Московский Авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Институт №8
«Информационные технологии и прикладная математика»

Кафедра 813
«Компьютерная математика»

Курсовая работа
по дисциплине
«Математический практикум»

Тема:

«Математические вычисления в пакете Sage»

ВАРИАНТ № 404

Студент: Завьялова Елизавета Александровна

Группа: М8О-210Б-20

Преподаватели:
Денисова И. П.
Гавриш О. Н.

Оценка:

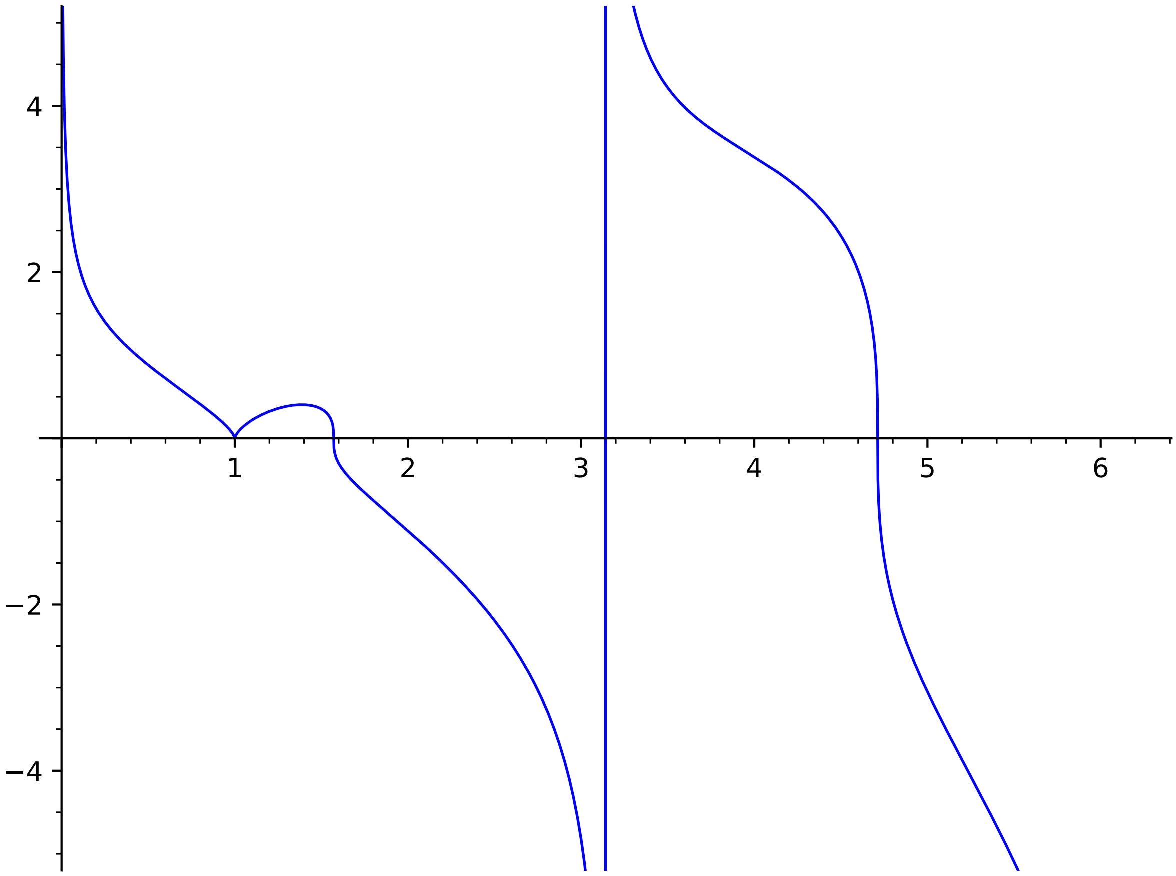
Дата:

Москва 2021г.

Содержание

1 Исследование графиков

Дана функция $f(x) = \left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}}$.



Область определения функции — $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$ т.к. функция содержит в знаменателе $tg(x)$.

Является ли функция четной или нечетной Функция четна, если:
$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in X$
Функция нечётной, если:
$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in X$
Иначе функция называется прочей.

Даннная функция

$f(x) = \left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}}$

$f(-x) = \left(-\frac{x^3+x^2-x-1}{\tan(-x)}\right)^{\frac{1}{3}}$

Значит данная функция прочая

Переодичность

функция называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для нее выполняется равенство $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$.

Данная функция непереодическая.

Точки пересечения графика с осями координат

По области определения функции $x \neq 0$ значит функция никогда не пересекает ось ординат.

Найдем точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс. Для этого решим уравнение: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. Функция пересекает ось абсцисс в $x = (-1)$ и $x = 1$.

Знакопостоянства

Возьмем промежуток на графике $[0,\pi]$ На нем есть точка разрыва $\frac{\pi}{2}$ а так же пересечение с графиком в точке $x = 1$:

$y(0.5) = 0.882130210996313$

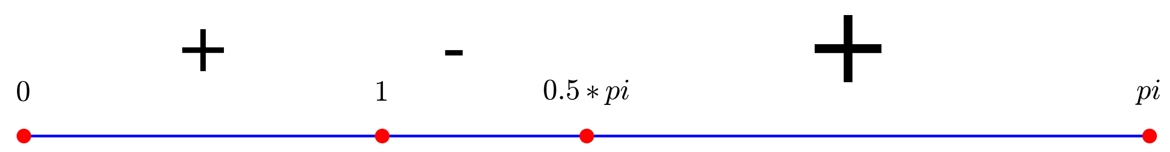
Следовательно если $0 < x < 1$, то $f(x) > 0$

$y(1.2) = 0.324635020981709$

Следовательно если $1 < x < \frac{\pi}{2}$, то $f(x) < 0$

$y(2) = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{\tan(2)^{\frac{1}{3}}}$

Слудовательно если $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, то $f(x) > 0$



Промежутки возрастания и убывания

Исследуем функцию на промежутке $[0; \pi]$.

Найдем 1ую производную:

$f'(x) = -\frac{\frac{\left(x^3-x^2-x+1\right)\left(\tan(x)^2+1\right)}{\tan(x)^2} - \frac{3\,x^2-2\,x-1}{\tan(x)}}{3\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{2}{3}}}$ Возможные проблемные точки

