Algoritmos de Ordenamiento

¿Qué son?

Entrada: array A de tipo T, longitud n
Salida: array A' de tipo T, longitud n que cumpla:

- **Ordenado**: $\forall i, j.\ i < j \implies A[i] \leq_T A[j]$
- **Permutación**: A y A' tienen los mismos elementos (y en iguales cantidades)

La comparación $\leq_T$ es arbitraria, pero tiene que cumplir algunas propiedades sensatas:

- $a \leq_T a$
- si $a \leq_T b$ y $b \leq_T c$, entonces $a \leq_T c$

Ejemplo

$$[4, 2, 3, 1] \rightarrow [1, 2, 3, 4]$$

Ejemplo

$$[4, 2, 3, 1] \to [1, 2, 3, 4]$$

$$[1, 2, 3, 4] \to [1, 2, 3, 4]$$

Ejemplo

$$[4, 2, 3, 1] \to [1, 2, 3, 4]$$

$$[1, 2, 3, 4] \to [1, 2, 3, 4]$$

$$[1, 3, 2, 1, 4] \to [1, 1, 2, 3, 4]$$

Ejemplo

$$[4, 2, 3, 1] \to [1, 2, 3, 4]$$

$$[1, 2, 3, 4] \to [1, 2, 3, 4]$$

$$[1, 3, 2, 1, 4] \to [1, 1, 2, 3, 4]$$

- **Pregunta:** ¿cómo chequear si dos arrays son permutaciones uno del otro?

¿Para qué ordenar?

¿Para qué ordenar?

- Podemos buscar en $O(\lg n)$.
- Es parte de muchos otros algoritmos.

```
busqbin(A[N], lo, hi, v)
  if hi < lo ⇒
    return -1; // no est
  medio = (lo + hi) / 2
  if A[medio] = v ⇒
    return medio
  else if A[medio] < v ⇒
    return busqbin(A, medio+1, hi, v)
  else
    return busqbin(A, lo, medio-1, v)
```

Estilos

Hay MUCHOS algoritmos de ordenamiento, de distintos estilos.

- **Basados en comparación**: sólo podemos chequear con $\leq_T$

Estilos

Hay MUCHOS algoritmos de ordenamiento, de distintos estilos.

- **Basados en comparación**: sólo podemos chequear con $\leq_T$
- **Especializados al tipo** (e.g. enteros)

Ordenamiento por Comparación

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta “inversiones” adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta “inversiones” adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

[**4**,**2**,3,1]

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

[**4**,**2**,3,1] $\rightarrow$ [2,**4**,**3**,1]

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

[**4**,**2**,3,1] $\rightarrow$ [2,**4**,**3**,1] $\rightarrow$ [2,3,**4**,**1**]

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta “inversiones” adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

[**4**,**2**,3,1] → [2,**4**,**3**,1] → [2,3,**4**,**1**] ⇒ [**2**,**3**,1,4]

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

[**4**,**2**,3,1] → [2,**4**,**3**,1] → [2,3,**4**,**1**]
⇒ [**2**,**3**,1,4] → [2,**3**,**1**,4]

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

[**4,2**,3,1] → [2,**4,3**,1] → [2,3,**4,1**]
⇒ [**2,3**,1,4] → [2,**3,1**,4] → [2,1,**3,4**]

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{lllllll}
 & [\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] & \rightarrow & [2,\mathbf{4},\mathbf{3},1] & \rightarrow & [2,3,\mathbf{4},\mathbf{1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{3},1,4] & \rightarrow & [2,\mathbf{3},\mathbf{1},4] & \rightarrow & [2,1,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{1},3,4] & & & &
\end{array}
$$

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta “inversiones” adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

[**4,2**,3,1] → [2,**4,3**,1] → [2,3,**4,1**]
⇒ [**2,3**,1,4] → [2,**3,1**,4] → [2,1,**3,4**]
⇒ [**2,1**,3,4] → [1,**2,3**,4]

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & [\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] & \to & [2,\mathbf{4},\mathbf{3},1] & \to & [2,3,\mathbf{4},\mathbf{1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{3},1,4] & \to & [2,\mathbf{3},\mathbf{1},4] & \to & [2,1,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{1},3,4] & \to & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \to & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}]
\end{array}
$$

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta “inversiones” adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{lccccc}
 & [\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] & \rightarrow & [2,\mathbf{4},\mathbf{3},1] & \rightarrow & [2,3,\mathbf{4},\mathbf{1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{3},1,4] & \rightarrow & [2,\mathbf{3},\mathbf{1},4] & \rightarrow & [2,1,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{1},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{1},\mathbf{2},3,4] & & & &
\end{array}
$$

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & [\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] & \to & [2,\mathbf{4},\mathbf{3},1] & \to & [2,3,\mathbf{4},\mathbf{1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{3},1,4] & \to & [2,\mathbf{3},\mathbf{1},4] & \to & [2,1,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{1},3,4] & \to & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \to & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{1},\mathbf{2},3,4] & \to & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & &
\end{array}
$$

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta “inversiones” adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

	[**4,2**,3,1]	$\rightarrow$	[2,**4,3**,1]	$\rightarrow$	[2,3,**4,1**]	
$\Rightarrow$	[**2,3**,1,4]	$\rightarrow$	[2,**3,1**,4]	$\rightarrow$	[2,1,**3,4**]	
$\Rightarrow$	[**2,1**,3,4]	$\rightarrow$	[1,**2,3**,4]	$\rightarrow$	[1,2,**3,4**]	
$\Rightarrow$	[**1,2**,3,4]	$\rightarrow$	[1,**2,3**,4]	$\rightarrow$	[1,2,**3,4**]	

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{lccccc}
 & [\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] & \rightarrow & [2,\mathbf{4},\mathbf{3},1] & \rightarrow & [2,3,\mathbf{4},\mathbf{1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{3},1,4] & \rightarrow & [2,\mathbf{3},\mathbf{1},4] & \rightarrow & [2,1,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{1},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{1},\mathbf{2},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}]
\end{array}
$$

- Primera pasada: el máximo queda al final.

