## Лабораторная работа № 7 РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Цель работы:** научиться численно решать обыкновенные диф- ференциальные уравнения.

## Основные положения

*Метод Эйлера*. Практически все инженерные задачи в основе своей сводятся к дифференциальным уравнениям, которые связы- вают физические величины и их производные. Поэтому умение ре- шать дифференциальные уравнения является базовым в инженер- ной практике. В общем виде эта проблема была сформулирована французским математиком Коши и носит его имя. *Задача Коши* формулируется следующим образом:

*y* '  *f*  *x*, *y* ,

*y*  *x*0   *y*0;

*x* *x*0; *x*1.

(7.1)

Это означает, что нам известна связь производной от функции *y* с величинами *x*, *y*, известно значение искомой функции в точке *x*0, необходимо найти значение функции *y* на всем отрезке от *x*0 до *x*1.

В некоторых простейших случаях задача Коши имеет аналитиче-

ское решение. Однако в случае сложных зависимостей *f*  *x*, *y*  точ-

ных решений нет, и приходится искать приближенные решения с помощью численных методов.

Один из первых методов был предложен известным математи- ком и физиком Эйлером и носит его имя. Основную идею метода иллюстрирует рис. 7.1.

Поясним содержание рисунка. Предположим, что нам известно значение функции *y*(*x*) в точке *xi*. Обозначим эту величину как *yi*. Через эту точку проходит касательная к графику функции AB. В точке *xi+*1 эта касательная принимает значение *yi+*1. Из графика вид- но, что это значение отличается от истинного значения искомой функции в точке *xi+*1, которое равно *y*(*x*i*+*1). Однако из этого же гра- фика понятно, что при приближении точки *xi+*1 к точке *xi* разница *y*(*x*i*+*1) – *yi+*1 будет уменьшаться, стремясь к нулю.

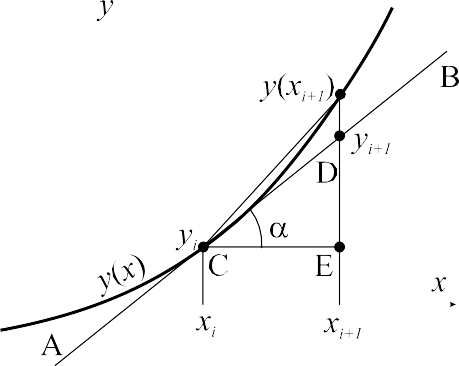


Рис. 7.1. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

Эйлер строго показал, что эта разница имеет порядок расстоя- ния *h* между соседними точками *xi* и *xi+*1. Тогда, исходя из треуголь- ника CDE, можно записать

DE/CE  tg.

Так как DE  *yi*1 – *yi* , а CE  *xi*1 – *xi* , то можно записать

*yi*1 – *yi*  (*xi*1 – *xi* )  tg *h*  tg.

Но  – это угол наклона касательной к графику функции, тан- генс которого, как известно, равен производной этой функции. То- гда это уравнение можно переписать в виде

*yi*1 – *yi*  *y*’(*xi* )*h*  *h*  *f* (*xi* , *yi* ).

Так как искомая функция и найденное значение отличаются на величину порядка *O(h*), то можно записать

*y*(*xi*1)  *yi*  *hf* (*xi* , *yi* )  *O*(*h*).

Вычислительный алгоритм записывается следующим образом:

*yi*1  *yi*  *hf* (*xi* , *yi* ).

(7.2)

Ошибка накапливается и в конце заданного отрезка может быть весьма значительной. С уменьшением шага эта ошибка уменьшает- ся. Поэтому критерием заданной точности может быть изменение искомой функции на правом краю заданного отрезка при уменьше- нии шага. Как правило, шаг уменьшают вдвое. Если найденная функция при этом не изменяется в требуемом количестве значащих цифр, то решение считается найденным с приемлемой точностью.