$x_0 = 1.3875082421317861$

$x_1 = \frac{pi}{2}$

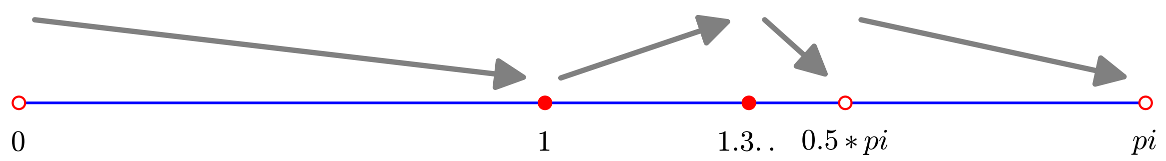
$x_2 = 1$

f'(x)<0(f(x)-убывает) на промежутках $(0;1)$,

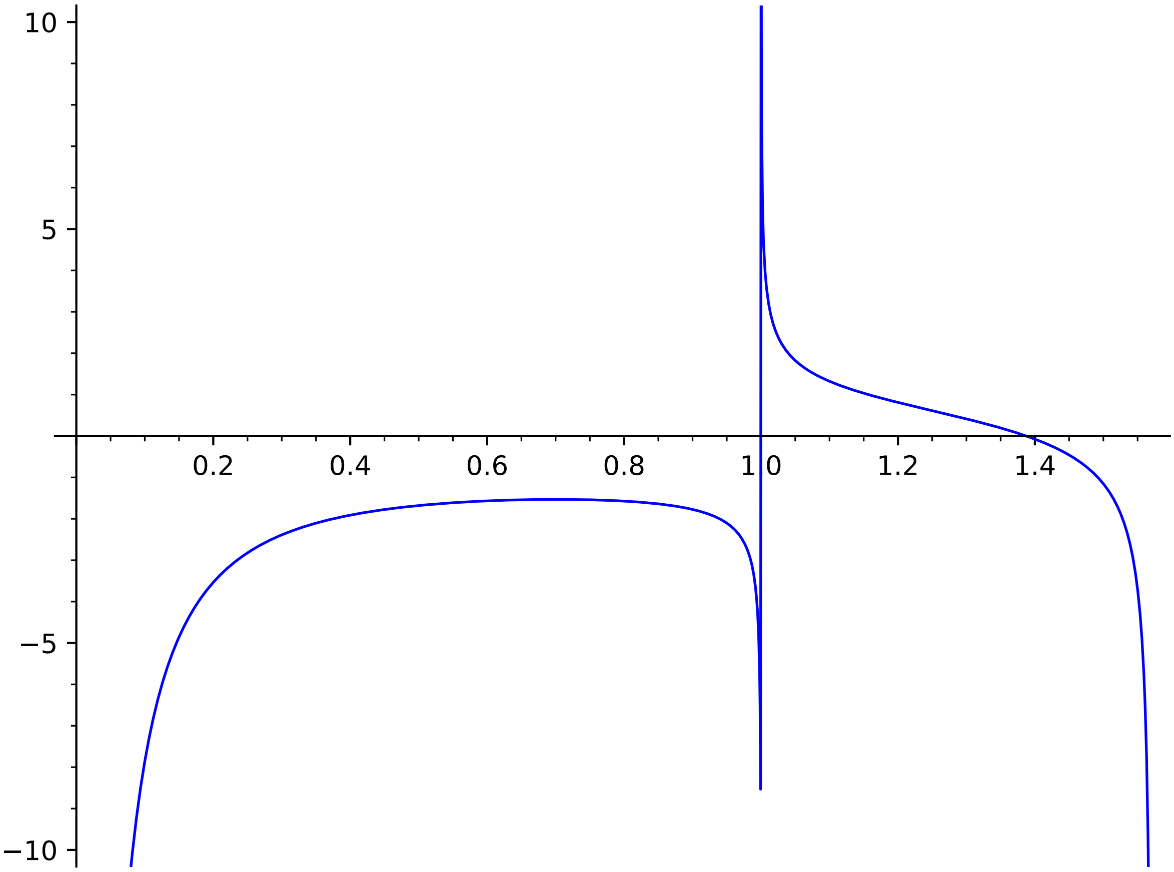
$(1.3875082421317861;\frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2},\pi)$,

т.k $f'(0.5) = -1.67902416248949$,$f'(1.39) = -0.0144282146229300$,$f'(2) = 0.921762640341586 - 1.59653972559047i$.

f'(x)>0(f(x)-возрастает) на промежутке $(1;1.3875082421317861)$. т.k $f'(1.1) = 1.32184526469816$



Точки экстремума и значения в этих точках



Необходимые условия существования экстремума:

Пусть точка x_0 является точкой экстремума функции f, определенной в некоторой окрестности точки x_0. Тогда либо производная $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$.

Достаточные условия существования экстремума:

1.Функция имеет экстремум, если она непрерывна в окрестности точки или не существует и производная при переходе через точку меняет свой знак.

2. Если функция непрерывна в окрестности точки, $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то в x_0 достигается экстремум, причем, если $f''(x_0) > 0$, то в точке функция имеет минимум; если $f''(x_0) < 0$, то в точке функция достигает максимум.

Из предыдущего пункта можно заметить что:

$x = 1$ яется локальным минимумом.

$x = 1.3875082421317861$ является локальным максимумом.

Непрерывность. Наличие точек разрыва и их классификация

Если в точке имеются конечные не равные пределы, то x_0 называется точкой разрыва первого рода.

Точки разрыва второго рода это точки в которых хотя бы один из односторонних пределов равен ∞ или не существует.

Если в точке имеются конечные пределы, и они равны, и в x_0 функции не существует. То это ныывается устранимым разрывом.

$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = +\infty,$

$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = \infty,$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = 3.7153832772932833\times 10^{-06},$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = 3.7153832772932833\times 10^{-06},$

$\lim_{x\to \pi+}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = +\infty,$

$\lim_{x\to \pi-}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = \infty$

Данная функция на промежутке $[0,\pi]$ имеет точки разрыва второгоого рода при $x = 0,\pi$

$x = \frac{pi}{2}$ -устранимый разрыв.

Асимптоты Вертикальная асимптота графика, как правило, находится в точке бесконечного разрыва функции. Всё просто: если в точке функция терпит бесконечный разрыв, то прямая, заданная уравнением является вертикальной асимптотой графика.

$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = +\infty,$

$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = \infty,$

$\lim_{x\to \pi+}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = +\infty,$

$\lim_{x\to \pi-}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = \infty,$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to +(-)} f(x) = b$ Упрощенная формула нахождения горизонтальной асимптоты, то прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции при .

$\lim_{x\to OO+}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = und,$

$\lim_{x\to OO-}\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} = und,$

Если существуют два конечных предела $\lim\limits_{x\to OO+(-)} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to OO+(-)} (f(x) - kx) = b$ Формулы нахождения наклонной асимптоты, то прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции при . Если хотя бы один из перечисленных пределов бесконечен, то наклонная асимптота отсутствует.

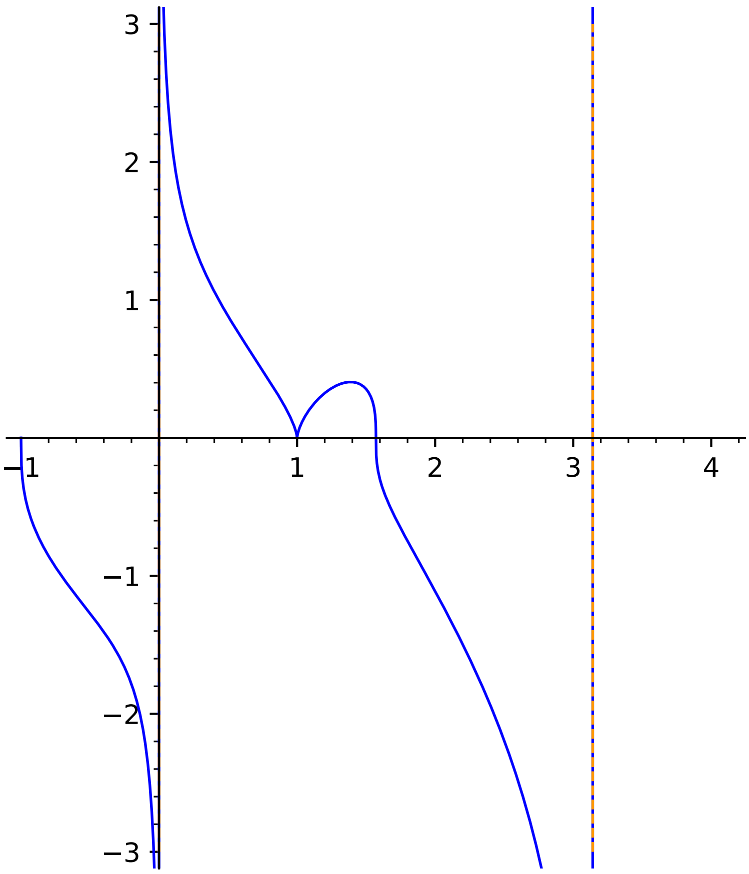
$$k = \lim_{x \to OO+} \frac{\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}}}{x} = 0,$$