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & [\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] & \rightarrow & [2,\mathbf{4},\mathbf{3},1] & \rightarrow & [2,3,\mathbf{4},\mathbf{1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{3},1,4] & \rightarrow & [2,\mathbf{3},\mathbf{1},4] & \rightarrow & [2,1,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{1},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{1},\mathbf{2},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}]
\end{array}
$$

- Primera pasada: el máximo queda al final.
- Máximo de pasadas:

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{lccccc}
 & [\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] & \rightarrow & [2,\mathbf{4},\mathbf{3},1] & \rightarrow & [2,3,\mathbf{4},\mathbf{1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{3},1,4] & \rightarrow & [2,\mathbf{3},\mathbf{1},4] & \rightarrow & [2,1,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{1},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{1},\mathbf{2},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}]
\end{array}
$$

- Primera pasada: el máximo queda al final.
- Máximo de pasadas: n

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{cccccc}
 & [\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] & \to & [2,\mathbf{4},\mathbf{3},1] & \to & [2,3,\mathbf{4},\mathbf{1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{3},1,4] & \to & [2,\mathbf{3},\mathbf{1},4] & \to & [2,1,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{1},3,4] & \to & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \to & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{1},\mathbf{2},3,4] & \to & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \to & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}]
\end{array}
$$

- Primera pasada: el máximo queda al final.
- Máximo de pasadas: n
- Tiempo de ejecución:

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta “inversiones” adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{lccccc}
 & [\mathbf{4,2},3,1] & \rightarrow & [2,\mathbf{4,3},1] & \rightarrow & [2,3,\mathbf{4,1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2,3},1,4] & \rightarrow & [2,\mathbf{3,1},4] & \rightarrow & [2,1,\mathbf{3,4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2,1},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2,3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3,4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{1,2},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2,3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3,4}]
\end{array}
$$

- Primera pasada: el máximo queda al final.
- Máximo de pasadas: n
- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta “inversiones” adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{lccccc}
 & [\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] & \rightarrow & [2,\mathbf{4},\mathbf{3},1] & \rightarrow & [2,3,\mathbf{4},\mathbf{1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{3},1,4] & \rightarrow & [2,\mathbf{3},\mathbf{1},4] & \rightarrow & [2,1,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{1},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{1},\mathbf{2},3,4] & \rightarrow & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \rightarrow & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}]
\end{array}
$$

- Primera pasada: el máximo queda al final.
- Máximo de pasadas: n
- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$
- Memoria:

Burbuja / Bubble Sort

- Muy malo... pero sirve para empezar a charlar
- Idea: recorremos todo el arreglo dando vuelta "inversiones" adyacentes
- Si en una vuelta no hicimos nada, terminamos (ya está ordenado)

```
bubble(A[N])
  hiceAlgo = true
  while hiceAlgo ⇒ (
    hiceAlgo = false
    for i in 0..N-2 ⇒
      if A[i] > A[i+1] ⇒
        A[i] ↔ A[i+1]
        hiceAlgo = true
  )
```

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & [\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] & \to & [2,\mathbf{4},\mathbf{3},1] & \to & [2,3,\mathbf{4},\mathbf{1}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{3},1,4] & \to & [2,\mathbf{3},\mathbf{1},4] & \to & [2,1,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{2},\mathbf{1},3,4] & \to & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \to & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}] \\
\Rightarrow & [\mathbf{1},\mathbf{2},3,4] & \to & [1,\mathbf{2},\mathbf{3},4] & \to & [1,2,\mathbf{3},\mathbf{4}]
\end{array}
$$

- Primera pasada: el máximo queda al final.
- Máximo de pasadas: n
- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$
- Memoria: $O(1)$

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
insercion(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
inserción(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

(ordenado)	$a[i]$	...

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
insercion(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
inserción(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N-1$ veces

```
insercion(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

[**4**,2,3,1]

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
insercion(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

$[\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] \quad \rightarrow \quad [\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{3},1]$

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N-1$ veces

```
insercion(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

$[\mathbf{4},2,3,1] \quad \to \quad [\mathbf{2},\mathbf{4},3,1] \quad \to \quad [\mathbf{2},3,\mathbf{4},1]$

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
inserción(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

[**4**,**2**,3,1] $\rightarrow$ [**2**,**4**,**3**,1] $\rightarrow$ [**2**,**3**,**4**,1] $\rightarrow$ [**2**,**3**,**4**,**1**]

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
inserción(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

$[\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{3},1] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},1]$
$\rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{4}]$

(ordenado)	$a[i]$	…

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	…

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	…

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
insercion(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

$[\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] \to [\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{3},1] \to [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},1]$
$\to [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{1}] \to [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{4}] \to [\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{4}]$

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
inserción(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

$[4,\mathbf{2},3,1] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{3},1] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},1]$
$\rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{4}] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{4}]$
$\rightarrow [\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}]$

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
insercion(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

[**4**,**2**,3,1] $\to$ [**2**,**4**,**3**,1] $\to$ [**2**,**3**,**4**,1]
$\to$ [**2**,**3**,**4**,**1**] $\to$ [**2**,**3**,**1**,**4**] $\to$ [**2**,**1**,**3**,**4**]
$\to$ [**1**,**2**,**3**,**4**]

- Tiempo de ejecución:

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
insercion(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

