



ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТЕОРИЯ ГРАФОВ И КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ В ЭКОНОМИКЕ

Лектор:

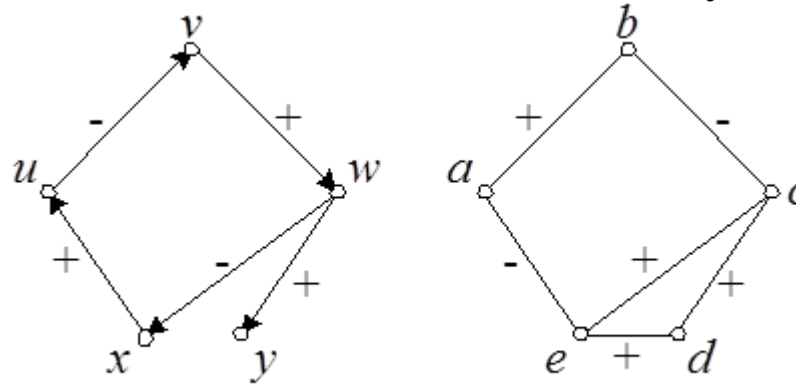
Кочкаров Азрет Ахматович,
Кандидат физико-математических наук,
Доцент кафедры «Прикладная математика»

Тема 10. Знаковые графы и теория структурного баланса

Определение

Граф является моделью для представления отношений между людьми, например, отношения «лицо u знает лицо v ». Такие отношения могут иметь и иной смысл, не обязательно только означая, что u знает или не знает v . Например, u может доверять или не доверять v .

Знак пути, цепи, замкнутого пути, замкнутой цепи, контура, цикла и т.д. определяется как *произведение* знаков, входящих в них дуг или ребер.



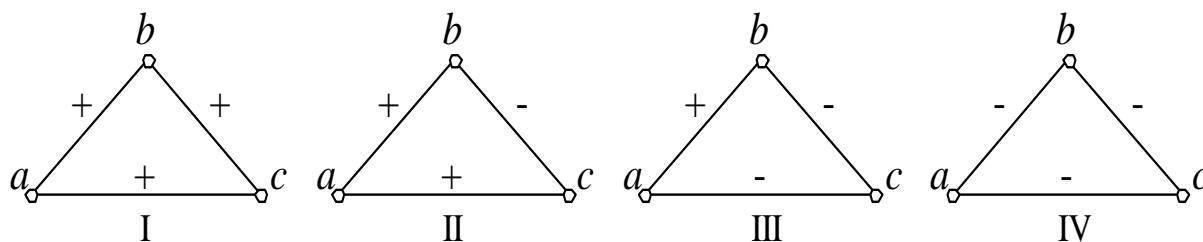
Знаковый орграф D и знаковый граф G

В знаковом орграфе D путь u, v, w, u имеет знак минус, и контур u, v, w, x, u имеет знак плюс. В знаковом графе G на рис. 1 цепь a, b, c, d отрицательна.

Путь и цепь имеют знак минус, если число отрицательных дуг или ребер, содержащихся в них, нечетно, в противном случае они имеют знак плюс.

Баланс в малых группах

Рассмотрим задачу из области социологии малых групп и теории принятия решений. В качестве изучаемых малых групп могут рассматриваться коллективы лиц, принимающих решения, комиссии экспертов и т.д. Такие группы называются «сбалансированными», если в некотором смысле, они демонстрируют «отсутствие напряжения» и обладают способностью хорошо работать совместно.

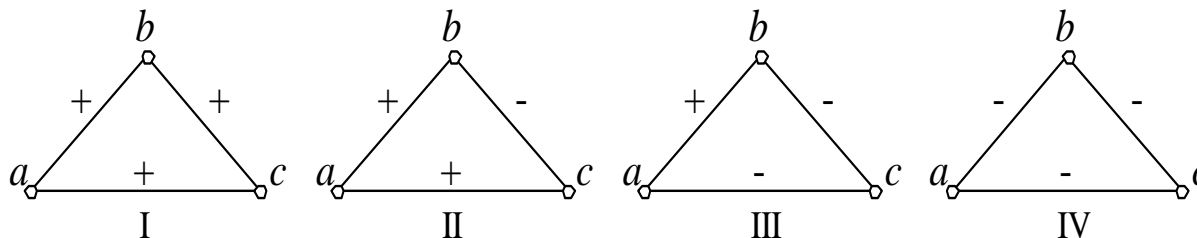


Модель малой группы из трех человек

Группы типов I и III сбалансированы, а группы типов II и IV нет!

В группе I все охотно работали вместе. В группе III *a* и *b* симпатизируют друг другу, и оба взаимно не симпатизируют *c*, поэтому каждый член группы будет удовлетворен, если *a* и *b* будут работать вместе, а *c* в одиночку. В группе II, лицо *a* симпатизирует и *b*, и *c* и для *a* желательно работать с ними обоими и им бы также хотелось работать с *a*, но сами они не симпатизируют друг другу, поэтому в группе существует напряженность и группа несбалансирована. В группе IV ее члены не симпатизируют друг другу, всякое сотрудничество невозможно и группа несбалансирована.

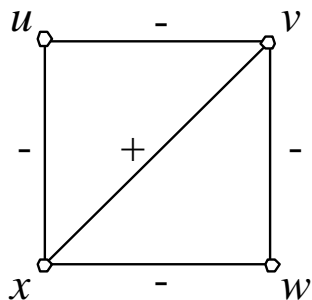
Баланс в малых группах



Модель малой группы из трех человек

Группы типов I и III сбалансированы, а группы типов II и IV нет!