$$k = \lim_{x \to OO-} \frac{\left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}}}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to OO+} \left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} - kx = und,$$

$$\lim_{x \to OO-} \left(\frac{x^3-x^2-x+1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{3}} - kx = und,$$

Таким образом график имеет 2 вертикальные асимптоты на заданном промежутке это 0 и π.



2 СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2 \\ 7x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Метод Крамера

Составим матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ и вектор столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. $det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & -7 \end{vmatrix} = -10$. $det(A) \neq 0$, значит система уравнений имеет решение.

$X_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 0$, $X_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 7 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 70$, $X_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 60$,

$x_1 = 0$,

$x_2 = -7$,

$x_3 = -6$,

Метод Гаусса

По теореме Кронекера-Капелли. Для того чтобы линейная система являлась совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу её основной матрицы.

Ранг матрицы коэффициентов $\operatorname{rank} A = 3$.

Ранг расширенной матрицы $\operatorname{rank}(A|B) = 3$.

Так как равнги матриц завны система совместна.

Приведем матрицу к диагональному виду.

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & -2 \\ 7 & 3 & -4 & -3 \\ 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Проверка

Подставим x1=0, x2=-7, x3=-6 в ур-я

$3 * 0 + 4 * (-7) - 5 * (-6) == 2$,

`верно`

$7 * 0 + 3 * (-7) - 4 * (-6) == 3$,

`верно`

$5 * 0 + 6 * (-7) - 7 * (-6) == 0$,

`верно`

3 Матрицы — Матричные уравнения

Дано уравнение:

$$3*X*\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2*\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение уравнения сводится к:

$$3*X*\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2*\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3*X = (2*\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = \frac{2}{3}(\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{5}{24} & \frac{31}{48} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{19}{48} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{23}{24} & \frac{13}{48} \end{pmatrix}$$

Проверка

Подставим $X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{5}{24} & \frac{31}{48} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{19}{48} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{23}{24} & \frac{13}{48} \end{pmatrix}$ в исходное ур-е

$$3*\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{5}{24} & \frac{31}{48} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{19}{48} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{23}{24} & \frac{13}{48} \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2*\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

верно.

4 Решение алгебраических уравнений третей степени

Любое кубическое уравнение общего вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ при помощи замены переменной $x = y - \frac{b}{3a}$ может быть приведено к форме $y^3 + py + q = 0$

$S = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

Если все коэффициенты кубического уравнения вещественны, то и S вещественно, и по его знаку можно определить тип корней:

S > 0 — один вещественный корень и два сопряжённых комплексных корня.

S = 0 — один однократный вещественный корень и один двукратный, или, если p = q = 0, то один трёхкратный вещественный корень.

S < 0 — три вещественных корня.

По формуле Кардано, корни кубического уравнения в канонической форме равны:

$x = (u + v) * cos(k * \frac{2*\pi}{3}) + i * (u - v) * sin(k * \frac{2*\pi}{3})$ где

$k = 0, 1, 2$

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}$,

$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$,

Решим данное уравнение:

$11\,x^3 - 7\,x^2 + 15\,x - 8 = 0$

Подставим $x = z + \frac{7}{33}$

Получим $11\,z^3 + \frac{446}{33}\,z - \frac{16427}{3267} = 0$

Поллучаем

$p = \frac{446}{363}$

$q = -\frac{16427}{35937}$

$S = \frac{191219}{1581228}$

S > 0 — один вещественный корень и два сопряжённых комплексных корня. Корни уравнения в алгебраическом представлении:

$x_1 = 0.552159576921586$

$x_2 = 0.0421020297210251 + 1.14689568178328i$

$x_3 = 0.0421020297210251 - 1.14689568178328i$

Корни уравнения в тригонометрическом представлении:

$x_1 = 0.552159576921586\,\cos(0.000) + 0.552159576921586i\,\sin(0.000)$

$x_2 = 1.14766819499355\,\cos(1.53) + 1.14766819499355i\,\sin(1.53)$

$x_3 = 1.14766819499355\,\cos\left(-1.53\right) + 1.14766819499355i\,\sin\left(-1.53\right)$

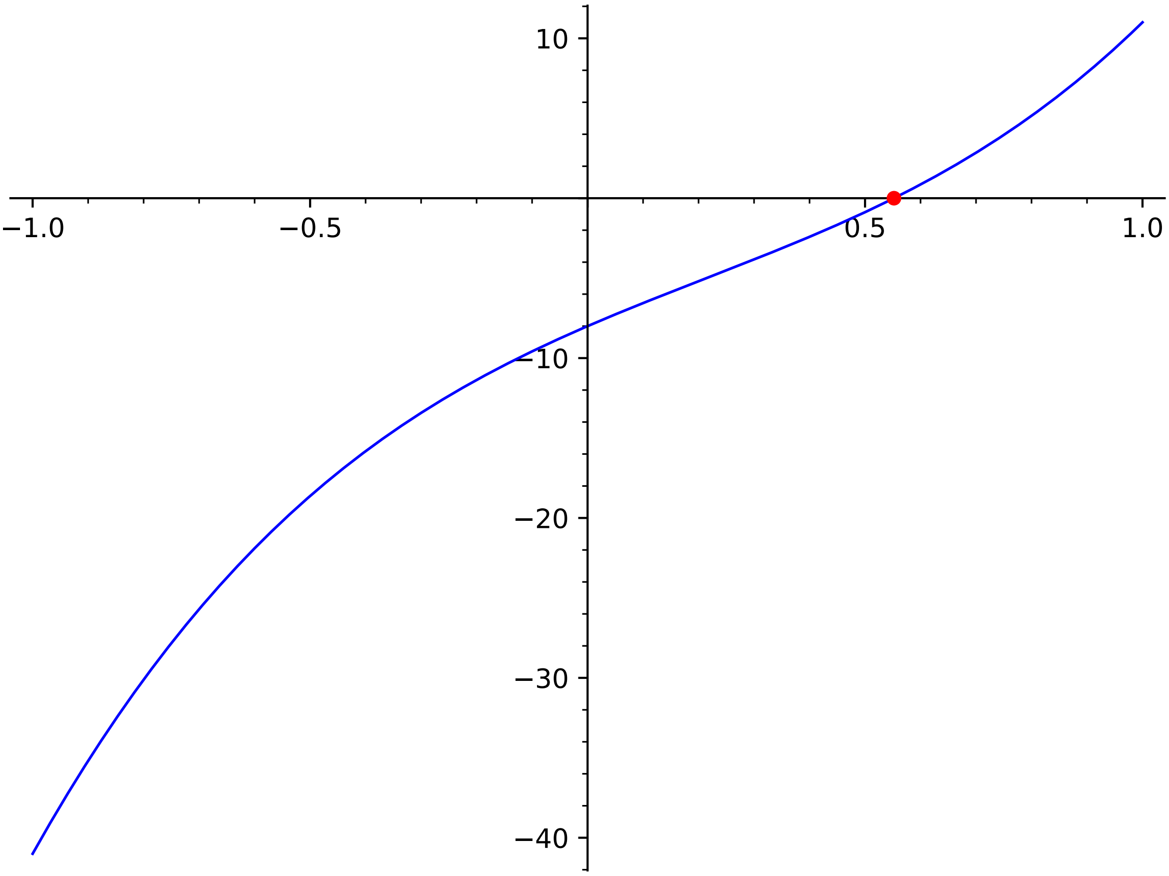
Корни уравнения в экспоненциальном представлении:

Корни уравнения в экспоненциальном представлении:

$x_1 = 0.552159576921586e^{0.000i}$

$x_2 = 1.14766819499355e^{1.53i}$

$x_3 = 1.14766819499355e^{-1.53i}$



Проверка

Подставим $x = 0.55216$ в исходное ур-е:

Погрешность: -3.3307×10^{-15}

`верно`

Подставим $x = 0.042102 + 1.1469i$ в исходное ур-е:

Погрешность: $1.7764 \times 10^{-15} - 3.5527 \times 10^{-15}i$

`верно`

Подставим $x = 0.042102 - 1.1469i$ висходное ур-е:

Погрешность: $1.7764 \times 10^{-15} + 3.5527 \times 10^{-15}i$

`верно`

Уровнение решено верно.

5 Решение алгебраических уравнений четвертой степени

Дано уравнение: $12\,x^4 + 7\,x^3 - 2\,x^2 - x = 0$

На первом этапе уравнения вида

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$
где a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 - произвольные числа, причем $a_0 \neq 0$

приводятся к уравнению четвертой степени, у которого отсутствует член с третьей степенью неизвестного.

дальше полученное уравнение решаются при помощи разложения на множители, однако для того, чтобы найти требуемое разложение на множители, приходится решить кубическое уравнение.

Пусть уравнение имеет вид $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$: Произведем замену: $x = y - \frac{7}{48}$,

$y^4 - \frac{113}{384}\,y^2 - \frac{137}{13824}\,y + \frac{4277}{589824} = 0.$

Выпишем значение коэффициентов p, q, r для исходного уравнения, чтобы уравнение приняло вид: $y^4 + py^3 + qy + r = 0$: $p = \frac{113}{384}$;

$q = -\frac{137}{13824}$;

$r = \frac{4277}{589824}$. Найдем любое значение s из уравнения $2\,s^3 - \frac{113}{384}\,s^2 - \frac{4277}{294912}\,s + \frac{12898975}{6115295232} = 0.$

$s_0 = 0.147973712238078 + 1.38777878078145 \times 10^{-17}i$

Составим 2 ур-я:

$-\frac{1}{8}\,\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{768\,s - 113}y + y^2 + s - \frac{137\,\sqrt{\frac{1}{6}}}{576\,\sqrt{768\,s - 113}} = 0$; $\frac{1}{8}\,\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{768\,s - 113}y + y^2 + s + \frac{137\,\sqrt{\frac{1}{6}}}{576\,\sqrt{768\,s - 113}} = 0$

$y_0 = \frac{1}{8}\,\sqrt{17} + \frac{1}{48}$

$y_1 = -\frac{1}{8}\,\sqrt{17} + \frac{1}{48}$

$y_2 = \frac{7}{48}$

$y_3 = -\frac{3}{16}$

Вернемся к замене

Корни уравнения в алгебраическом представлении:

$x_1 = 0.390388203202208$

$x_2 = -0.640388203202208$

$x_3 = 0$

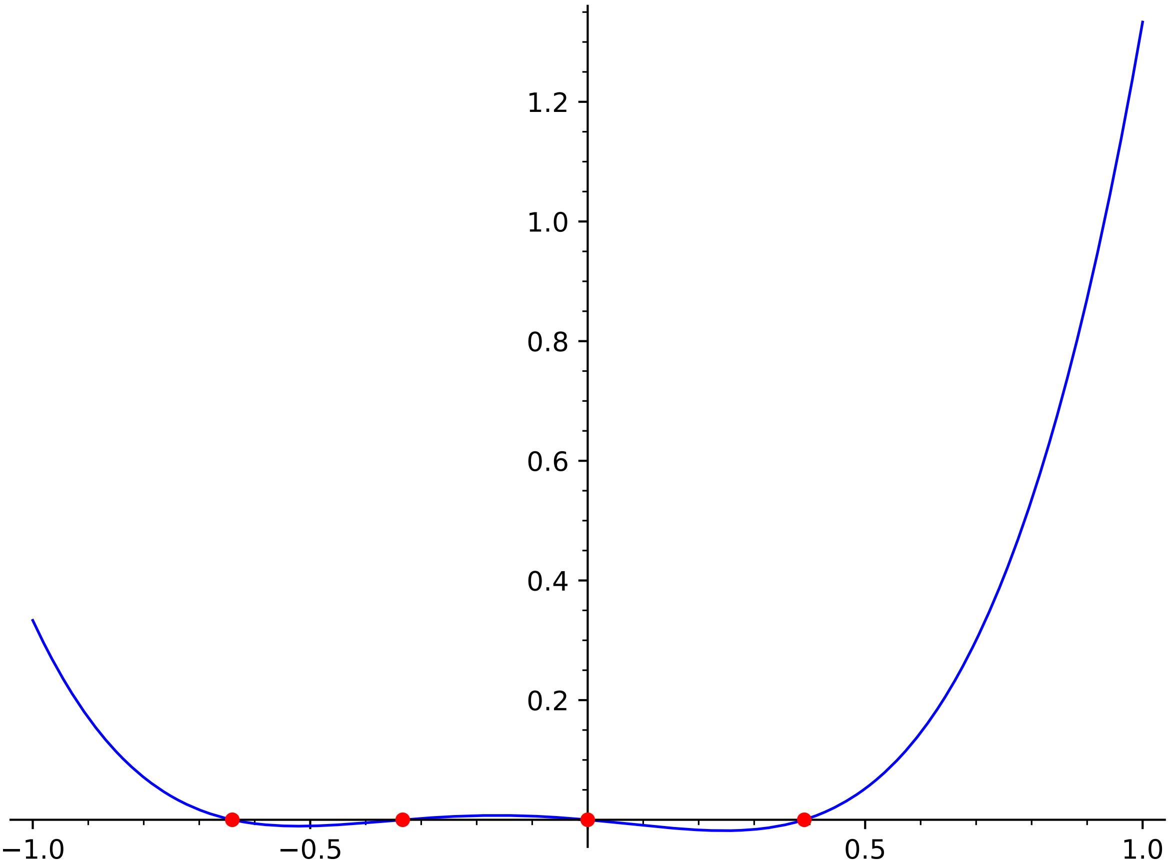
$x_4 = -0.333333333333333$

Корни уравнения в тригонометрическом представлении:

$x_1 = 0.390\,\cos{(0)} + 0.390i\,\sin{(0)}$
$x_2 = 0.640\,\cos{(3.142)} + 0.640i\,\sin{(3.142)}$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0.333\,\cos{(3.142)} + 0.333i\,\sin{(3.142)}$

Корни уравнения в экспоненциальном представлении:

Корни уравнения в экспоненциальном представлении:
$x_1 = 0.390e^{0i}$
$x_2 = 0.640e^{3.142i}$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0.333e^{3.142i}$



Проверка

Подставим $x = 0.39039$ в исходное ур-е:
Погрешность:
1.1102×10^{-16}
`верно`
Подставим $x = -0.64039$ в исходное ур-е:
Погрешность:
3.3307×10^{-16}
`верно`
Подставим $x = 0.00000$ висходное ур-е:
Погрешность:

0.00000

`верно`

Подставим $x = -0.33333$ в исходное ур-е:

Погрешность:

0.00000

`верно`

Уровнение решено верно.

6 НОД двух полиномов

Найти для полиномов$f(x)$ и $g(x)$ НОД по алгоритму евклида и представить его ввиде НОД в виде: $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$

Алгоритм Евклида (алгоритм последовательного деления) нахождения наибольшего общего делителя многочленов a и b :

r_k — это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть:

$a = bq_0 + r_1,$
$b = r_1q_1 + r_2,$
$r_1 = r_2q_2 + r_3,$
$\cdots$
$r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_k,$
$\cdots$
$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n,$
$r_{n-1} = r_nq_n.$

Таким образом последний ненулевой остаток является наибольшим общим делителем исходных многочленов a и b.

Даны полиномы $f = 5x^5 - 21x^4 + 23x^3 - 37x^2 + 77x - 7$ и $g = 10x^4 - 42x^3 + 56x^2 - 26x + 2$.
По теореме Безу НОД представим в виде: $gcd(f, g) = g * u + v * f$:

$x^2 - \frac{11}{5}x + \frac{1}{5} = (10x^4 - 42x^3 + 56x^2 - 26x + 2) * (-\frac{1}{640}x^2 + \frac{9}{640}x + \frac{1}{640}) + (\frac{1}{320}x - \frac{9}{320}) * (5x^5 - 21x^4 + 23x^3 - 37x^2 + 77x - 7) =$

Проверка

$x^2 - \frac{11}{5}x + \frac{1}{5} = x^2 - \frac{11}{5}x + \frac{1}{5}$

`верно`

7 Линейные преобразования и характеристическое уравнение матрицы

Дана матрица: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, И базис: $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + e_3, \\ e_2' = e_1 + e_2, \\ e_3' = 2 * e_2 + e_3, \end{cases}$ Построим матрицу перехода:$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Пусть преобразование задаётся матрицей A. А матрица перехода в другой базис задаётся матрицей B. Тогда искомая матрица A' находится по формуле:

$A' = B^{-1}AB$ Тогда матрица $A' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Теперь построим характеристический полиномб который задается формулой:

$f(x) = |A - xE|$ Характеристический полином матриц A и A' совпадает и равен:

$f(x) = -x^3 + 3\,x^2 + x - 2$

Теперь найдем собственные числа $f(x) = 0$ $-x^3 + 3\,x^2 + x - 2 = 0$

Отсюда собственные числа:

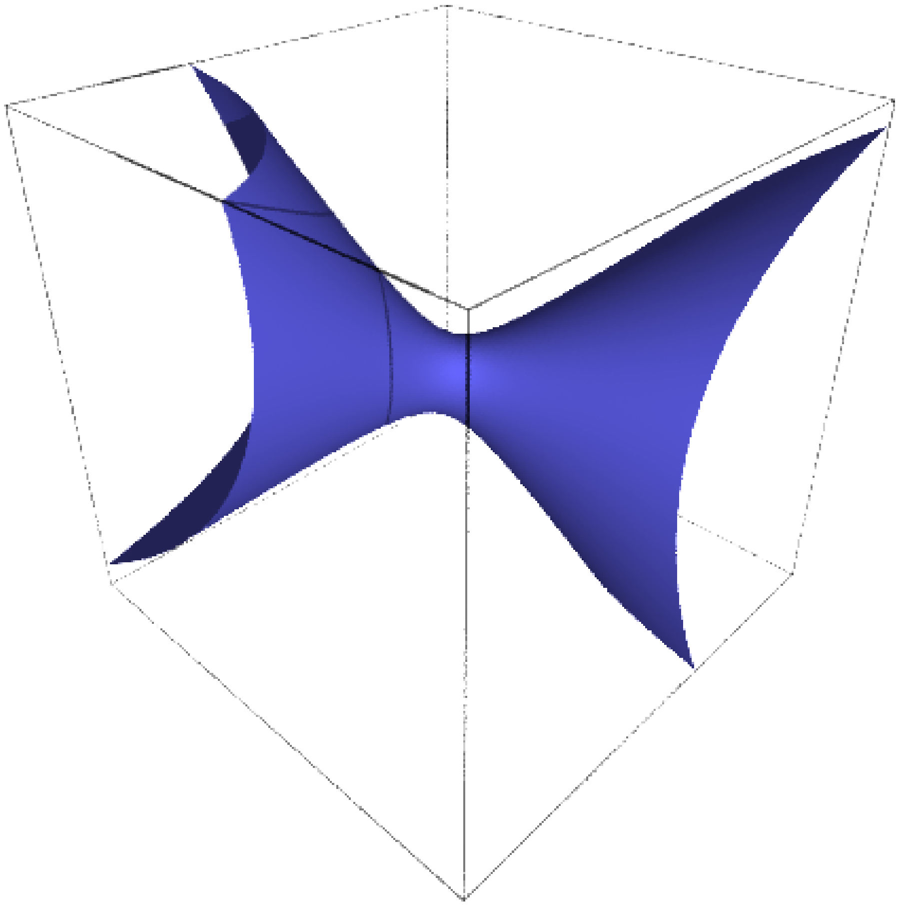
$_1 = 0.745898311634948,$

$_2 = -0.860805853111703,$

$_3 = 3.11490754147676.$

8 Упрощение уравнений фигур 2-го порядка в пространстве

Дано ур-е $-6\,xy + 4\,yz + 3\,z^2 - x - y + z - 10 = 0$



Составим матрицу A этой квадратичной формы и столбец коэффициентов линейной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Найдем $\tau_1 = det(A) = 3$.