[**4**,**2**,3,1] $\to$ [**2**,**4**,**3**,1] $\to$ [**2**,**3**,**4**,1]
$\to$ [**2**,**3**,**4**,**1**] $\to$ [**2**,**3**,**1**,**4**] $\to$ [**2**,**1**,**3**,**4**]
$\to$ [**1**,**2**,**3**,**4**]

- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N-1$ veces

```
insercion(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

$[\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] \to [\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{3},1] \to [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},1]$
$\to [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{1}] \to [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{4}] \to [\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{4}]$
$\to [\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}]$

- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$
- Memoria:

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
inserción(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

$[4,\mathbf{2},3,1] \to [\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{3},1] \to [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},1]$
$\to [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{1}] \to [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{4}] \to [\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{4}]$
$\to [\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}]$

- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$
- Memoria: $O(1)$

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N-1$ veces

```
inserción(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

[**4**,**2**,3,1] → [**2**,**4**,**3**,1] → [**2**,**3**,**4**,1]
→ [**2**,**3**,**4**,**1**] → [**2**,**3**,**1**,**4**] → [**2**,**1**,**3**,**4**]
→ [**1**,**2**,**3**,**4**]

- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$
- Memoria: $O(1)$
- **Ejercicio:** Optimizar para evitar los swaps.

Inserción / Insertion Sort

- Razonable para arreglos pequeños ($N \leq 50$).
- Idea: vamos llevando un prefijo ordenado, y agregando elementos de a uno
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
insercion(A[N])
  for i in 1..N-1 ⇒
    for j in i-1..0 ⇒
      if A[j] > A[j+1] ⇒
        A[j] ↔ A[j+1]
      else ⇒ break;
```

(ordenado)	$a[i]$	...

$=$

$\leq a[i]$	$> a[i]$	$a[i]$	...

$\rightsquigarrow$

$\leq a[i]$	$a[i]$	$> a[i]$	...

$[\mathbf{4},\mathbf{2},3,1] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{3},1] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},1]$
$\rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{4}] \rightarrow [\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{4}]$
$\rightarrow [\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}]$

- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$
- Memoria: $O(1)$
- **Ejercicio:** Optimizar para evitar los swaps. En vez de eso, mover todo el subarray ($> a[i]$). Medir diferencia.

Selección / Selection Sort

- Razonable para arreglos pequeños... pero suele ser peor que Inserción
- Idea: buscamos el mínimo y lo ponemos al principio
- Hacemos eso $N - 1$ veces

Selección / Selection Sort

- Razonable para arreglos pequeños... pero suele ser peor que Inserción
- Idea: buscamos el mínimo y lo ponemos al principio
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
seleccion(A[N])
  for i in 0..N-2 ⇒
    minPos = i
    for j in i+1..N-1 ⇒
      if A[j] < A[minPos] ⇒ minPos = j
    A[i] ↔ A[minPos]
```

Selección / Selection Sort

- Razonable para arreglos pequeños... pero suele ser peor que Inserción
- Idea: buscamos el mínimo y lo ponemos al principio
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
seleccion(A[N])
  for i in 0..N-2 ⇒
    minPos = i
    for j in i+1..N-1 ⇒
      if A[j] < A[minPos] ⇒ minPos = j
    A[i] ↔ A[minPos]
```

Selección / Selection Sort

- Razonable para arreglos pequeños... pero suele ser peor que Inserción
- Idea: buscamos el mínimo y lo ponemos al principio
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
seleccion(A[N])
  for i in 0..N-2 ⇒
    minPos = i
    for j in i+1..N-1 ⇒
      if A[j] < A[minPos] ⇒ minPos = j
    A[i] ↔ A[minPos]
```

[4,2,1,3]
→ [**1**,2,4,3]
→ [**1**,**2**,4,3]
→ [**1**,**2**,**3**,4]

Selección / Selection Sort

- Razonable para arreglos pequeños... pero suele ser peor que Inserción
- Idea: buscamos el mínimo y lo ponemos al principio
- Hacemos eso $N-1$ veces

```
seleccion(A[N])
  for i in 0..N-2 ⇒
    minPos = i
    for j in i+1..N-1 ⇒
      if A[j] < A[minPos] ⇒ minPos = j
    A[i] ↔ A[minPos]
```

$[4,2,1,3]$
$\rightarrow$ $[\mathbf{1},2,4,3]$
$\rightarrow$ $[\mathbf{1},\mathbf{2},4,3]$
$\rightarrow$ $[\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},4]$

- Tiempo de ejecución:

Selección / Selection Sort

- Razonable para arreglos pequeños... pero suele ser peor que Inserción
- Idea: buscamos el mínimo y lo ponemos al principio
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
seleccion(A[N])
  for i in 0..N-2 ⇒
    minPos = i
    for j in i+1..N-1 ⇒
      if A[j] < A[minPos] ⇒ minPos = j
    A[i] ↔ A[minPos]
```

[4,2,1,3]
→ [**1**,2,4,3]
→ [**1**,**2**,4,3]
→ [**1**,**2**,**3**,4]

- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$

Selección / Selection Sort

- Razonable para arreglos pequeños... pero suele ser peor que Inserción
- Idea: buscamos el mínimo y lo ponemos al principio
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
seleccion(A[N])
  for i in 0..N-2 ⇒
    minPos = i
    for j in i+1..N-1 ⇒
      if A[j] < A[minPos] ⇒ minPos = j
    A[i] ↔ A[minPos]
```

[4,2,1,3]
→ [**1**,2,4,3]
→ [**1**,**2**,4,3]
→ [**1**,**2**,**3**,4]

- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$
- Memoria:

