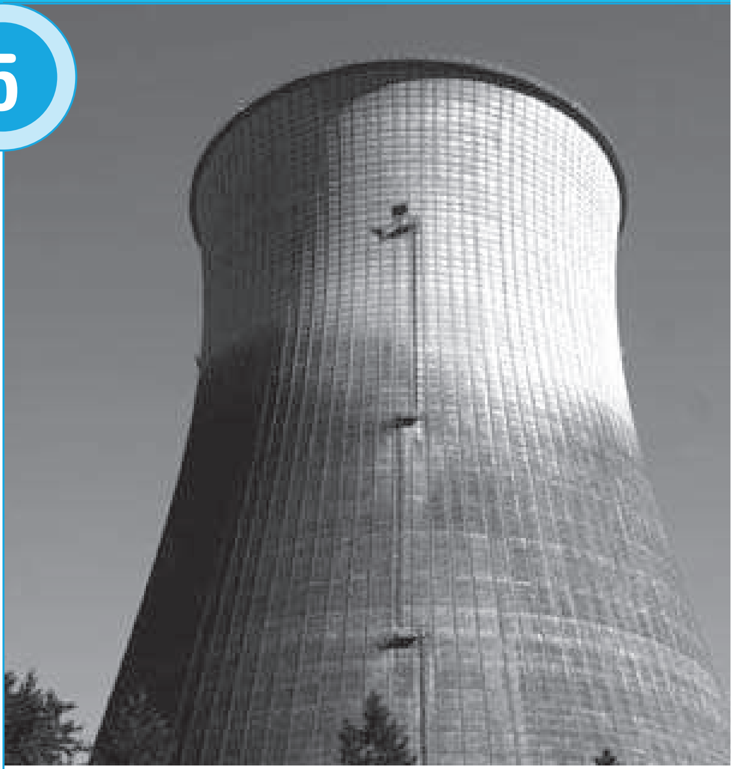
5

Algunas distribuciones discretas útiles



© James Hearn/Dreamstime

OBJETIVOS GENERALES

Las variables aleatorias discretas se emplean en numerosas aplicaciones prácticas. En este capítulo presentamos tres variables aleatorias discretas importantes, la binomial, la de Poisson y la hipergeométrica. Es frecuente que estas variables aleatorias se usen para describir el número de sucesos de un evento, especificado en un número fijo de intentos o una unidad fija de tiempo o espacio.

ÍNDICE DEL CAPÍTULO

- La distribución binomial de probabilidad (5.2)
- La distribución hipergeométrica de probabilidad (5.4)
- La media y varianza para la variable aleatoria binomial (5.2)
- La distribución de probabilidad de Poisson (5.3)

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo uso la tabla 1 para calcular probabilidades binomiales?
¿Cómo calculo probabilidades de Poisson usando la fórmula?
¿Cómo uso la tabla 2 para calcular probabilidades de Poisson?

Un misterio: cánceres cerca de un reactor

¿El reactor nuclear Pilgrim I es responsable del aumento en casos de cáncer en el área circundante? Surgió una controversia política cuando el Departamento de Salud Pública de Massachusetts encontró un número anormalmente grande de casos en una franja costera de 4 millas de ancho un poco al norte del reactor nuclear de Plymouth, Massachusetts. El estudio práctico, que aparece al final de este capítulo, examina cómo esta pregunta se puede contestar usando una de las distribuciones discretas de probabilidad presentadas aquí.

5.1 INTRODUCCIÓN

Se pueden hallar ejemplos de *variables aleatorias discretas* en numerosas situaciones cotidianas y en casi todas las disciplinas académicas. No obstante, hay tres distribuciones discretas de probabilidad que sirven como *modelos* para un gran número de estas aplicaciones. En este capítulo estudiamos las distribuciones de probabilidad binomiales, de Poisson e hipergeométrica y discutimos su utilidad en diferentes situaciones físicas.

5.2 LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE PROBABILIDAD

El experimento de lanzar al aire una moneda es un ejemplo sencillo de una importante variable aleatoria discreta llamada **variable aleatoria binomial**. Muchos experimentos prácticos resultan en datos similares a que salgan cara o cruz al tirar la moneda. Por ejemplo, considere las encuestas políticas que se emplean para predecir las preferencias de los votantes en elecciones. Cada votante entrevistado se puede comparar a una moneda porque el votante puede estar a favor de nuestro candidato (una "cara") o no (una "cruz"). Casi siempre, la proporción de votantes que están a favor de nuestro candidato no es igual a 1/2, es decir, la moneda no es imparcial. De hecho, la encuesta está diseñada exactamente para determinar la proporción de votantes que están a favor de nuestro candidato.

Veamos aquí algunas otras situaciones semejantes al experimento de lanzar al aire una moneda:

- Un sociólogo está interesado en la proporción de maestros de escuelas elementales que sean hombres.
- Una comerciante en bebidas gaseosas está interesada en la proporción de quienes toman refresco de cola y que prefieren la marca de ella.
- Un genetista está interesado en la proporción de la población que posee un gen vinculado a la enfermedad de Alzheimer.