Найдем τ_2 равный сумме определителей матриц:

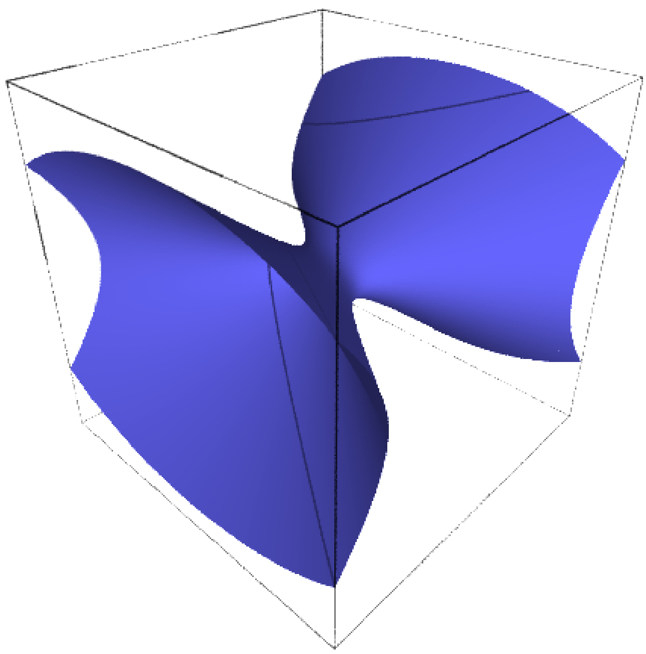
$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$

$\tau_2 = -13$.

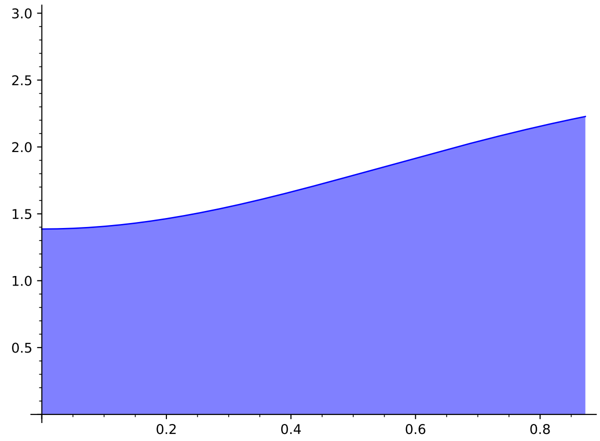
Найдем $\delta = det(A) = -27$

Построим $D = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -10 \end{pmatrix}$
Найдем $\Delta = det(D) = \frac{1063}{4}$
Напишим многочлен $(\lambda)^3 + 3(\lambda)^2 - 13\lambda - 27 = 0.$
$|\lambda 1| <= |\lambda 2| <= |\lambda 3|$
$(\lambda 1 = 1.77961568033164$
$(\lambda 2 = -3.33241478776227 + 1.11022302462516 \times 10^{-16} i$
$(\lambda 3 = 4.55279910743062 - 2.22044604925031 \times 10^{-16} i$
Откуда
$(a`)^2 = \frac{-\Delta}{\lambda_1 * \delta} = 5.53$
$(b`)^2 = \frac{-\Delta}{\lambda_2 * \delta} = -2.95$
$(c`)^2 = \frac{-\Delta}{\lambda_3 * \delta} = 2.16$
Получаем
$u'(x, y, z) = (\frac{1}{(a')^2})x^2 + (\frac{1}{(b')^2})y^2 + (\frac{1}{(c')^2})z^2 - 1,$

$$u'(x, y, z) = 0.180807613806037\, x^2 - 0.338570834504539\, y^2 + 0.462560962937448\, z^2 - 1.$$



9 Численные методы — Интегралы

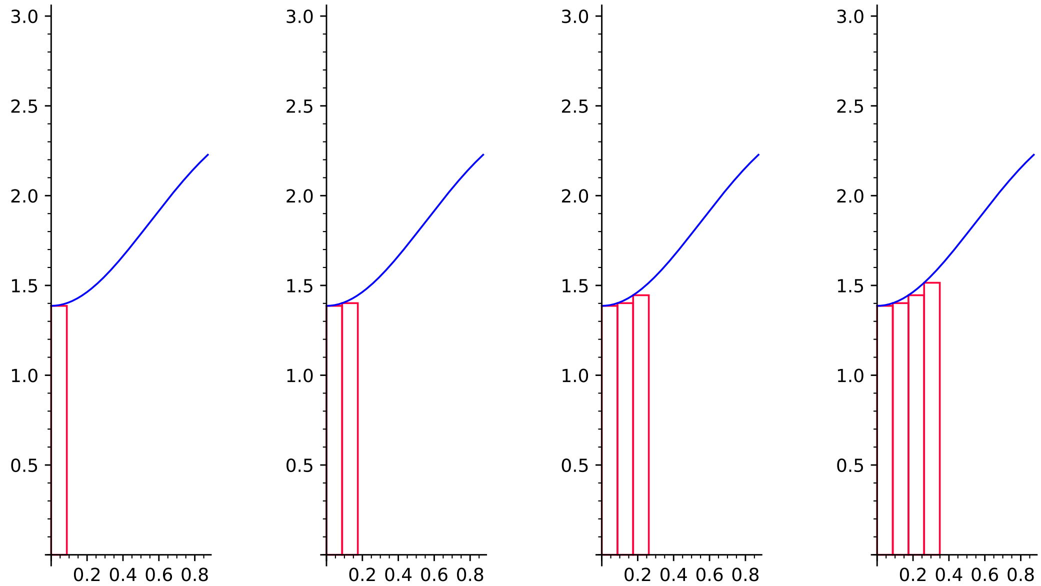


Найти площадь закрашенной фигуры методом трапеций и прямоугольников. Площадь численно равна интегралу: $\int_0^2 \log\left(\left(3\,\sin\left(x\right)^2 + 2\,\cos\left(x\right)\right)^2\right) dx$.

Метод прямоугольников

Отрезок интегрирования разбивается на равные части отрезки длины: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Данная величина называется шагом разбиения. С помощью шага разбиения можно регулировать точность вычисления интеграла. Тогда значение интеграла будет суммой площадей всех маленьких прямоугольников:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_n) \cdot \Delta x_n$$



Значение интеграла полученное методом прямоугольников с шагом разбиения $\frac{1}{36}\,\pi$.

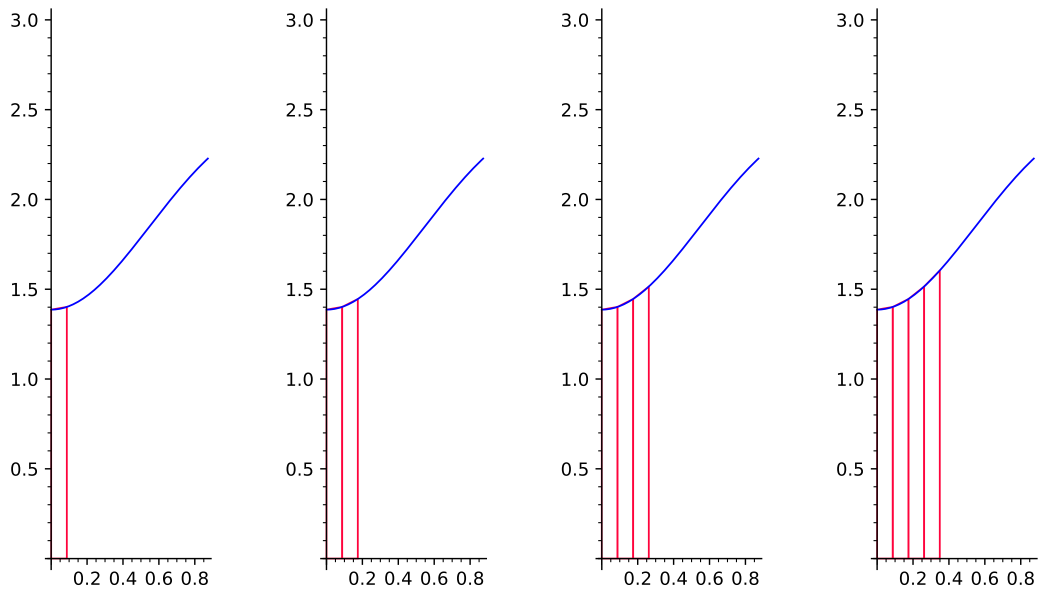
$$\sum_{i=1}^{10} f(x_n) \cdot \Delta x_n = 1.48234899835618$$