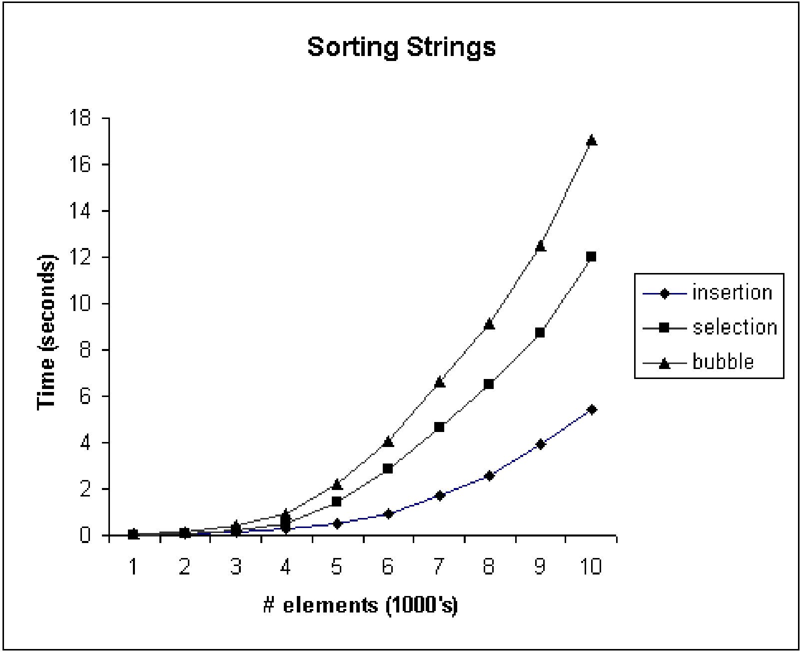
Selección / Selection Sort

- Razonable para arreglos pequeños... pero suele ser peor que Inserción
- Idea: buscamos el mínimo y lo ponemos al principio
- Hacemos eso $N - 1$ veces

```
seleccion(A[N])
  for i in 0..N-2 ⇒
    minPos = i
    for j in i+1..N-1 ⇒
      if A[j] < A[minPos] ⇒ minPos = j
    A[i] ↔ A[minPos]
```

[4,2,1,3]
→ [**1**,2,4,3]
→ [**1**,**2**,4,3]
→ [**1**,**2**,**3**,4]

- Tiempo de ejecución: $O(n^2)$
- Memoria: $O(1)$


Sorting Strings
Time (seconds)
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
elements (1000's)
insertion
selection
bubble

Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$

Por mezcla / Mergesort

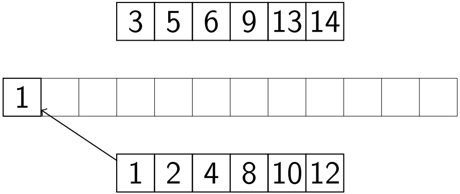
- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$

3	5	6	9	13	14

1	2	4	8	10	12

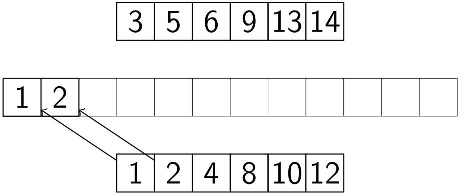
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



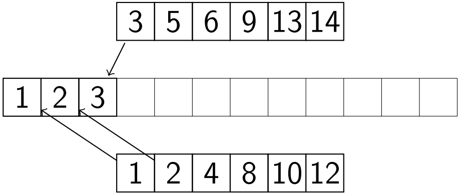
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



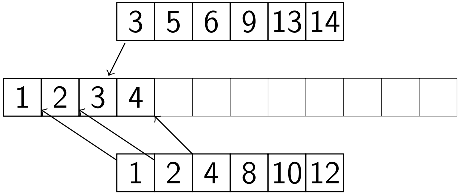
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



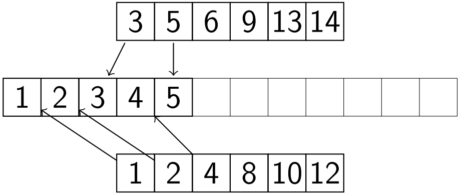
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



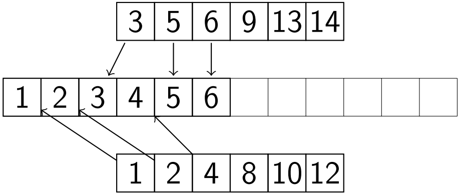
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



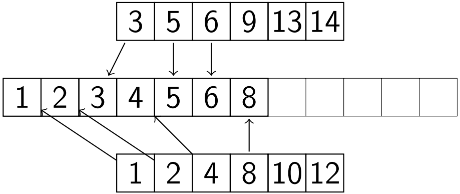
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



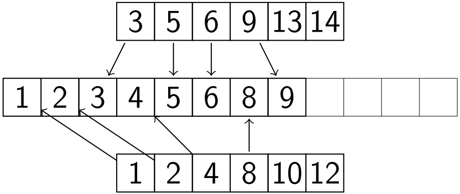
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



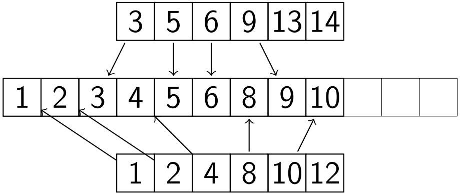
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



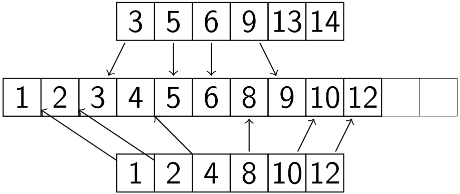
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



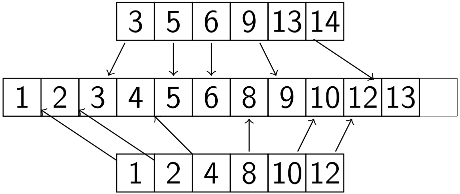
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



