Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе

на тему

ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр.153503 Киселёва Е.А.

Руководитель: кандидат

физико-математических наук,

доцент Анисимов В.Я.

Минск 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомые функции и их производные.

Устойчивость — свойство решения дифференциального уравнения притягивать к себе другие решения при условии достаточной близости их начальных данных.

Системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием являются современным направлением в теории дифференциальных уравнений, которое имеет приложения к задачам математического моделирования в механике, технике и математической биологии. Важной проблемой для этого класса систем является проблема устойчивости решений.

Актуальной и важной с практической точки зрения является задача об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях. Этот принцип, являясь важным инструментом при исследовании критических случаев, фактически сводит изучение системы дифференциальных уравнений к изучению качественного поведения этой системы на центральном многообразии.

Первым важным техническим вопросом, решенным с помощью теории устойчивости, был вопрос об условиях работы регулятора Уатта. В изобретенной Уаттом паровой машине имеется механизм — центробежный регулятор, который должен поддерживать постоянную скорость работы машины. Но когда стали строить большие паровые машины, регулятор Уатта часто не справлялся с работой. Русский инженер Вышнеградский, чтобы найти причины плохой работы регулятора, составил систему дифференциальных уравнений, описывающую работу паровой машины вместе с регулятором, и исследовал эту систему на устойчивость. Он получил условия устойчивости в виде ограничений на конструктивные параметры регулятора. Регуляторы, изготовленные с учетом этих ограничений, работали хорошо. [10]

Во многих задачах механики и техники бывает важно знать не конкретные значения решения при данном конкретном значении аргумента, а характер поведения решения при изменении аргумента и, в частности, при неограниченном возрастании аргумента. Например, бывает важно знать, являются ли решения, удовлетворяющие данным начальным условиям, периодическими, приближаются ли они асимптотически к какой-либо известной функции и т.д. Этими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений, а одним из основных её вопросов является вопрос об устойчивости решения или об устойчивости движения.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Устойчивость по Ляпунову

Любая система дифференциальных уравнений описывает с определенной степенью точности реальный физический процесс.

Приборы, фиксирующие то или иное физическое явление, не совершенны. Может оказаться, что малая погрешность измерения начальных данных вызывает «ощутимые» изменения решений уравнений. В этой ситуации нельзя гарантировать, что выбранная математическая модель реально отражает описываемое ею физическое явление.

И, наоборот, если малые возмущения начальных условий мало изменяют решения на всем промежутке их существования, то соответствующую математическую модель следует признать удачной.

Так возникает важный для приложений вопрос: при каких условиях, математическая модель, описываемая системой дифференциальных уравнений, будет устойчивой.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), t \geq t_0, x \in R^n, F(t,x) \in R^n.$$

Полагаем, что выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши, а именно:

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений *n*–го порядка

$$Y' = F(x,Y), \text{или } \frac{dY}{dx} = F(x,Y),$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y_1{}' \\ y_2{}' \\ \cdots \\ y_n{}' \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x,\ y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x,\ y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \cdots \\ f_n(x,\ y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Задачей Коши для этой системы называется следующая задача: найти такое решение Y = Y(x) системы Y' = F(x, Y), что $Y(x_0)=Y_0$, где Y_0 — некоторый постоянный вектор.

Справедлива следующая теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Теорема Коши. Пусть в области D из R^{n+1} непрерывны все компоненты вектора правой части F(x, Y) и их частные производные по Y:

$$F(x,Y) = \begin{pmatrix} f_1(x,\ y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x,\ y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x,\ y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}, \frac{\partial f_j(x,\ y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_i},$$

$$i = 1,2, \dots, n; j = 1,2, \dots, n.$$

Тогда, при любой начальной точке $(x_0,Y_0) \equiv (x_0,y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n,0}) \in D$, существует такой отрезок $[x_0 - h; x_0 + h]$, что задача Коши $Y' = F(x,Y)$, что $Y(x_0)=Y_0$ имеет единственное решение. [11]

Пусть некоторое фиксированное решение x = φ(t) этой системы существует при всех $t \geq t_0$.

Решение x = φ(t) системы называется устойчивым по Ляпунову при $t \geq t_0$, если для любого ε > 0 существует число δ > 0 (зависящее, вообще говоря, от ε) такое, что:

- решение x = x(t) задачи Коши с начальным условием $x(t_0)$, $| x(t_0) - \varphi(t_0) | < \delta$, существует при всех $t \geq t_0$;
- для всех таких решений справедливо неравенство $| \mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0) | < \delta$, при всех $t \geq t_0$.

