ не зависит от x_0).
- равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчивое и равномерно притягивающее ($x(t)$ не зависит от t_0 и x_0).
- асимптотически устойчивым в целом, если оно устойчивое и глобальнопритягивающее (отсутствует ограничение на x_0).
- равномерно асимптотически устойчивым в целом, если оно равномерно устойчивое и равномерно и глобальнопритягивающее.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Пример 1. Исследовать по определению устойчивость решения дифференциального уравнения $\dot{x} = -a^2 x, a \neq 0$, определяемого начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Общее решение этого уравнения есть $x(t) = Ce^{-a^2 t}$. По начальному условию $x(t_0) = Ce^{-a^2 t_0} = x_0$, откуда $C = x_0 e^{-a^2 t_0}$. Тогда частное решение дифференциального уравнения, соответствующее поставленному начальному условию, есть $x(t) = x_0 e^{-a^2(t-t_0)}$. Устойчивость этого решения и надо исследовать.

Изменим начальное условие: $x(t_0) = \widetilde{x_0}$. Очевидно, что новым частным решением исходного уравнения будет функция $\tilde{x}(t) = \widetilde{x_0} e^{-a^2(t-t_0)}$. При любом значении начального отклонения $|x_0 - \widetilde{x_0}|$ с течением времени модуль разности двух решений $\left|x(t) - \tilde{x}(t)\right| = \left|x_0 e^{-a^2(t-t_0)} - -\widetilde{x_0} e^{-a^2(t-t_0)}\right| = e^{-a^2(t-t_0)}|x_0 - \widetilde{x_0}| \to 0$.

Итак, решение исходной задачи Коши асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пример 2. То же для задачи Коши $\dot{x} = a^2 x, a \neq 0, x(t_0) = x_0$.

Общее решение уравнения есть $x(t) = Ce^{a^2 t}$. Даже при сколь угодно малой разности $|x_0 - \widetilde{x_0}| < \delta$ в начальный момент времени постепенно разность $\left|x(t) - \tilde{x}(t)\right| = \left|x_0 e^{a^2(t-t_0)} - -\widetilde{x_0} e^{a^2(t-t_0)}\right| = e^{a^2(t-t_0)}|x_0 - \widetilde{x_0}|$ увеличивается и достигает с течением времени произвольно большого значения.

Решение исходной задачи Коши неустойчиво по Ляпунову.

Пример 3. То же для задачи Коши $\dot{x} = 0, x(t_0) = x_0$.

Решение данной задачи Коши: $x(t) \equiv x_0 = const$. При другом начальном условии $x(t_0) = \widetilde{x_0}$ получаем новое частное решение $\tilde{x}(t) \equiv \widetilde{x_0} = const$. Пусть в начальный момент времени $|x_0 - \widetilde{x_0}| < \delta$. Тогда $\forall t \geq t_0$ останется $|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon \equiv \delta$.

Решение устойчиво, но не асимптотически, так как $|x(t) - \tilde{x}(t)| = |x_0 - \widetilde{x_0}| \nrightarrow 0$ при $t \to \infty$.

Пример 4.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Метод

Метод функций Ляпунова примеры (с 44)

Исследование на устойчивость по первому приближению (с 46)

Примеры: http://mathhelpplanet.com/static.php?p=ustoichivost-po-lyapunovu

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Конашенко А.В., Родионова Г.С. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 4. https://science-education.ru/ru/article/view?id=9669

[2] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М. : Наука, 1967. – 472 с.

[3] Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – М. : Наука и техника, 1979. – 745 с.

[4] Краснов М.Л., Киселев А.И.., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: задачи и примеры с подробными решениями : учебное пособие. - Изд. 3-е, испр. и доп. - М. : Едиториа УРСС, 2003. – 176 с.

[5] Тихонов А.Н., Ильина В.Л., Свешников А.Г. Курс высшей математики и математической физики / вып. № 7. Дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1980. – 231 с.

[6] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М. : Наука, 1969. — 425 с.

[7] http://mathhelpplanet.com/static.php?p=ustoichivost-po-lyapunovu

[8] https://mmp.susu.ru/article/ru/177

[9] ЗЕНКОВ А.В. Системы дифференциальных уравнений и элементы теории устойчивости: Учебник для студентов физических специальностей / А.В. Зенков. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2010. 54 с.; ил.

[10] Филиппов, А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Изд. 2-е. — Эдиториал УРСС, 2007.

[11] http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/odesys/ODEsysup_08030000.html