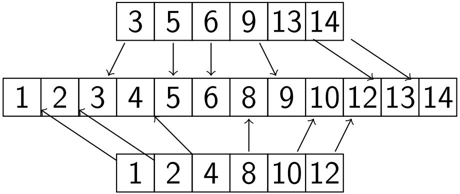
Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$



Por mezcla / Mergesort

- Hasta ahora vimos 3 algoritmos cuadráticos. Cambiemos de enfoque.
- Idea 1: si tengo dos arrays ordenados, se pueden combinar en $O(n)$

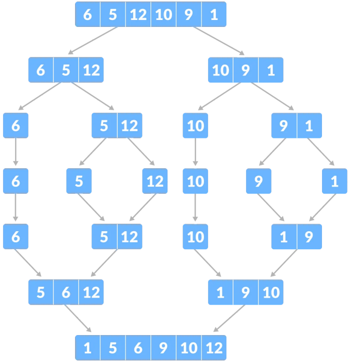


Por mezcla / Mergesort

- Idea 2: Parto mi arreglo en N subarreglos de 1 elemento.
- Todos están ordenados, así que puedo mezclarlos y llegar a uno con todos los elementos

Por mezcla / Mergesort

- Idea 2: Parto mi arreglo en N subarreglos de 1 elemento.
- Todos están ordenados, así que puedo mezclarlos y llegar a uno con todos los elementos



Por mezcla / Mergesort

```
mergesort(A[N]) // Devuelve un array nuevo
  if N < 2 ⇒
    return A
  else ⇒
    m = N/2
    A1 = A[0..m-1]
    A2 = A[m..N-1]
    B1 = mergesort(A1)
    B2 = mergesort(A2)
    return mezclar(B1, B2)
```

Por mezcla / Mergesort

```
mergesort(A[N]) // Devuelve un array nuevo
  if N < 2 ⇒
    return A
  else ⇒
    m = N/2
    A1 = A[0..m-1]
    A2 = A[m..N-1]
    B1 = mergesort(A1)
    B2 = mergesort(A2)
    return mezclar(B1, B2)
```

- **Pregunta:** si en vez de partir al medio, partimos en $N-1$ y 1 ¿cómo queda el algoritmo?

Eficiencia de Mergesort

Sea $W(n)$ el costo en tiempo de mergesort para un array de tamaño n.

Advertencia: prueba muy informal.

Eficiencia de Mergesort

Sea $W(n)$ el costo en tiempo de mergesort para un array de tamaño n.

Advertencia: prueba muy informal.

$$W(n) = 2W(n/2) + O(n)$$

Eficiencia de Mergesort

Sea $W(n)$ el costo en tiempo de mergesort para un array de tamaño n.

Advertencia: prueba muy informal.

$$W(n) = 2W(n/2) + O(n)$$

$$\begin{aligned} & W(n) \\ = \ & 2W(n/2) + O(n) \end{aligned}$$

Eficiencia de Mergesort

Sea $W(n)$ el costo en tiempo de mergesort para un array de tamaño n.

Advertencia: prueba muy informal.

$$W(n) = 2W(n/2) + O(n)$$

$$\begin{aligned} & W(n) \\ = \; & 2W(n/2) + O(n) \\ = \; & 2\left[2W(n/4) + O(n/2)\right] + O(n) \end{aligned}$$

Eficiencia de Mergesort

Sea $W(n)$ el costo en tiempo de mergesort para un array de tamaño n.

Advertencia: prueba muy informal.

$$W(n) = 2W(n/2) + O(n)$$

$$\begin{aligned} & W(n) \\ = \; & 2W(n/2) + O(n) \\ = \; & 2\left[2W(n/4) + O(n/2)\right] + O(n) \\ = \; & 4W(n/4) + O(n) + O(n) \end{aligned}$$

Eficiencia de Mergesort

Sea $W(n)$ el costo en tiempo de mergesort para un array de tamaño n.

Advertencia: prueba muy informal.

$$W(n) = 2W(n/2) + O(n)$$

$$\begin{aligned}
& W(n) \\
= \; & 2W(n/2) + O(n) \\
= \; & 2\,[2W(n/4) + O(n/2)] + O(n) \\
= \; & 4W(n/4) + O(n) + O(n) \\
= \; & 8W(n/8) + O(n) + O(n) + O(n) \\
= \; & \ldots
\end{aligned}$$

Eficiencia de Mergesort

Sea $W(n)$ el costo en tiempo de mergesort para un array de tamaño n.

Advertencia: prueba muy informal.

$$W(n) = 2W(n/2) + O(n)$$

$$\begin{array}{rl} & W(n) \\ = & 2W(n/2) + O(n) \\ = & 2\left[2W(n/4) + O(n/2)\right] + O(n) \\ = & 4W(n/4) + O(n) + O(n) \\ = & 8W(n/8) + O(n) + O(n) + O(n) \\ = & \ldots \\ = & nW(1) + \lg_2 n * O(n) \end{array}$$

Eficiencia de Mergesort

Sea $W(n)$ el costo en tiempo de mergesort para un array de tamaño n.

Advertencia: prueba muy informal.

$$W(n) = 2W(n/2) + O(n)$$

$$\begin{aligned}
& W(n) \\
= \; & 2W(n/2) + O(n) \\
= \; & 2\left[2W(n/4) + O(n/2)\right] + O(n) \\
= \; & 4W(n/4) + O(n) + O(n) \\
= \; & 8W(n/8) + O(n) + O(n) + O(n) \\
= \; & \ldots \\
= \; & nW(1) + \lg_2 n * O(n)
\end{aligned}$$

$$W(n) = O(n \lg n)$$

- Asintóticamente mejor que los anteriores.

Eficiencia de Mergesort

Sea $W(n)$ el costo en tiempo de mergesort para un array de tamaño n.