Группам типов I и III соответствуют циклы с четным числом отрицательных знаков, а группам типов II и IV - циклы с нечетным числом отрицательных знаков. Малая группа представляется ее знаковым графом и группа считается *сбалансированной*, если каждый цикл в ее знаковом графе положителен. Знаковый граф, соответствующий сбалансированной группе, будем также называть сбалансированным.

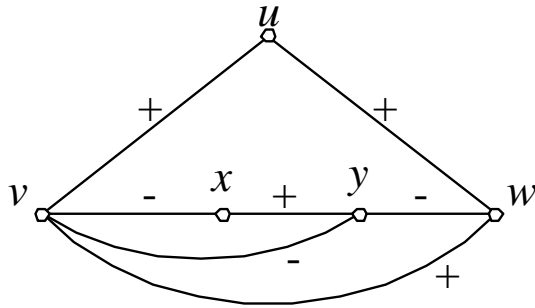


Знаковый граф не сбалансирован.

Все его циклы, а именно, u, v, w, x ; u, v, x ; u, v, w, x, v положительны.

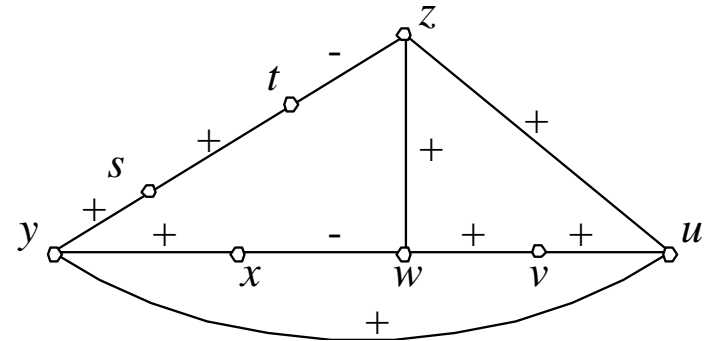
Теорема о структуре

Непосредственное использование определения для распознавания сбалансированности может оказаться очень сложным для групп достаточно больших размеров.



Сбалансированный знаковый граф

Вершины можно разбить на два множества $\{x, y\}$ и $\{a, b, c\}$



Несбалансированный знаковый граф

В данном графе легко найти отрицательный цикл.

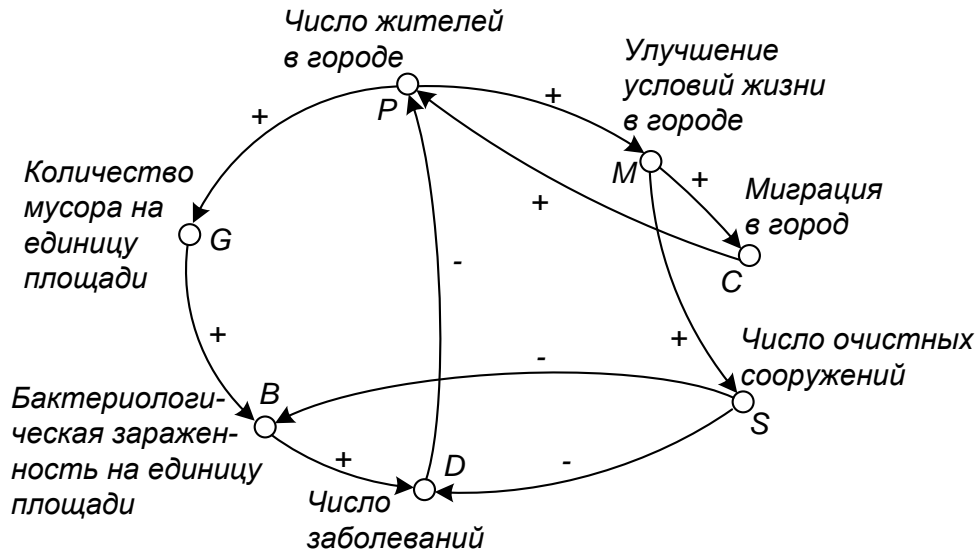
Теорема Харари о структурном балансе. Знаковый граф $G=(X, A)$ сбалансирован тогда, когда множество вершин X можно разбить на два множества X_1 и X_2 так, что каждое положительное ребро соединяет вершины одного множества и каждое отрицательное ребро соединяет вершины различных множеств.

Моделирование сложных систем

Знаковые орграфы можно использовать при разработке простых математических моделей сложных систем и при анализе результатов, получаемых на основе минимальной информации.

Наиболее существенные для рассматриваемой проблемы переменные считаются вершинами орграфа. От переменной u к переменной v проводится дуга, если изменение u оказывает непосредственное существенное воздействие на v . Дуга имеет знак плюс, если воздействие является «усилением» (при прочих равных условиях увеличение u приводит к увеличению v и уменьшение u приводит к уменьшению v), и знак минус, если воздействие вызывает «торможение» (при прочих равных условиях увеличение u приводит к уменьшению v и уменьшение u приводит к увеличению v).

Моделирование сложных систем



Дуга (P, G) положительна, поскольку рост городского населения ведет при прочих равных условиях к увеличению количества мусора. Дуга (D, P) отрицательна, поскольку рост заболеваемости ведет к уменьшению населения, тогда как уменьшение заболеваемости приводит к росту.

Знаковый орграф для анализа проблемы
удаления твердых отходов из городов

Наличие многих контуров, усиливающих отклонение, предполагает неустойчивость. Наличие многих контуров, противодействующих отклонению, также может приводить к неустойчивости за счет увеличения колебаний.

Спасибо за внимание!

Лектор:

Кочкаров Азрет Ахматович,

Кандидат физико-математических наук,
Доцент кафедры «Прикладная математика»