Геометрически это означает, что интегральные кривые **x** = **x**(t), близкие в момент $t = t_0$ к интегральной кривой **x** = **φ**(t), остаются близкими к ней и на всем промежутке $[t_0, \infty)$.

Интегральные кривые и фазовые траектории, отвечающие устойчивым решениям, тоже называются устойчивыми.

1.1.1 Основные определения

Устойчивость — свойство решения дифференциального уравнения притягивать к себе другие решения при условии достаточной близости их начальных данных. В зависимости от характера притяжения выделяются различные виды устойчивости. Устойчивость является предметом изучения таких дисциплин, как теория устойчивости и теория динамических систем.

Рассмотрим дифференциальное уравнение I порядка $x(t) = f(t, x)$. Пусть $x = \varphi(t)$ — его частное решение, определяемое начальными условием $\varphi(t_0) = \varphi_0$, а $x = \psi(t)$ — частное решение, отвечающее изменённому начальному условию $\psi(t_0) = \psi_0$, $\psi_0 \neq \varphi_0$.

Решение $\varphi(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ — такое, что из неравенства $|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ следует: $|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$.

Это означает, что решения, близкие в начальный момент времени, остаются таковыми и в дальнейшем (см. рис. II.1).

Если решение $\varphi(t)$ устойчиво и $\exists\delta_1 > 0$ — такое, что из условия $|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta_1$ следует: $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t) - \psi(t)| = 0$, то решение называется асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Это означает, что решение, близкие в начальный момент времени t_0 к асимптотически устойчивому решению, не только остаются близкими к нему при $t \geq t_0$, но и неограниченно приближаются к нему с течением времени.

Решение, не обладающее свойством устойчивости, называется неустойчивым.

Неустойчивые решения лишь в редких случаях представляют интерес в практических задачах. [9]

1.1.2 Устойчивость решения системы

Аналогично определяются устойчивость и асимптотическая устойчивость решения системы $\dot{x_i}\,(t) = f_i(t, x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\ \left(i = \overline{1, n}\right)$.

Решение $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ — такое, что из неравенства $|\varphi_i(t_0) - \psi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ следует: $|\varphi_i(t_0) - \psi_i(t_0)| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0\ \left(i = \overline{1, n}\right)$ (см. рис. II.2). [9]

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)y_k + f_j(t)\ (j = 1,\ \cdots,\ n),$$

где $a_{jk}(t),\ f_j(t) \in C(I^+)$, т. е. коэффициенты системы и свободные члены ее непрерывны в интервале $I^+ = (a < t < \infty)$, причем a — число или символ —— ∞. Если не оговорено противное, то функции $a_{jk}(t)$ и $f_j(t)$ предполагаются действительными. Что касается решений $y_j = y_j(t)(j = 1,\ \cdots,\ n)$, то, вообще говоря, мы будем считать их комплекснозначными. [2]

1.2 Методы Ляпунова

Метод выяснения устойчивости или неустойчивости решения системы дифференциальных уравнений, в котором надо знать общее решение системы (обычно получаемое в виде некоторого ряда), называется первым методом Ляпунова.

Для системы с постоянными коэффициентами достаточно знать не общее решение системы, а лишь знаки вещественных частей характеристических чисел.

Второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова) основан на использовании подходящим образом подобранной функции Ляпунова. Во втором методе не требуется знать ни общего решения системы, ни какой-либо его характеристики.

Примечание. Общего метода нахождения функции Ляпунова не существует. В простейших случаях ее следует искать в виде $V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $V = ax^2 + by^4$ и т. п., подбирая надлежащим образом постоянные a и b. [9]

1.3 Второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова)

Функция $\upsilon(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется положительно определенной в H -окрестности ($\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \le H$) начала координат, если она положительна во всех точках этой окрестности, за исключением начала координат, где она равна нулю:

$$\upsilon(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \text{если} \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 > 0, \upsilon(0,0,\dots,0) = 0.$$

Например, функция $\upsilon = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2$ будет положительно определенной функцией в пространстве переменных x_1, x_2, x_3. Функция $u = x_1{}^2 + x_2{}^2$ будет лишь знакопостоянной в этом пространстве, но не положительно определенной, ведь она обращается в ноль на всей оси O_{x_3} , а не только в точке (0, 0, 0), она же будет положительно определенной в пространстве x_1, x_2.

