TP méthode de Schwarz additif conditions de Robin

3 novembre 2020

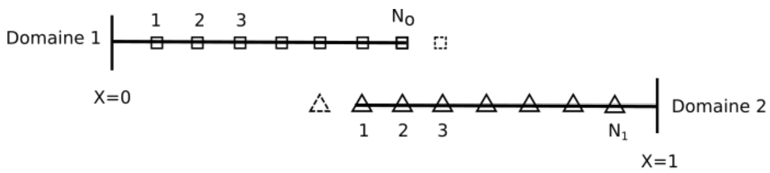
1 Exemple avec deux sous domaines

On veut imposer $\alpha\frac{\partial u}{\partial_n}+\beta u$ à l'interface entre deux domaines. Les conditions de Dirichlet correspondent au cas particulier $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

$$\text{Domaine 1} \qquad\qquad \text{Domaine 2}$$

$$\begin{cases} -\Delta u^1 = f \\ u^1(0) = 0 \\ \alpha\dfrac{\partial u^1}{\partial_{n_1}}+\beta u^1 = \alpha\dfrac{\partial u^2}{\partial_{n_1}}+\beta u^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta u^2 = f \\ u^2(1) = 0 \\ \alpha\dfrac{\partial u^2}{\partial_{n_2}}+\beta u^2 = \alpha\dfrac{\partial u^1}{\partial_{n_2}}+\beta u^1 \end{cases} \tag{1}$$

Le recouvrement est au minimum de 2. En 1D, la figure ci-dessous montre la configuration. On note N_0 le nombre d'inconnues dans le domaine 1 et N_1 le nombre d'inconnues dans le domaine 2.



On se concentre dans un premier temps sur le domaine 1. La condition de bord côté $x = 0$ est classique → Dirichlet. Sur l'interface entre le domaine 1 et le domaine 2 nous avons la condition de Robin. On va faire un schéma centré pour rester à l'ordre 2. On utilise donc un point fantôme N_0+1 illustré en pointillé sur la figure. A l'interface la condition de bord discrète s'écrit donc :

$$\alpha\frac{u^1_{N_0+1}-u^1_{N_0-1}}{2h}+\beta u^1_{N_0} = \alpha\frac{u^2_3-u^2_1}{2h}+\beta u^2_2 \tag{2}$$

Ce qui donne

$$\boxed{u^1_{N_0+1} = u^1_{N_0-1}-\frac{2\beta h}{\alpha}u^1_{N_0}+\left(u^2_3-u^2_1\right)+\frac{2\beta h}{\alpha}u^2_2} \tag{3}$$

Schéma du Laplacien en N_0 :

$$\frac{2u^1_{N_0}-u^1_{N_0+1}-u^1_{N_0-1}}{h^2} = f_{N_0} \tag{4}$$

On remplace $u^1_{N_0+1}$ par l'équation (3).

$$\left(\frac{2}{h^2}+\frac{2\beta}{h\alpha}\right)u^1_{N_0}-\frac{2}{h^2}u^1_{N_0-1} = f_{N_0}+\frac{1}{h^2}\left(u^2_3-u^2_1\right)+\frac{2\beta}{h\alpha}u^2_2 \tag{5}$$

Sous forme matricielle, nous devons résoudre :

$$
\begin{pmatrix}
\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
-\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \ddots & & \vdots \\
0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 \\
\vdots & & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\
0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{2\beta}{h\alpha}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_1^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^1 \\ \vdots \\ u_{N_0}^1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_1 + \frac{1}{h^2} u^1(0) \\
f_2 \\
\vdots \\
f_i \\
\vdots \\
f_{N_0} + \frac{1}{h^2}(u_3^2 - u_1^2) + \frac{2\beta}{h\alpha} u_2^2
\end{pmatrix}
\tag{6}
$$

Remarque : Si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ (Dirichlet classique avec un recouvrement de 2) il suffit de remplacer la dernière ligne de la matrice par $\left(0 \dots 0 \ \frac{1}{h^2}\right)$ et la dernière ligne du terme source par $\frac{1}{h^2} u_2^2$. On garde le $1/h^2$ pour aider la convergence du BiCGStab.