Advertencia: prueba muy informal.

$$W(n) = 2W(n/2) + O(n)$$

$$\begin{aligned}
& W(n) \\
= \;& 2W(n/2) + O(n) \\
= \;& 2\left[2W(n/4) + O(n/2)\right] + O(n) \\
= \;& 4W(n/4) + O(n) + O(n) \\
= \;& 8W(n/8) + O(n) + O(n) + O(n) \\
= \;& \ldots \\
= \;& nW(1) + \lg_2 n * O(n)
\end{aligned}$$

$$W(n) = O(n \lg n)$$

- Asintóticamente mejor que los anteriores.
- Uso de memoria:

Eficiencia de Mergesort

Sea $W(n)$ el costo en tiempo de mergesort para un array de tamaño n.

Advertencia: prueba muy informal.

$$W(n) = 2W(n/2) + O(n)$$

$$\begin{aligned} & W(n) \\ = \; & 2W(n/2) + O(n) \\ = \; & 2\,[2W(n/4) + O(n/2)] + O(n) \\ = \; & 4W(n/4) + O(n) + O(n) \\ = \; & 8W(n/8) + O(n) + O(n) + O(n) \\ = \; & \ldots \\ = \; & nW(1) + \lg_2 n * O(n) \end{aligned}$$

$$W(n) = O(n \lg n)$$

- Asintóticamente mejor que los anteriores.
- Uso de memoria: $O(n)$.

Quicksort

- Idea: elijo un "pivote" p y separo el array en los $\leq p$ y $> p$.

Quicksort

- Idea: elijo un "pivote" p y separo el array en los $\leq p$ y $> p$.
- Ordeno recursivamente las dos mitades

7	2	1	9	3	8	5

Quicksort

- Idea: elijo un "pivote" p y separo el array en los $\leq p$ y $> p$.
- Ordeno recursivamente las dos mitades

7	2	1	9	3	8	5

7	2	1	5	3	8	9

Quicksort

- Idea: elijo un "pivote" p y separo el array en los $\leq p$ y $> p$.
- Ordeno recursivamente las dos mitades

7	2	1	9	3	8	5

7	2	1	5	3	8	9

Quicksort

- Idea: elijo un "pivote" p y separo el array en los $\leq p$ y $> p$.
- Ordeno recursivamente las dos mitades

7	2	1	9	3	8	5

7	2	1	5	3	8	9

1	2	3	5	**7**	8	9

Particionar

- Hay varias formas...

Particionar

- Hay varias formas...
- Llevamos una parte $\leq p$ y otra $> p$.

$\leq p$	$> p$	$a[i]$	...

Particionar

- Hay varias formas...
- Llevamos una parte $\leq p$ y otra $> p$.

$\leq p$	$> p$	$a[i]$	...

$a[i] > p$?

$\leq p$	$> p, a[i]$	...

Particionar

- Hay varias formas...
- Llevamos una parte $\leq p$ y otra $> p$.

$\leq p$	$> p$	$a[i]$	...

$a[i] > p$?

$\leq p$	$> p, a[i]$	...

$a[i] \leq p$?

$\leq p, a[i]$	$> p$	...

Quicksort

```
qsort(A[N])
  if N < 2 ⇒ return // no hacer nada
  p = A[N-1] // ultimo elem
  // pos marca donde empieza la frontera
  pos = particionar(A[0..N-2], p)
  A[N-1] ↔ A[pos]
  qsort(A[0..pos-1]) // parte izq
  qsort(A[pos+1..N-1]) // parte der

// Particion de Lomuto
// Devuelve cant de elementos ≤p
particionar(A[N], p)
  j = 0
  for i in 0..N-1 ⇒
    if A[i] ≤ p
      A[i] ↔ A[j]
      j++
  return j
```

Quicksort

```
qsort(A[N])
  if N < 2 ⇒ return // no hacer nada
  p = A[N-1] // ultimo elem
  // pos marca donde empieza la frontera
  pos = particionar(A[0..N-2], p)
  A[N-1] ↔ A[pos]
  qsort(A[0..pos-1]) // parte izq
  qsort(A[pos+1..N-1]) // parte der

// Particion de Lomuto
// Devuelve cant de elementos ≤p
particionar(A[N], p)
  j = 0
  for i in 0..N-1 ⇒
    if A[i] ≤ p
      A[i] ↔ A[j]
      j++
  return j
```

- Tiempo de ejecución:

Quicksort

```
qsort(A[N])
  if N < 2 ⇒ return // no hacer nada
  p = A[N-1] // ultimo elem
  // pos marca donde empieza la frontera
  pos = particionar(A[0..N-2], p)
  A[N-1] ↔ A[pos]
  qsort(A[0..pos-1]) // parte izq
  qsort(A[pos+1..N-1]) // parte der

// Particion de Lomuto
// Devuelve cant de elementos ≤p
particionar(A[N], p)
  j = 0
  for i in 0..N-1 ⇒
    if A[i] ≤ p
      A[i] ↔ A[j]
      j++
  return j
```

- Tiempo de ejecución: depende **mucho** de la elección del pivote. Peor caso: $O(n^2)$ **(cuando el arreglo ya estaba ordenado!)**.