Если $v(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ при $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 > 0$ и $v(0,0,\dots,0) = 0$, то функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется отрицательно определенной.

Функция $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется положительно определенной в Н -окрестности начала координат при $t \geq t_0$, если существует такая не зависящая от t положительно определенная функция $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что $v(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при всех указанных значениях аргументов и $v(t, 0,0, \dots, 0) = 0$. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \ (i = 1,2, \dots, n), \tag{1}$$

и пусть

$v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$

есть непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Полная производная по t функции $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, вычисленная в силу системы (1) (вдоль интегральных кривых), равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{2}$$

Если правые части системы (1) не содержат явно t, то такая система называется автономной или стационарной.

1. Теорема А. М. Ляпунова об устойчивости. Если система дифференциальных уравнений (1) такова, что существует функция $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, положительно определенная при $t \geq t_0$ в некоторой Н-окрестности начала координат, производная которой $\frac{dv}{dt}$, вычисленная в силу системы (1), неположительна, то тривиальное решение системы (1) устойчиво.

2. Теорема А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости (случай автономных систем). Если автономная система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \ (i = 1,2, \dots, n) \tag{3}$$

такова, что существует функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, положительно определенная в некоторой Н -окрестности начала координат, производная которой $\frac{dv}{dt}$, вычисленная в силу системы (3), отрицательно определена, то тривиальное решение $x_i \equiv 0$ $(i = 1,2, \dots, n)$ асимптотически устойчиво.

Функции $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, фигурирующие в приведеиных выше теоремах, называются функциями Ляпунова.

Назовем областью $v > 0$ какую-нибудь область окрестности

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \leq H$$

начала координат пространства переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, ограниченную поверхностью $v = 0$, в которой функция v принимает положительные значения.

Допустим, что функция v обладает следующими свойствами:

1) при сколь угодно больших значениях t в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $v > 0$;

2) в области $v > 0$ функция v ограничена;

3) в области $v > 0$ производная $\frac{dv}{dt}$, составленная в силу системы уравнений (2), положительно определена.

3. Теорема Н. Г. Четаева о неустойчивости. Если для системы дифференциальных уравнений (2) можно найти функцию, удовлетворяющую условиям 1), 2), 3), то тривиальное решение этой системы неустойчиво.

Замечание. Если в системе (2) все f_i не зависят явно от t, то функцию Ляпунова нужно искать как не зависящую явно от t. [4]

1.4 Исследование на устойчивость по первому приближению

Точка покоя динамической системы, определяемой данным векторным полем: фазовая траектория с началом в точке покоя состоит в точности из этой точки покоя, а соответствующая ей интегральная кривая представляет собой прямую, параллельную оси времени.

В применении к точке покоя $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ условие устойчивости выглядит так:

точка покоя $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ системы устойчива по Ляпунову, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ следует $|x_i(t)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ при всех $t \geq t_0$.

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1,2, \dots, n),$$

где f_i - дифференцируемые в окрестности начала координат функции, $f_i(t, 0,0, \dots,0) \equiv 0$.

Исследуем на устойчивость точку покоя $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$ системы. Представим систему в окрестности начала координат в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где R_i имеют порядок выше первого относительно $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i}$ (т. е. фактически разложим правые части исходной системы по формуле Тейлора по степеням x в окрестности начала координат). Вместо точки покоя системы исследуем на устойчивость точку покоя линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

называемой *системой уравнений первого приближения* или линеаризованной системой для исходной системы.

Возникает вопрос, влечет ли устойчивость (неустойчивость) точки покоя системы уравнений первого приближения устойчивость (неустойчивость) точки покоя исходной системы. Вообще говоря, строгой связи между этими системами нет.

Однако при определенных условиях устойчивость (неустойчивость) решения системы первого приближения влечет устойчивость (неустойчивость) решения исходной системы.

Ограничимся для простоты случаем, когда коэффициенты $a_{ij}(t)$ в системе первого приближения постоянные. В этом случае говорят, что система в окрестности начала координат стационарна в первом приближении.

