**Universidad Nacional Autónoma de México**

Facultad de Ingeniería

Estructuras Discretas

Cruz Matías Yuridia Elizabeth

Proyecto Tutorial

## 3Sistemas algebraicos

#### 3.1. Definición y conceptos de Sistemas Algebraicos

#### 3.1.1. Definición y conceptos

#### 3.1.2. Tipos y Características

#### 3.1.3. Semigrupos, monoides y grupos

Profesor Ing. Orlando Zaldívar Zamorategui

Semestre: 2019-2

**Objetivo**

Se busca que el usuario a través de un tutorial conozca, aprenda, entienda y comprenda lo que es un Sistema Algebraico, así como los tipos, características y más específico que adquiera el conocimiento de cómo se compone un monoide, grupo y semigrupo.

*Las matemáticas no estudian los objetos sino las relaciones entre los objetos; por tanto, le es indiferente reemplazar unos objetos por otros, con tal que no cambien las relaciones”.*

*H. Poincare*

**Sistemas Algebraicos *(Definición y conceptos de sistemas algebraicos)***

***Definición y conceptos.***

Los sistemas algebraicos desempeñan un papel muy importante en muchas ramas de la ciencia como por ejemplo: la teoría de la relatividad, física nuclear, mecánica cuántica, cristalografía, etc. esta poderosa herramienta matemática fue creada a principios del siglo XIX.

Jean-Paul Temblay, y Ram Manohar, 1996, dicen que se llama sistema algebraico, a aquel sistema que consiste de n conjunto y una o más operaciones n-aria sobre un conjunto, se expresa < S, , … > donde S es un conjunto no vacío y, y , son operaciones sobre S (p. 268).

Aunque Francesc Comellas y de más autores, mencionan que un Sistema Algebraico es una n-tupla cuyos elementos son conjuntos y relaciones entre estos conjuntos, de los cuales se destacan en particular las operaciones y también, si se quiere, los elementos singulares que puedan tener estos conjuntos respecto de las operaciones asociadas. Denotadas:

(X, Y,…,, ,…, \*, +,…, a, b, c,… )

Donde X, Y,… son conjuntos, , ,… relaciones definidas en estos conjuntos, \*, +,… son operaciones n-arias sobres estos conjuntos, y a, b, c,… elementos singulares de estas operaciones. (p. 209)

***Tipos y características.***

Las operaciones más importantes están definidas sobre un único conjunto en el cual hay definidas una o dos operaciones. Los elementos singulares normalmente no se especifican si son fácilmente deducibles.

*Definidas a partir de una única operación.*

Dado un conjunto X y una operación sobre X, diremos que la estructura algebraica (X,\*) es un:

* *Semigrupo* si y solo si \* es asociativa;
* *Monoide* si y solo si \* es asociativa y X tiene elemento neutro
* *Grupo* si y solo si \* es asociativa, X tiene elemento neutro y cada elemento x tiene inverso

Si \* es conmutativa diremos que la estructura correspondiente es abeliana o conmutativa. (Francesc Comellas y autores, p. 209)

*Definidas a partir de dos operaciones.*

Dado un conjunto X y dos operaciones, \* y + sobre X, diremos que (X, \*, +) es un:

* *Anillo* si y solo si (X, \*) es un grupo abeliano, + es asociativo y distributivo respecto de \*.
* *Anillo unitario* si y solo si es un anillo y (X,+) tiene elemento neutro.
* *Anillo unitario abeliano* si y solo si es un anillo y (X,+) tiene elemento neutro y es conmutativo.
* *Cuerpo* si y solo si es un anillo unitario abeliano y (X, +) tienen inverso.

(Francesc Comellas y autores, p. 210)

Hay varias propiedades que podrían tener las operaciones Ahora bien es importante definir las propiedades importantes de las operaciones.

Sea Ɛ un conjunto no vacío, se define una ley de composición interna \* sobre Ɛ como una función \*: Ɛ x Ɛ → Ɛ de manera que \*(a, b) = (a\*b).

* Cerradura ∀ a, b ϵ Ɛ [a \* b ϵ Ɛ]
* Asociativa si ∀ a, b ϵ Ɛ [(a \* b) \* c = a \* (b \* c)]
* Elemento neutro si ∃ e ϵ Ɛ ∀ a ϵ Ɛ [a \* e = e \* a = a]
* Elemento inverso si ∀ a ϵ Ɛ ∃ i ϵ Ɛ tal que [a \* i = i \* a = e]
* Conmutativa si ∀ a, b ϵ Ɛ [a \* b = b \* a]

(Manuel Murillo Tsijli, 2004, p. 181)

La mayor parte de las operaciones que se encuentran en matemáticas son asociativas.