Quicksort

```
qsort(A[N])
  if N < 2 ⇒ return // no hacer nada
  p = A[N-1] // ultimo elem
  // pos marca donde empieza la frontera
  pos = particionar(A[0..N-2], p)
  A[N-1] ↔ A[pos]
  qsort(A[0..pos-1]) // parte izq
  qsort(A[pos+1..N-1]) // parte der

// Particion de Lomuto
// Devuelve cant de elementos ≤p
particionar(A[N], p)
  j = 0
  for i in 0..N-1 ⇒
    if A[i] ≤ p
      A[i] ↔ A[j]
      j++
  return j
```

- Tiempo de ejecución: depende **mucho** de la elección del pivote. Peor caso: $O(n^2)$ **(cuando el arreglo ya estaba ordenado!)**.
- Si el pivote corta "cerca" del medio: $O(n \lg n)$

Quicksort

```
qsort(A[N])
  if N < 2 ⇒ return // no hacer nada
  p = A[N-1] // ultimo elem
  // pos marca donde empieza la frontera
  pos = particionar(A[0..N-2], p)
  A[N-1] ↔ A[pos]
  qsort(A[0..pos-1]) // parte izq
  qsort(A[pos+1..N-1]) // parte der

// Particion de Lomuto
// Devuelve cant de elementos ≤p
particionar(A[N], p)
  j = 0
  for i in 0..N-1 ⇒
    if A[i] ≤ p
      A[i] ↔ A[j]
      j++
  return j
```

- Tiempo de ejecución: depende **mucho** de la elección del pivote. Peor caso: $O(n^2)$ **(cuando el arreglo ya estaba ordenado!)**.
- Si el pivote corta "cerca" del medio: $O(n \lg n)$
- Memoria:

Quicksort

```
qsort(A[N])
  if N < 2 ⇒ return // no hacer nada
  p = A[N-1] // ultimo elem
  // pos marca donde empieza la frontera
  pos = particionar(A[0..N-2], p)
  A[N-1] ↔ A[pos]
  qsort(A[0..pos-1]) // parte izq
  qsort(A[pos+1..N-1]) // parte der

// Particion de Lomuto
// Devuelve cant de elementos ≤p
particionar(A[N], p)
  j = 0
  for i in 0..N-1 ⇒
    if A[i] ≤ p
      A[i] ↔ A[j]
      j++
  return j
```

- Tiempo de ejecución: depende **mucho** de la elección del pivote. Peor caso: $O(n^2)$ **(cuando el arreglo ya estaba ordenado!)**.
- Si el pivote corta "cerca" del medio: $O(n \lg n)$
- Memoria: $O(\lg n)$ de las llamadas recursivas.. pero nada más. No copia el array.

Detalles de Quicksort

- La elección del pivote es importante. Una solución es tomarlo al azar.
- Hay que tener cuidado con los repetidos: también pueden causar costo cuadrático.

Detalles de Quicksort

- La elección del pivote es importante. Una solución es tomarlo al azar.
- Hay que tener cuidado con los repetidos: también pueden causar costo cuadrático.
- Mejor forma de particionar: esquema de Hoare.

Detalles de Quicksort

- La elección del pivote es importante. Una solución es tomarlo al azar.
- Hay que tener cuidado con los repetidos: también pueden causar costo cuadrático.
- Mejor forma de particionar: esquema de Hoare.
- Así y todo... es de lo más eficiente que hay

¿Podemos mejorar?

Cota óptima

- ¿Será óptima la cota de $O(n \lg n)$?

Cota óptima

- ¿Será óptima la cota de $O(n \lg n)$?
- Podemos modelar **cualquier** algoritmo como un árbol de decisión. El algoritmo tiene que encontrar en cual "permutación" está.

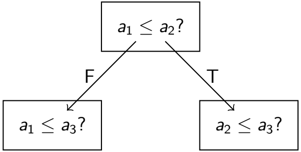
Cota óptima

- ¿Será óptima la cota de $O(n \lg n)$?
- Podemos modelar **cualquier** algoritmo como un árbol de decisión. El algoritmo tiene que encontrar en cual “permutación” está.

$$\boxed{a_1 \leq a_2?}$$

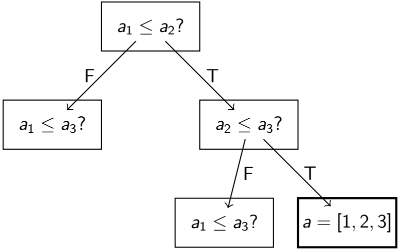
Cota óptima

- ¿Será óptima la cota de $O(n \lg n)$?
- Podemos modelar **cualquier** algoritmo como un árbol de decisión. El algoritmo tiene que encontrar en cual "permutación" está.



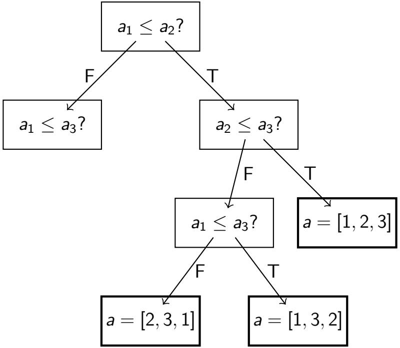
Cota óptima

- ¿Será óptima la cota de $O(n \lg n)$?
- Podemos modelar **cualquier** algoritmo como un árbol de decisión. El algoritmo tiene que encontrar en cual "permutación" está.



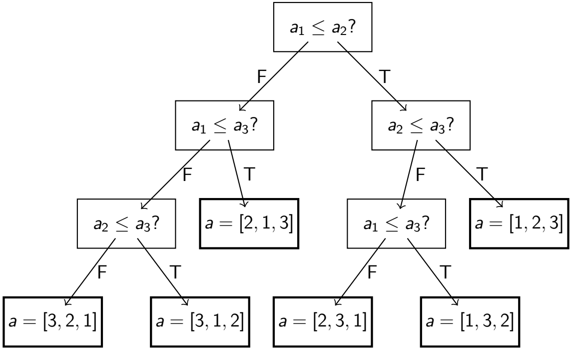
Cota óptima

- ¿Será óptima la cota de $O(n \lg n)$?
- Podemos modelar **cualquier** algoritmo como un árbol de decisión. El algoritmo tiene que encontrar en cual "permutación" está.