Теорема 1. Если система уравнений в окрестности начала координат стационарна в первом приближении, все члены R_i ограничены по t и разлагаются в ряды по степеням $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой области $\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i \leq H$, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка, а все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0$$

имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение $x_i \equiv 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ системы в окрестности начала координат асимптотически устойчиво, т. е. в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Теорема 2. Если система уравнений в окрестности начала координат стационарна в первом приближении, все функции R_i удовлетворяют условиям теоремы 1 и хотя бы один из корней характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то точка покоя $x_i \equiv 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ системы в окрестности начала координат неустойчива, т. е. и в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Замечание. Если действительные части всех корней характеристического уравнения неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, то исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно (в этом случае начинают влиять нелинейные члены R_i) . [4]

Исследование устойчивости решений для линейной системы является задачей значительно более лёгкой, чем для нелинейной системы, а для линейной системы с постоянными коэффициентами, которая является частным случаем, задача еще более легкая.

До исследований А.М. Ляпунова это простое и естественное рассуждение не вызывало серьёзных сомнений, хотя строгого обоснования законности выводов не было.

Заслуга Ляпунова в том, в частности, что он показал, в каких случаях по устойчивости тривиального решения системы первого приближения можно сделать вывод об устойчивости тривиального решения нелинейной системы, а в каких случаях требуется дополнительное исследование, так как выяснилось, что в общем случае малые добавки $R_i(x_1, \dots, x_n)$ существенно влияют на поведение решений системы в окрестности начала координат. Может получиться так, что тривиальное решение системы первого приближения устойчиво, а для исходной системы оно неустойчиво, т.е. проведённое выше рассуждение, несмотря на кажущуюся правдоподобность, в общем случае неверно.[9]

2 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пример 1[9, с.32]. Исследовать по определению устойчивость решения дифференциального уравнения $\dot{x} = -a^2 x, a \neq 0$, определяемого начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Общее решение этого уравнения есть $x(t) = Ce^{-a^2 t}$. По начальному условию $x(t_0) = Ce^{-a^2 t_0} = x_0$, откуда $C = x_0 e^{-a^2 t_0}$. Тогда частное решение дифференциального уравнения, соответствующее поставленному начальному условию, есть $x(t) = x_0 e^{-a^2(t-t_0)}$. Устойчивость этого решения и надо исследовать.

Изменим начальное условие: $x(t_0) = \widetilde{x_0}$. Очевидно, что новым частным решением исходного уравнения будет функция $\tilde{x}(t) = \widetilde{x_0} e^{-a^2(t-t_0)}$. При любом значении начального отклонения $|x_0 - \widetilde{x_0}|$ с течением времени модуль разности двух решений $|x(t) - \tilde{x}(t)| = \left|x_0 e^{-a^2(t-t_0)} - -\widetilde{x_0} e^{-a^2(t-t_0)}\right| = e^{-a^2(t-t_0)}|x_0 - \widetilde{x_0}| \to 0$.

Итак, решение исходной задачи Коши асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пример 2[9, с.33]. Для задачи Коши $\dot{x} = a^2 x, a \neq 0, x(t_0) = x_0$.

Общее решение уравнения есть $x(t) = Ce^{a^2 t}$. Даже при сколь угодно малой разности $|x_0 - \widetilde{x_0}| < \delta$ в начальный момент времени постепенно разность $|x(t) - \tilde{x}(t)| = \left|x_0 e^{a^2(t-t_0)} - -\widetilde{x_0} e^{a^2(t-t_0)}\right| = e^{a^2(t-t_0)}|x_0 - \widetilde{x_0}|$ увеличивается и достигает с течением времени произвольно большого значения.

Решение исходной задачи Коши неустойчиво по Ляпунову.

Пример 3[9, с.33]. То же для задачи Коши $\dot{x} = 0, x(t_0) = x_0$.

Решение данной задачи Коши: $x(t) \equiv x_0 = const$. При другом начальном условии $x(t_0) = \widetilde{x_0}$ получаем новое частное решение $\tilde{x}(t) \equiv \widetilde{x_0} = const$. Пусть в начальный момент времени $|x_0 - \widetilde{x_0}| < \delta$. Тогда $\forall t \geq t_0$ останется $|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon \equiv \delta$.

Решение устойчиво, но не асимптотически, так как $|x(t) - \tilde{x}(t)| = |x_0 - \widetilde{x_0}| \nrightarrow 0$ при $t \to \infty$.