***Semigrupos, monoides y grupos.***

Un sistema algebraico abstracto se define a partir de un conjunto arbitrario y varias operaciones sobre el conjunto. Estas operaciones tienen propiedades que se toman como axiomas del sistema. No se supone ninguna otra propiedad.

Cualquier conclusión valida que se deduzca de estos axiomas es un teorema del sistema. Esos teoremas son verdaderos para cualquier sistema algebraico para el cual los axiomas son válidos.

Semigrupos

Sea un conjunto S no vacío y sea \* una operación binaria sobre S. El sistema algebraico (s,\*) se llama un semigrupo si cumple con las propiedades:

1. Cerradura
2. Asociativa

Cuando S es finito y su orden no es grande se puede describir un semigrupo, dando la tabla de composición de la operación, si no, se puede describir mediante alguna regla para la operación \* sobre S.

Monoides

Un semigrupo con un elemento (M,\*) de identidad con respecto a la operación \* se llama monoide. En otras palabras un sistema algebraico (M, \*) se llama monoide si:

1. Cerradura
2. Asociativa
3. Elemento identidad

Para un monoide (M, \*) la existencia del elemento identidad garantiza que no hay dos columnas ni renglones en la tabla de composición que sean idénticas. (Jean-Paul, 1996, p. 279)

Grupos

Un grupo (G, \*) es un monoide, con idéntico e, y es una generalización común de, como ya vimos, las siguientes propiedades:

1. Cerradura
2. Asociativa
3. Elemento identidad
4. Elemento inverso

(Bernand Kolman, 1986, p. 315)

Un grupo es un par de objetos: u conjunto (G, H,…) y una operación (\*, +, -,…). Por obvias razones el grupo no necesita ser conmutativo. Los grupos en los que la operación (\*, +, -,…) si lo es tienen un nombre especial Grupo Abeliano.

Si un grupo G tiene u numero finito de elementos, su operación binaria puede darse por una tabla de multiplicación. La tabla de multiplicación del grupo G = {} bajo la operación binaria \* deberá satisfacer las siguientes propiedades:

El renglón etiquetado por e deberá de contener los elementos

Y la columna etiquetada por e deberá contener los elementos

.

:

Se sigue que cada elemento b en el grupo deberá aparecer exactamente una vez cada renglón y cada columna de la tabla. Por tanto, renglón (y cada columna) es una permutación de los elementos , de G y cada renglón (y cada columna) determina una permutación diferente.

Si G es un grupo que tiene un número finito de elementos, se dice que G es un grupo finito y el orden de G es el número de elementos de |G| en G respectivamente.

(Bernand Kolman, 1986, p. 319)

**Bibliografía**

Hector Godinez, Abel Herrera

"Algebra lineal teoría y ejercicios", Editorial Facultad de ingeniería UNAM, 1ra Edición, México, 1987.

Andrés Forero Cuervo

"Matemática Estructural", Editorial Universidad de los Andes, 1ra Edición, Bogotá, 2011.

Jean-Paul Themblay Ram Monochan

"Matemáticas Discretas con Aplicaciones a las Ciencias de la Computación", Editorial Continental, 1ra Edición, México, 1996.

Francesc Camellas, Joseph Fábrega, Anna Sánchez, Oriol Serra

"Matemáticas Discretas", Editorial Alfaomega, 1ra Edición, Barcelona España, 2002.

Edwars R. Sheinerman

"Matemáticas Discretas", Editorial Thomson Learning, 1ra Edición, México, 2001.

Manuel Murillo Tsijli

"Introducción a la Matemática Discreta", Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1ra Edición Cartago, Costa Rica, 2004.

Bernand Kolman, Robert C. Busby

"Estructura de Matemática Discreta para la computación", Editorial Production Supervisión, 1ra Edición, New York, 1986.

Romualdas Skvarcius and William B. Robinson

"Discrete Mathematics with Computer Science Applications", Editorial Benjamin Cummings, 1ra Edición, California USA, August 1980.

Rowan Garnier, John Taylor

"Discrete Mathematics Proofs, Structures, and Applications", Editorial, CRC Press, 3ra Edición, USA, 2010.

Kenneth A. Ross and Charles R.B. Whright

"Discrete Mathematics", Editorial Prentic Hall, 3ra Edición, New Jersey, 1992.

James L. Hein

"Discrete Structures, Logic, and Computability", Editorial Jones and Bartlett Publishers, 2da Edición, Canadá, 2002.