Ejemplo: Calcular $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz$ donde C es el círculo $|z|=2$ descrito en sentido positivo

Solución:

El integrando $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{(z-1)^2}$ es analítico sobre C e interior al mismo, excepto en el punto singular aislado $z=1$.

Considerando el residuo $C_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)\,dz$, usando la serie de Taylor para e^{-z} alrededor de $z=1$

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-1)^n \qquad C_n = \frac{d^n f(z)}{n!\,dz}, \quad z_0 = 1$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^{-z} & f(z_0) &= e^{-1}\\
f'(z) &= -e^{-z} & f'(z_0) &= -e^{-1}\\
f''(z) &= e^{-z} & f''(z_0) &= e^{-1}\\
f'''(z) &= -e^{-z} & f'''(z_0) &= -e^{-1}\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

$$e^{-z} = e^{-1} - e^{-1}(z-1) + \frac{e^{-1}}{2!}(z-1)^2 - \frac{e^{-1}}{3!}(z-1)^3 + \cdots$$

Entonces

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}}{(z-1)^2} - \frac{e^{-1}}{z-1} + e^{-1}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n-2}}{n!}, \qquad |z-1|>0$$

El residuo de $f(z)$ en $z=1$ es $-e^{-1}$, entonces

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\, C_{-1} = 2\pi i\,(-e^{-1}) = -\frac{2\pi i}{e}$$

Por lo tanto

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz = -\frac{2\pi i}{e}$$