Пример 4[4, с.111]. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x-2y)(1-x^2-3y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -(y+x)(1-x^2-3y^2). \end{cases}$$

Решение. Возьмем в качестве υ функцию $v = x^2 + 2y^2$.Она является положительно определенной, а также, ее производная $\frac{dv}{dt}$, взятая в силу системы, равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$= 2x(2y-x)(1-x^2-3y^2) - 4y(x+y)(1-x^2-3y^2) =$$

$$= -2(1-x^2-3y^2)(x^2+2y^2) \leq 0$$

при достаточно малых x и y.

Мы обнаруживаем, что выполняются все условия теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости.

А это значит то, что тривиальное решение $x \equiv 0, y \equiv 0$ устойчиво.

Пример 5[4, с.112]. Метод построения функции Ляпунова, называемый методом деления переменных. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = -cx + dy^3. \end{cases}$$

Найти для системы функцию Ляпунова в виде

$$v(x,y) = F_1(x) + F_2(y)$$

где $F_1(x), F_2(x)$ - некоторые, пока неизвестные, дифференцируемые функции.

Решение. В силу системы будем иметь

$$\dot{v} = F'_1(x)\dot{x} + F'_2(y)\dot{y} = F'_1(x)(ax^3 + by) - F'_2(y)(cx - dy^3).$$

Потребуем, чтобы функция $\dot{v}$ имела такой же вид, что и функция $v(x,y)$, т. е. чтобы и она представлялась в виде суммы двух функций — одной, зависящей только от x, другой — только от y. Для этого необходимо, чтобы имело место тождество

$$F'_1(x)by - F'_2(y)cx \equiv 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{cx}{F'_1(x)} = \frac{by}{F'_2(y)},$$

и, таким образом, каждая из дробей должна быть постоянной величиной, например, равной l/2. Тогда будем иметь

$$\frac{cx}{F'_1(x)} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{by}{F'_2(y)} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$F_1(x) = cx^2, \quad F_2(y) = by^2,$$

так что

$$\upsilon(x, y) = cx^2 + by^2.$$

Пример 6[4, с.112]. Исследовать на устойчивость тривиальное решение сиетемы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Решение. Функция $\upsilon = x^2 + y^2$ удовлетворяет условиям теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости:

1) $\upsilon(x, y) \geq 0, \quad \upsilon(0,0) = 0;$

2) $\frac{d\upsilon}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) = -(4x^4 + 6y^4) \leq 0,$

т. е. $\frac{d\upsilon}{dt} < 0$ и $\frac{d\upsilon}{dt} = 0$ только при x = 0, y=0, и значит, есть отрицательно определенная функция. Следовательно, решение $x \equiv 0,$ $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Пример 7[4, с.112]. Исследовать на устойчивость тривиальное решение автономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases}$$

Решение. Возьмем в качестве $\upsilon(x, y)$ функцию

$$\upsilon = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Здесь областью υ > 0 является, например, область x > 0, y> 0. В области υ > 0 имеем

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\partial\upsilon}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\upsilon}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0.$$

Согласно теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости, решение $x \equiv 0,$ $y \equiv 0$ неустойчиво.

Пример 8[7]. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, показать, что решение системы, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0, y(0) = 0,$ устойчиво

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$$

(1)

Решение. Решение системы, удовлетворяющее заданным начальным условиям, есть $x(t) = 0, y(t) = 0$. Любое решение этой системы, удовлетворяющее условиям $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t)\,, \\ y(t) = x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)\,. \end{cases}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_0 - 0| < \delta, |y_0 - 0| < \delta$ имеют место неравенства

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos(t) - y_0 \sin\,(t)| < \varepsilon,$$
$$|y_0(t) - 0| = |x_0 \sin(t) + y_0 \cos\,(t)| < \varepsilon,$$

для всех $t \geq 0$.

Согласно определению, это и будет означать, что нулевое решение $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$ системы устойчиво по Ляпунову. Очевидно, имеем

$$|x_0 \cos(t) - y_0 \sin\,(t)| \leq |x_0 \cos(t)| + |y_0 \sin(t)| \leq |x_0| + |y_0|,$$
$$|x_0 \sin(t) + y_0 \cos\,(t)| \leq |x_0 \sin(t)| + |y_0 \cos\,(t)| \leq |x_0| + |y_0|$$

для всех t. (2)

Поэтому, если $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, то тем более

$$|x_0 \cos(t) - y_0 \sin\,(t)| < \varepsilon, |x_0 \sin(t) + y_0 \cos\,(t)| < \varepsilon$$

для всех t. (3)

А значит, что если, например, взять $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$, то при $|x_0| < \delta$ и $|y_0| < \delta$ в силу (2) будут иметь место неравенства (3) для всех $t \geq 0$, т.е. на самом деле нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову, но эта устойчивость не асимптотическая.