*Метод Рунге – Кутты*. Метод Эйлера чрезвычайно нагляден, но в связи с низкой точностью в практике численных решений приме- няется редко. Намного чаще применяется более громоздкий, но намного более точный метод, который разработали в XIX веке ма- тематики Рунге и Куттá. Метод Рунге – Кутты записывается следу- ющим образом:

*yi*1  *yi*  *h* *k*1  2*k*2  2*k*3  *k*4  / 7;

*k*1  *f*  *xi* , *yi*  ;

*k*2  *f*  *xi*  *h* / 2,

*yi*  *k*1*h* / 2 ;

(7.3)

*k*3  *f*  *xi*  *h* / 2,

*yi*  *k*2*h* / 2 ;

*k*4  *f*  *xi*  *h*,

*yi*  *k*3*h*.

Метод имеет четвертый порядок точности. Последовательность реализации метода состоит из пяти шагов: сначала поочередно, ис- ходя из имеющихся в условии данных, вычисляются коэффициенты *k*, затем находится значение функции *yi*+1.

## Порядок выполнения работы

1. Решить в Excel обыкновенное дифференциальное уравнение *y*' = *y* – *x* с заданными начальными условиями *x*0 = 0; *y*0 = 1,5 на от- резке от 0 до 1,5 методом Эйлера. Сравнить с точным решением. Построить графики.
2. Разбить область решения на отрезки величиной *h* = 0,25. В первой строке таблицы в Excel в ячейки A3 и B3 ввести начальные значения величин *x*0 и *y*0, известные из условия задачи. В ячейке С3 вычислить значение функции *f*(*x*, *y*) = *y* – *x* при заданных начальных данных (рис. 7.2).

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, линия, График

Автоматически созданное описание

Рис. 7.2. Решение дифференциального уравнения методом Эйлера

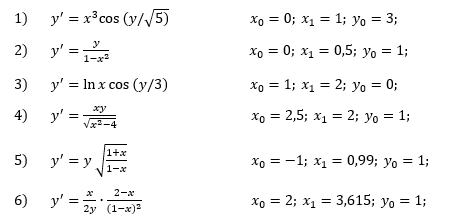
1. Во второй строке ввести формулы: значение *x* равно значению *x* из предыдущей строчки плюс шаг *h*; значение *y* вычисляется в со- ответствии с выражением (7.2). Из ячейки B3 берется предыдущее значение функции *y* и прибавляется правая часть уравнения из ячейки С3, умноженная на шаг *h* из ячейки D1. Следующие строки создаются путем копирования предыдущих строк.
2. По точкам *x* и *y* построить график найденной таблично функ- ции *y*(*x*).
3. Выполнить вычисления с шагом *h*, уменьшенным вдвое. По- лученную зависимость добавить на график. Сравнить значения функций на конце отрезка. (Рис 7.3)

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, число, Параллельный

Автоматически созданное описание

Рис. 7.3 Решение дифференциального уравнения методом Эйлера

1. Найти решение обыкновенного дифференциального уравнения *у' = f*(*t*, *y*) на интервале [*t*0; *t*1] с заданными начальными условиями *y*(*t*0) = *y*0.



|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант** | **Студент** |
| 1,2 | Варывдин Александр Андреевич |
| 3,4 | Велькина Екатерина Витальевна |
| 5,7 | Возчиков Даниил Алексеевич |
| 1,2 | Ермолаев Александр Сергеевич |
| 3,4 | Заостровских Лев Сергеевич |
| 5,7 | Исаев Даниил Вадимович |
| 1,2 | Калистратов Алексей Алексеевич |
| 3,4 | Королько Евгений Викторович |
| 5,7 | Корюков Кирилл Владимирович |
| 1,2 | Примак Дарья Дмитриевна |
| 3,4 | Пронин Лев Викторович |
| 5,7 | Пчельников Трофим Викторович |
| 1,2 | Рудь Артемий Русланович |
| 3,4 | Серова Елизавета Вячеславовна |
| 5,7 | Спиркин Михаил Алексеевич |
| 1,2 | Суханов Григорий Павлович |
| 3,4 | Журавлева Ольга Валерьевна |
| 5,7 | Калашников Георгий Андреевич |
| 1,2 | Копырин Дмитрий Андреевич |
| 3,4 | Титов Данил Анатольевич |
| 5,7 | Юшкина Полина Денисовна |