# APERTURA

Serie de Laurent, así llamada en honor a su descubridor, el matemático francés Paul Mathieu Hermann Laurent (1841-1908). El desarrollo de una serie de Laurent de una función  es de la forma



Donde la serie converge a  en cierto dominio o región.

**Teorema de Laurent**

Sea  una función analítica en un dominio anular  definido por . Si  pertenece a ,  puede representarse mediante un desarrollo en serie de Laurent



Los coeficientes están dados por



Donde  es cualquier contorno cerrado simple contenido en  y tal que la frontera interna  quede confinada por . La serie converge uniformemente en toda región anular de  centrada en . La serie de Laurent de una función es única en una región anular dada.

**Definición**: punto singular aislado

El punto  es un punto singular aislado de  si  no es analítica en  pero sí en una vecindad punteada de .

Ejemplo: Desarrolle  en una serie de Laurent en potencias de . Determine el dominio a que la serie converge a .

Ejemplo: Desarrolle  en una serie de Laurent en potencias de  que sea válida en un dominio anular que contenga el punto . Determine el dominio en el que la serie converge a .

Cauchy-Goursat

Sea  un contorno cerrado y simple y sea  una función analítica en el interior de  y sobre , entonces 

Ejemplo: Demuestre 

Ejemplo: Desarrolle  en una serie de Laurent que sea válida en una vecindad punteada de . Determine el dominio de validez de la serie.

Para entender el cálculo de residuos es preciso estar familiarizado con las series de Laurent; los residuos son una valiosa herramienta para la evaluación de muchas clases de integrales.

**Definición**: Residuo

Sea  una función analítica sobre un contorno simple cerrado  y en todo punto del interior de , salvo . Entonces el residuo de  en , que se denota por  está definido por



Considere



Para evaluar el residuo  tomamos un círculo de radio  centrado en , entonces



Donde 

Todas las integrales valen cero excepto la que corresponde a , entonces 

Teorema: El residuo de la función  en el punto singular aislado  es igual al coeficiente de  en la serie de Laurent que representa a  en una región anular dada por 

Ejemplo: Sea  haciendo uso del teorema del residuo hallar  donde el contorno es .

**Teorema de los residuos**

Sea  un contorno cerrado y simple y sea  una función analítica sobre  y en todo punto de su interior, excepto las singularidades aisladas . Entonces,



Que puede escribirse de manera más compacta como



Ejemplo: Calcule  integrada alrededor de .

Ejemplo: Determine , donde  es el círculo  usando el teorema del residuo.

Sea  el desarrollo de  en serie de Laurent alrededor del punto singular aislado .



**Definición**: Parte principal

Los términos de la serie de Laurent que contienen exclusivamente potencias negativas de  se conoce como parte principal.

**Definición**: Polo de orden N

Decimos que una función tiene un polo de orden  en  si la potencia más negativa de  que aparece en la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto singular  es .

**Definición**: Singularidad esencial aislada

Decimos que una función posee una singularidad esencial aislada en  si la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto singular aislado  contiene un número infinito de términos distintos de cero.

Ejemplo:  posee una singularidad esencial en .

Ejemplo:  la función dada tiene una singularidad esencial en .

**Definición**: Punto singular removible o evitable

Decimos que la función  tiene un punto singular removible (o evitable) en  si la singularidad en  se puede eliminar por medio de una definición adecuada de  en dicho punto.

Ejemplo: La función  no tiene polo en 

Ejemplo: Funciones multiformes como ,  presentan ramas analíticas cuyos módulos se hacen infinitos en los puntos singulares  respectivamente. Dichos puntos singulares no son polos, sino puntos de ramificación.

*Reglas para determinar la existencia de un polo*

**Regla** 1: Sea  un punto singular aislado de . Si existe el límite  y si dicho límite no es cero ni infinito, entonces  tiene un polo de orden  en .

**Regla** 2: Si el polo  en  es de orden , entonces 

Ejemplo: Estudie las singularidades de .

**Cálculo de residuos**

Para obtener el residuo de una función  en  se encuentra el desarrollo de Laurent de  en torno a . En el caso donde  es un polo de orden  se calcula  como



Si  (polo simple) el resultado está dado por .

Ejemplo: Determine el residuo de .

Ejemplo: Determine el residuo de  en todos los polos.

## CIERRE

Estudiar: *Integrales reales mediante el cálculo de residuos.*