# APERTURA

**INTEGRALES DE LÍNEA**

La integral de línea depende del contorno  y de la función  , es decir : ; al considerar el contorno  entonces . Si la función  es continua por tramos en  se define la integral de línea de  a lo largo de  cómo , donde 

Así 

El contorno  se describe por medio de la ecuación  donde , es decir



Propiedades:

1. 
2. 
3. Si  consta de un contorno , desde  hasta  y de un contorno , desde  hasta , donde  se cumple 

Con base en lo anterior

 siempre que  se encuentre en el contorno  entonces:



Ejemplo: Calcular la integral  donde  es el segmento de recta que va desde  hasta .

Ejemplo: Evalúe la integral de contorno  a lo largo de la trayectoria  de  a  y formada por dos segmentos de recta, el primero de  a  y el segundo de  a .

Ejemplo: Demuestre que  donde  es la frontera del cuadrado con vértices en , , , .

Ejemplo: Calcular  donde  y  es

1. Es el segmento de recta que va desde  a 
2. Consta de dos segmentos, uno que va de  a  y el otro, de  a 

De acuerdo al Teorema de Green para integrales de línea en el cálculo de variables reales



Al considerar la función  que es analítica en toda la región  del plano  se tiene

; 

Al considerar las ecuaciones Cauchy-Riemann, los integrandos de estas dos integrales dobles son cero en toda la región .

Un dominio simplemente conexo  es un dominio tal que todo contorno simple cerrado dentro del mismo, encierra solo puntos de .

Ejemplo: Calcular  donde  es .

Ejemplo: Calcular  donde  es .

**TEOREMA DE COUCHY-GOURSAT**

Si una función es analítica dondequiera en un dominio simplemente conexo , entonces para todo contorno simple cerrado , dentro de , se cumple



Goursat (1858-1936)

Ejemplo: Probar el teorema de Cauchy-Goursat para una región múltiplemente conexa.

Ejemplo: Sea  analítica en una región  limitada por dos curvas simples  y  y también sobre  y . Probar que , donde  y  se recorren en el sentido positivo relativo a sus interiores.

Ejemplo: Analizar , , .

Ejemplo: Hallar el valor numérico  donde  es una curva simple cerrada y  está

1. Fuera de 
2. Dentro de 

Ejemplo: Analizar ; donde  consta de la circunferencia  descrita en la dirección positiva, y de la circunferencia  descrita en la dirección negativa.

La función  es una integral indefinida, o antiderivada de  y se escribe  ; es decir,  es una función analítica cuya derivada es .

Una integral definida se puede evaluar como el cambio en el valor de la integral indefinida, esto es

Ejemplos: Calcular ; evaluar 

Ejemplo: Calcular 

Ejemplo: Integrar  donde  es el círculo 

Ejemplo: Integrar 

**TEOREMA DE MORERA**

Si una función  es continua en todo un dominio simplemente conexo  y si para cada contorno cerrado simple  que se encuentra en 



Entonces  es analítica en todo .

Morera (1856-1909)

**FÓRMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY**

Teorema: Se establece que  sea analítica dondequiera, dentro y sobre un contorno cerrado simple  tomado en sentido positivo. Si  es un punto cualquiera interior a , entonces



Ejemplo: Comprobar que ; donde  es la circunferencia  tomado en sentido positivo.

Ejemplo: Calcular  donde  es el contorno triangular dado por los puntos , , 

Ejemplo: Calcular , donde  es el círculo .

**EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY**

Si una función  es analítica en cierto dominio, entonces posee derivadas de todos los órdenes en dicho dominio. Estas derivadas son también analíticas en el dominio. Si  es analítica a lo largo de un contorno cerrado simple  así como en su interior y si  es un punto del interior de , entonces

.

Ejemplo: Determine el valor de , donde  es el contorno 

Ejemplo: Calcular , donde  es el círculo 

## CIERRE

Estudiar: *Integración alrededor de contornos diferentes.*