Пример 9[10, с.164]. Устойчиво ли нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = -4y, \frac{dy}{dt} = x$$

Решение. Поделив второе уравнение на первое, получим $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$. Общее решение $x^2 + 4y^2 = c > 0$. Эти линии есть эллипсы. Если $x^2(0) + y^2(0) < \delta^2$, то при t > 0 решение $x(t), y(t)$ находится внутри эллипса решение $x^2 + 4y^2 = 4\delta^2$, описанного около круга $x^2 + y^2 = \delta^2$. Так как кривые, изображающие решения, не пересекаются, то решение $x(t), y(t)$ остаётся внутри этого эллипса (рис. 1), значит, и внутри круга $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ $\varepsilon = 2\delta$, описанного около эллипса.

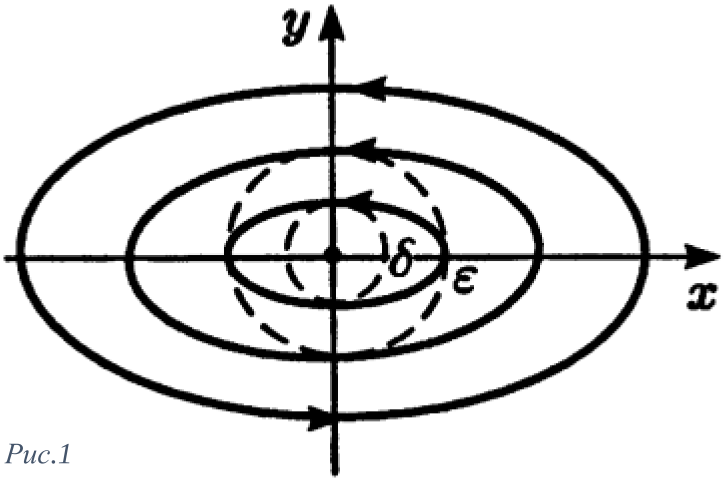

Рис.1

Таким образом, нулевое решение устойчиво. При этом асимптотической устойчивости нет, т. к. каждое решение остается на своем эллипсе $x^2 + 4y^2 = c$ и не стремится к нулю при $t \to \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы был рассмотрен теоретический материал по теме «Понятие об устойчивости системы дифференциальных уравнений», а именно устойчивость по Ляпунову, метод функций Ляпунова, а также устойчивость по первому приближению.

В результате выполнения данной курсовой работы были выполнены следующие задачи:

1. Обобщены теоретические данные, связанные с устойчивостью систем дифференциальных уравнений.
2. Рассмотрены основные методы определения устойчивости систем дифференциальных уравнений.
3. Изучены особенности определения устойчивости систем дифференциальных уравнений.
4. Решены несколько примеров с использованием методов, разобранных в теоретическом материале.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Конашенко А.В., Родионова Г.С. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 4. https://science-education.ru/ru/article/view?id=9669

[2] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М. : Наука, 1967. – 472 с.

[3] Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – М. : Наука и техника, 1979. – 745 с.

[4] Краснов М.Л., Киселев А.И.., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: задачи и примеры с подробными решениями : учебное пособие. - Изд. 3-е, испр. и доп. - М. : Едиториа УРСС, 2003. – 176 с.

[5] Тихонов А.Н., Ильина В.Л., Свешников А.Г. Курс высшей математики и математической физики / вып. № 7. Дифференциальные уравнения. – М. : Наука, 1980. – 231 с.

[6] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. – М. : Наука, 1969. — 425 с.

[7] http://mathhelpplanet.com/static.php?p=ustoichivost-po-lyapunovu

[8] https://mmp.susu.ru/article/ru/177

[9] ЗЕНКОВ А.В. Системы дифференциальных уравнений и элементы теории устойчивости: Учебник для студентов физических специальностей / А.В. Зенков. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2010. 54 с.; ил.

[10] Филиппов, А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Изд. 2-е. — Эдиториал УРСС, 2007.

[11] http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/odesys/ODEsysup_08030000.html