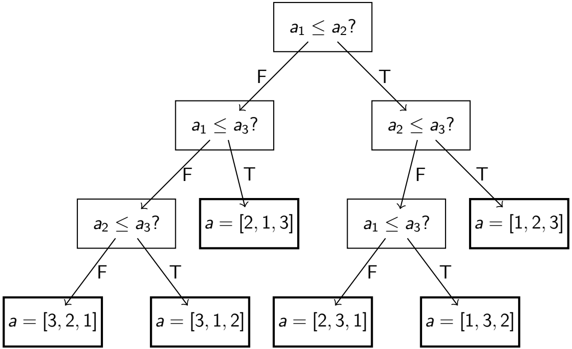
Cota óptima

- ¿Será óptima la cota de $O(n \lg n)$?
- Podemos modelar **cualquier** algoritmo como un árbol de decisión. El algoritmo tiene que encontrar en cual "permutación" está.



Cota óptima

- ¿Será óptima la cota de $O(n \lg n)$?
- Podemos modelar **cualquier** algoritmo como un árbol de decisión. El algoritmo tiene que encontrar en cual "permutación" está.



- Mejores casos = Caminos cortos. Peores casos = Caminos largos.

Cota óptima

- Si el camino más largo es de h pasos, como mucho tenemos 2^h nodos.

Cota óptima

- Si el camino más largo es de h pasos, como mucho tenemos 2^h nodos.
- Pero tenemos que distinguir $n!$ posibilidades distintas (todas las permutaciones).

Cota óptima

- Si el camino más largo es de h pasos, como mucho tenemos 2^h nodos.
- Pero tenemos que distinguir $n!$ posibilidades distintas (todas las permutaciones).

$$2^h \geq n!$$

Cota óptima

- Si el camino más largo es de h pasos, como mucho tenemos 2^h nodos.
- Pero tenemos que distinguir $n!$ posibilidades distintas (todas las permutaciones).

$$2^h \geq n! \implies h \geq \ln(n!)$$

Cota óptima

- Si el camino más largo es de h pasos, como mucho tenemos 2^h nodos.
- Pero tenemos que distinguir $n!$ posibilidades distintas (todas las permutaciones).

$$2^h \geq n! \implies h \geq \ln(n!) \implies h \geq n \ln n - n$$

(Resulta que $\ln(n!) \approx n \ln n$; ver Aproximación de Stirling)

- Entonces, h (peor caso) es al menos $O(n \ln n)$.

Para profundizar

Otras propiedades que puede tener un algoritmo de ordenamiento:

- *Adaptativo*: aprovecha orden de la entrada.

Para profundizar

Otras propiedades que puede tener un algoritmo de ordenamiento:

- *Adaptativo*: aprovecha orden de la entrada. Ej: inserción (mejor caso $O(n)$).

Para profundizar

Otras propiedades que puede tener un algoritmo de ordenamiento:

- *Adaptativo*: aprovecha orden de la entrada. Ej: inserción (mejor caso $O(n)$).
- *Estable*: no mezcla elementos "iguales"/incomparables.

Para profundizar

Otras propiedades que puede tener un algoritmo de ordenamiento:

- *Adaptativo*: aprovecha orden de la entrada. Ej: inserción (mejor caso $O(n)$).
- *Estable*: no mezcla elementos "iguales"/incomparables. Ej: inserción, mergesort (pero en todos hay que tener cuidado). En general el sort de un lenguaje no es estable (excepción: Python). Algunos proveen también una versión estable (ej: C++, Java).

Para profundizar

Otras propiedades que puede tener un algoritmo de ordenamiento:

- *Adaptativo*: aprovecha orden de la entrada. Ej: inserción (mejor caso $O(n)$).
- *Estable*: no mezcla elementos "iguales"/incomparables. Ej: inserción, mergesort (pero en todos hay que tener cuidado). En general el sort de un lenguaje no es estable (excepción: Python). Algunos proveen también una versión estable (ej: C++, Java).
- *Online*: puede trabajar a medida que recibe el array.

Para profundizar

Otras propiedades que puede tener un algoritmo de ordenamiento:

- *Adaptativo*: aprovecha orden de la entrada. Ej: inserción (mejor caso $O(n)$).
- *Estable*: no mezcla elementos "iguales"/incomparables. Ej: inserción, mergesort (pero en todos hay que tener cuidado). En general el sort de un lenguaje no es estable (excepción: Python). Algunos proveen también una versión estable (ej: C++, Java).
- *Online*: puede trabajar a medida que recibe el array. Ej: inserción.

Para profundizar

Otras propiedades que puede tener un algoritmo de ordenamiento:

- *Adaptativo*: aprovecha orden de la entrada. Ej: inserción (mejor caso $O(n)$).
- *Estable*: no mezcla elementos "iguales"/incomparables. Ej: inserción, mergesort (pero en todos hay que tener cuidado). En general el sort de un lenguaje no es estable (excepción: Python). Algunos proveen también una versión estable (ej: C++, Java).
- *Online*: puede trabajar a medida que recibe el array. Ej: inserción.
- *In-place*: trabaja sobre el mismo array sin copiarlo.

Para profundizar

Otras propiedades que puede tener un algoritmo de ordenamiento:

- *Adaptativo*: aprovecha orden de la entrada. Ej: inserción (mejor caso $O(n)$).
- *Estable*: no mezcla elementos "iguales"/incomparables. Ej: inserción, mergesort (pero en todos hay que tener cuidado). En general el sort de un lenguaje no es estable (excepción: Python). Algunos proveen también una versión estable (ej: C++, Java).
- *Online*: puede trabajar a medida que recibe el array. Ej: inserción.
- *In-place*: trabaja sobre el mismo array sin copiarlo. Ej: todos menos mergesort.

Otros

- Por comparación: Shell sort, Heapsort
- Para enteros: Counting sort, Radix sort