Метод трапеций

Отрезок интегрирования разбивается на равные части отрезки длины: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Численно интеграл будет равен сумме площадей прямоугольных трапеций:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_n)+f(x_n+\Delta x_n)}{2} \cdot \Delta x_n$$



Значение интеграла полученное методом трапеций с шагом разбиения $\frac{1}{36}\pi$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{f(x_n)+f(x_n+\Delta x_n)}{2} \cdot \Delta x_n = 1.51906179526295$$

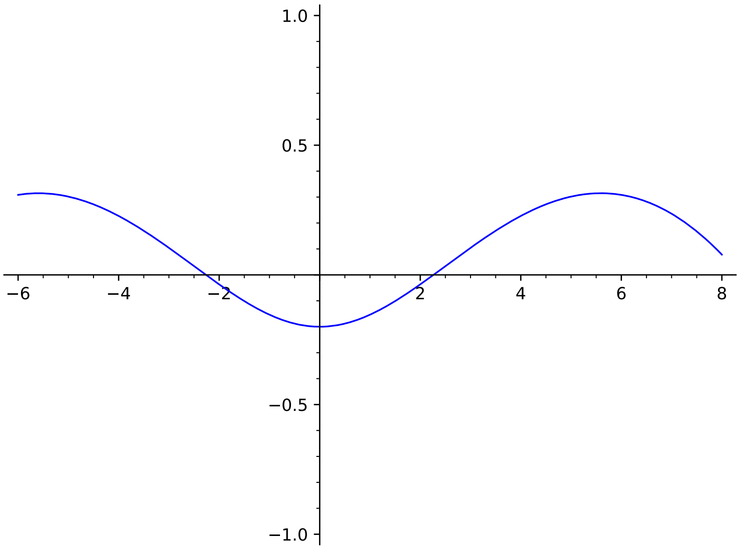
Проверка

`Метод тропеций точне`

Разница между ними 0.0367127969067645

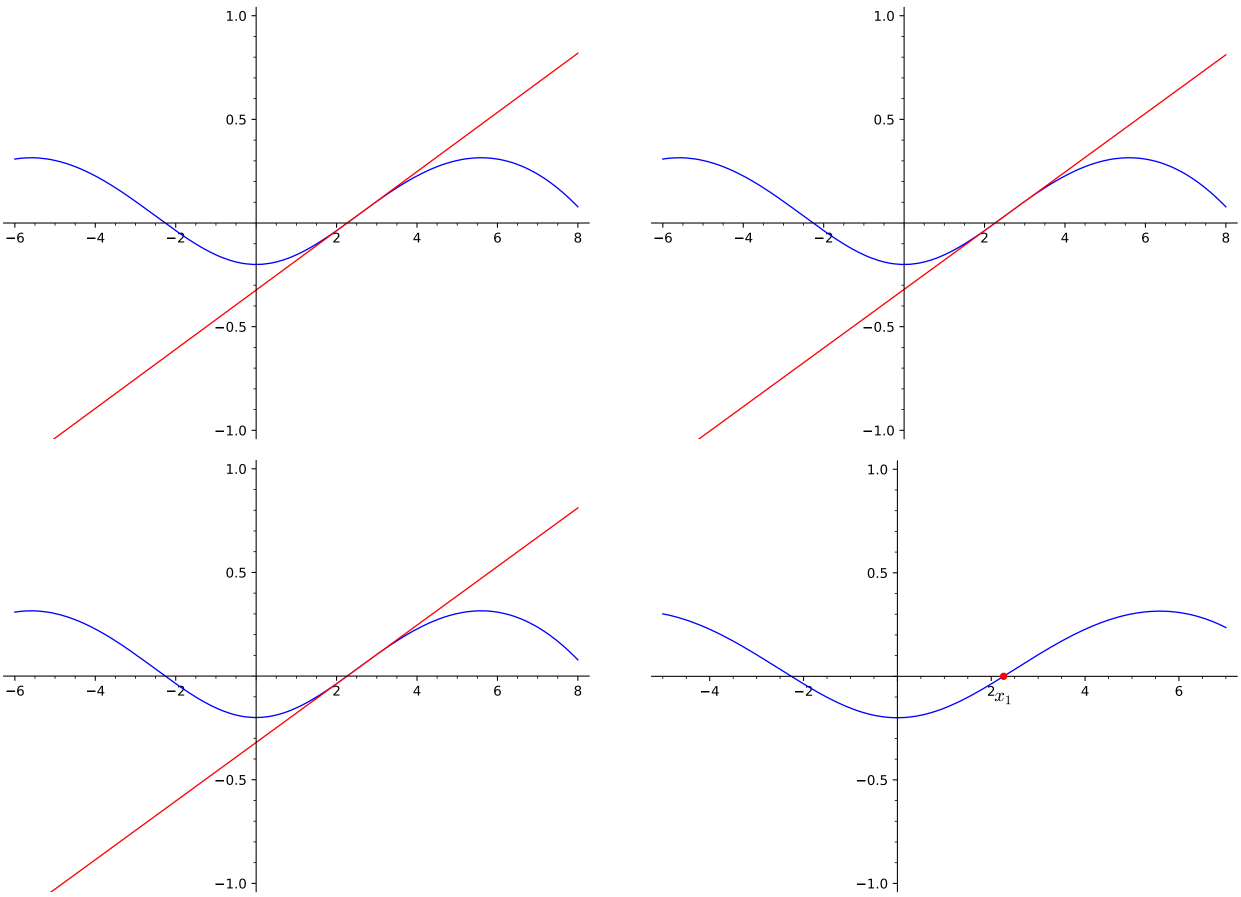
10 Численные методы — Метод касательных

Дана функция $f(x) = \sqrt{2^{\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right)} - \cos\left(\frac{1}{2}\,x\right)} - \frac{6}{5}$. Вычислить с помощью метода Ньютона корни соответствующего уравнения



Используем метод Ньютона для интервала.$[2, 3]$. Приближенно получили $x = 2.26336803901408$

Несколько итераций алгоритма:



Проверим условия сходимости метода Ньютона с помощью теоремы Канторовича.

$\frac{1}{f'(x)} < A$ (условие того, что $f'(x)$ существует и не равна 0;)

$\frac{f(x)}{f'(x)} < B$ (условие того, что $f(x)$ ограничена;)

$\exists f''(x)$ и $|f''(x)| \leqslant C \leqslant \frac{1}{2AB}$;

Проверим все вышеупомянутые условия:

$$A = \frac{1}{f'(x)} = 7.304$$
$$B = \frac{f(x)}{f'(x)} = 0.2683$$
$$C = |f''(x)| = -0.01920$$
$$C \leqslant \frac{1}{|2AB|}$$

$-0.01920 \leqslant 0.2551$ — значит метод Ньютона применим.