On fait la même chose dans le domaine 2. La normale sortante du domaine 2 n_2 est opposée à n_1. On utilise le noeud fantôme u_0^2, triangle en pointillé de la figure.

$$
\alpha \frac{u_0^2 - u_2^2}{2h} + \beta u_1^2 = \alpha \frac{u_{N_0-2}^1 - u_{N_0}^1}{2h} + \beta u_{N_0-1}^1 \tag{7}
$$

Ce qui donne

$$
\boxed{u_0^2 = u_2^2 - \frac{2\beta h}{\alpha} u_1^2 + \left(u_{N_0-2}^1 - u_{N_0}^1\right) + \frac{2\beta h}{\alpha} u_{N_0-1}^1} \tag{8}
$$

Schéma du Laplacien en 0 :

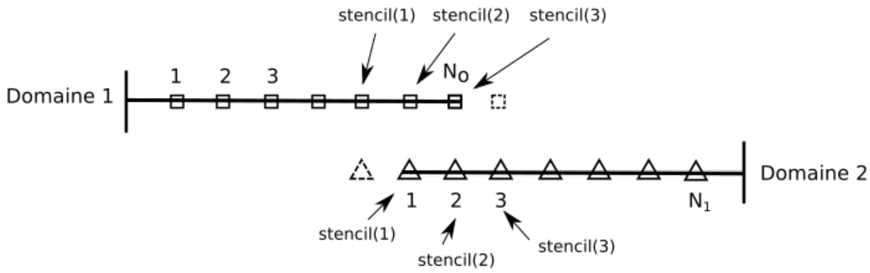
$$
\frac{2u_1^2 - u_2^2 - u_0^2}{h^2} = f_0 \tag{9}
$$

On remplace u_0^2 par l'équation (8).

$$
\left(\frac{2}{h^2} + \frac{2\beta}{h\alpha}\right) u_1^2 - \frac{2}{h^2} u_2^2 = f_1 + \frac{1}{h^2}\left(u_{N_0-2}^1 - u_{N_0}^1\right) + \frac{2\beta}{h\alpha} u_{N_0-1}^1 \tag{10}
$$

Sous forme matricielle, même remarque que précédemment pour $\alpha = 0$, nous devons résoudre :

$$
\begin{pmatrix}
\frac{2}{h^2} + \frac{2\beta}{h\alpha} & -\frac{2}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
-\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \ddots & & \vdots \\
0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 \\
\vdots & & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\
0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_1^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_{N_1}^2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_1 + \frac{1}{h^2}(u_{N_0-2}^1 - u_{N_0}^1) + \frac{2\beta}{h\alpha} u_{N_0-1}^1 \\
f_2 \\
\vdots \\
f_i \\
\vdots \\
f_{N_1} + \frac{1}{h^2} u^2(1)
\end{pmatrix}
\tag{11}
$$



Dans le code je stocke les trois valeurs utiles de l'autre domaine dans le tableau stencil. Voici la configuration :

Remarque : Pour éviter trop de communications on peut aussi faire le calcul avant et ne transmettre que le résultat. Le domaine 1 calcule $\frac{1}{h^2}(u^1_{N_0-2} - u^1_{N_0}) + \frac{2\beta}{h\alpha} u^1_{N_0-1}$ et le transmet au domaine 2. Le domaine 2 calcule $\frac{1}{h^2}(u^2_3 - u^2_1) + \frac{2\beta}{h\alpha} u^2_2$ et le transmet au domaine 1. On teste avec $u_{exacte} = x(x-1)e^{(-x)}$, $f = -e(-x)(x^2 - 5x + 4)$.