11 Линейный оператор и базисы

Линейный оператор А задан в каноническом базисе матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Составим характеристический многочлен и решим его методом Кардано: $x^3 - 15\,x^2 + 71\,x - 105 = 0$

Любое кубическое уравнение общего вида $ax^3+bx^2+cx+d=0$ при помощи замены переменной $x = y - \frac{b}{3a}$ может быть приведено к $y^3 + py + q = 0$,

$S = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

S $>$ 0 — один вещественный корень и два сопряжённых комплексных корня.

S $=$ 0 — один однократный вещественный корень и один двукратный, или, если p $=$ q $=$ 0, то один трёхкратный вещественный корень.

S $<$ 0 — три вещественных корня.

По формуле Кардано, корни кубического уравнения в канонической форме равны:

$x = (u+v)*cos(k*\frac{2*\pi}{3}) + i*(u-v)*sin(k*\frac{2*\pi}{3})$ где

$k = 0, 1, 2$

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}},$

$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}},$

$y^3 + py + q$

Решим данное уравнение:

$x^3 - 15\,x^2 + 71\,x - 105 = 0$

Подставим $x = x + 5$

Получим $x^3 - 4\,x = 0$

Откуда

$p = -4$

$q = 0$

$S = \frac{8}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}$

S $<$ 0 — три вещественных корня.

Корни уравнения в алгебраическом представлении:

$x_1 = 7.0$ кратность 1

$x_2 = 3.0$ кратность 1

$x_3 = 5.0$ кратность 1

Составим для каждой матрицы

$$\begin{pmatrix} -x+7 & -4 & 4 \\ 2 & -x+3 & 2 \\ 2 & 0 & -x+5 \end{pmatrix}$$

Приведем получившиеся матрицы к ступенчатому виду:

$$A_{x1} = \begin{pmatrix} 0.00 & -4.0 & 4.0 \\ 2.0 & -4.0 & 2.0 \\ 2.0 & 0.00 & -2.0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1.0 & 0.00 & -1.0 \\ 0.00 & 1.0 & -1.0 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

отсюда собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_{x2} = \begin{pmatrix} 4.0 & -4.0 & 4.0 \\ 2.0 & 0.00 & 2.0 \\ 2.0 & 0.00 & 2.0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1.0 & 0.00 & 1.0 \\ 0.00 & 1.0 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

отсюда собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A_{x2} = \begin{pmatrix} 2.0 & -4.0 & 4.0 \\ 2.0 & -2.0 & 2.0 \\ 2.0 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1.0 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.0 & -1.0 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

отсюда собственный вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Найдем найденные собственные векторы в базисе $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A' = S^{-1}AS$$

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -4 \\ -4 & 7 & -4 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Составим характеристический многочлен:

$$\begin{pmatrix} -x+7 & 8 & -4 \\ -4 & -x+7 & -4 \\ -6 & 0 & -x+1 \end{pmatrix}$$

$$A'_{x_1} = \begin{pmatrix} 0.00 & 8.0 & -4.0 \\ -4.0 & 0.00 & -4.0 \\ -6.0 & 0.00 & -6.0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1.0 & -0.00 & 1.0 \\ 0.00 & 1.0 & -0.50 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

получим вектор стобец $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A'_{x_2} = \begin{pmatrix} 4.0 & 8.0 & -4.0 \\ -4.0 & 4.0 & -4.0 \\ -6.0 & 0.00 & -2.0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1.0 & 0.00 & 0.33 \\ 0.00 & 1.0 & -0.66 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

$$\text{получим вектор стобец } \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A'_{x_2} = \begin{pmatrix} 2.0 & 8.0 & -4.0 \\ -4.0 & 2.0 & -4.0 \\ -6.0 & 0.00 & -4.0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1.0 & 0.00 & 0.69 \\ 0.00 & 1.0 & -0.67 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

$$\text{получим вектор стобец } \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Жорданова форма матрицы: Найдем максимальную длинну цепочки:

Для каждого числа x_i находим m - макс. длину жордановой цепочки : $m = 1$; Пока $rg((A - x_i * E)^m) \neq n - k_i : m + +$;

$$\text{Для } x_1 = 7.0 : 1$$
$$\text{Для } x_2 = 3.0 : 1$$
$$\text{Для } x_3 = 5.0 : 1$$

Отсюда жорданова форма матрицы A:

$$J = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу перехода от матрицы A к жорданову базису

Составим для каждой матрицы

$$\begin{pmatrix} -x+7 & -4 & 4 \\ 2 & -x+3 & 2 \\ 2 & 0 & -x+5 \end{pmatrix}$$

Приведем получившиеся матрицы к ступенчатому виду:

$$A_{x1} = \begin{pmatrix} 0.00 & -4.0 & 4.0 \\ 2.0 & -4.0 & 2.0 \\ 2.0 & 0.00 & -2.0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1.0 & 0.00 & -1.0 \\ 0.00 & 1.0 & -1.0 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

$$\text{отсюда собственный вектор } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{x2} = \begin{pmatrix} 4.0 & -4.0 & 4.0 \\ 2.0 & 0.00 & 2.0 \\ 2.0 & 0.00 & 2.0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1.0 & 0.00 & 1.0 \\ 0.00 & 1.0 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

$$\text{отсюда собственный вектор} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{x2} = \begin{pmatrix} 2.0 & -4.0 & 4.0 \\ 2.0 & -2.0 & 2.0 \\ 2.0 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1.0 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.0 & -1.0 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

$$\text{отсюда собственный вектор} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку

$S^-1 * A * S = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

`верно`

Вычислим A^{-1} и A^3 по теореме Кэли - Гамильтона.

$$A^3 - 15A^2 + 71A - 105E = O$$
$$A^3 = 15A^2 - 71A + 105E$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 343 & -316 & 316 \\ 218 & -93 & 218 \\ 218 & -120 & 245 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 15A^2 + 71A - 105E = O \mid \cdot A^{-1}$$
$$A^2 - 15A + 71E - 105A^-1 = O$$
$$A^{-1} = \frac{1}{105}(A^2 - 15A + 71E)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{21} & -\frac{4}{21} \\ -\frac{2}{35} & \frac{9}{35} & -\frac{2}{35} \\ -\frac{2}{35} & -\frac{8}{105} & \frac{29}{105} \end{pmatrix}$$

12 Список литературы

1. «Справочник по математике» Корн Г., Корн Т., 1973
2. sagemath.org
3. https://www.wolframalpha.com/input/?i=e%5Ex+%3D+x
4. http://doc.sagemath.org/html/ru/tutorial/tour.html
5. http://window.edu.ru/resource/872/25872/files/volsu456.pdf
6. «Справочник по высшей математике» А.А.Гусак, 1999г.
7. «Справочник по высшей математике» А.С.Киркинский, 2006г.
8. «Аналитическая геометрия в примерах и задачах» Бортаковский, 2005г
9. А.С.Бортаковский, Е.А. Пегачкова «Типовые задачи по аналитической геометрии» с 65
10. «Киркинский А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие.» - М: Академический Проект, 2006.