Cada persona muestreada es análoga a lanzar al aire una moneda, pero la probabilidad de una "cara" no es necesariamente igual a 1/2. Aun cuando estas situaciones tienen diferentes objetivos prácticos, todas exhiben las características comunes del **experimento binomial**.

Definición Un **experimento binomial** es el que tiene estas cinco características:

1. El experimento consiste en n intentos idénticos.
2. Cada intento resulta en uno de dos resultados. Por falta de un mejor nombre, el resultado uno se llama éxito, S, y el otro se llama fracaso, F.
3. La probabilidad de éxito en un solo intento es igual a p y es igual de un intento a otro. La probabilidad de fracaso es igual a $(1 - p) = q$.
4. Los intentos son independientes.
5. Estamos interesados en x, el número de éxitos observado durante los n intentos, para $x = 0, 1, 2, \dots, n$.

EJEMPLO 5.1

Suponga que hay alrededor de un millón de adultos en un condado y una proporción desconocida p están a favor de limitar el periodo de función de políticos. Se escogerá una muestra de mil adultos en forma tal que cada uno del millón de adultos tenga igual probabilidad de ser seleccionado y a cada uno se le pregunta si él o ella está a favor de limitar el periodo. (El objetivo final de esta encuesta es estimar la proporción desconocida p, un problema que veremos en el capítulo 8.) ¿Este experimento es binomial?

Solución ¿El experimento tiene las cinco características binomiales?

1. Un "intento" es la selección de un solo adulto de entre el millón de adultos del condado. Esta muestra consta de $n = 1000$ intentos idénticos.
2. Como cada adulto estará a favor o no estará a favor de limitar el periodo, hay dos resultados que representan los "éxitos" y "fracasos" del experimento binomial.†
3. La probabilidad de éxito, p, es la probabilidad de que un adulto esté a favor del límite del periodo. ¿Esta probabilidad sigue igual para cada uno de los adultos de la muestra? Para todos los fines prácticos, la respuesta es *sí*. Por ejemplo, si 500 mil adultos de la población están a favor de limitar el periodo, entonces la probabilidad de un "éxito" cuando se escoja al primer adulto es $500\,000/1\,000\,000 = 1/2$. Cuando se escoja al segundo adulto, la probabilidad p cambia ligeramente, dependiendo de la primera selección. Esto es, habrá 499 999 o 500 000 éxitos que queden entre los 999 999 adultos. En cualquiera de estos casos, p es todavía más o menos igual a 1/2.
4. La independencia de los intentos está garantizada debido al grupo grande de adultos del que se toma la muestra. La probabilidad de que un adulto esté a favor de limitar el periodo no cambia, dependiendo de las respuestas de las personas previamente escogidas.
5. La variable aleatoria x es el número de adultos de la muestra que estén a favor de limitar el periodo.

Debido a que el estudio satisface las cinco características razonablemente bien, para todos los fines prácticos se puede ver como un experimento binomial.

EJEMPLO 5.2

Un paciente llena una receta para un régimen de 10 días de dos píldoras diarias. Sin que lo sepan el farmacéutico ni el paciente, las 20 pastillas están formadas por 18 píldoras del medicamento prescrito y dos píldoras que son el equivalente genérico del medicamento prescrito. El paciente selecciona dos píldoras al azar para la dosis del primer día. Si verificamos la selección y registramos el número de píldoras que son genéricas, ¿es éste un experimento binomial?

Solución De nuevo, verifique el procedimiento de muestreo para las características de un experimento binomial.

1. Un "intento" es la selección de una píldora de entre las 20 de la receta. Este experimento consta de $n = 2$ intentos.
2. Cada intento resulta en uno de dos resultados. O bien la píldora es genérica (llame "éxito" a esto) o no lo es (un "fracaso").
3. Como las píldoras de una botella de receta se pueden considerar "mezcladas" al azar, la probabilidad incondicional de sacar una píldora genérica en un intento determinado sería 2/20.
4. La condición de independencia entre intentos *no está* satisfecha, porque la probabilidad de sacar una píldora genérica en el segundo intento depende del primer intento. Por ejemplo, si la primera píldora sacada es genérica entonces hay sólo una píldora genérica en las restantes 19. Por tanto,

$$P(\text{genérica en intento 2}|\text{genérica en intento 1}) = 1/19$$

† Aun cuando es tradicional que los dos posibles resultados de un intento se denominen "éxito" y "fracaso", podrían haberse llamado "cara" y "cruz", "rojo" y "blanco" o cualquier otro par de palabras. En consecuencia, el resultado llamado "éxito" no necesita ser visto como éxito en el uso ordinario de la palabra.

Si la primera selección *no resulta* en una píldora genérica, entonces hay todavía dos píldoras genéricas en las restantes 19, y la probabilidad de un "éxito" (una píldora genérica) cambia a

$$P(\text{genérica en el intento 2}|\text{no genérica en el intento 1}) = 2/19$$

Por tanto, los intentos son dependientes y el muestreo no representa un experimento binomial.

Considere la diferencia entre estos dos ejemplos. Cuando la muestra (los n intentos idénticos) vinieron de una población grande, la probabilidad de éxito p siguió siendo más o menos la misma de un intento a otro. Cuando el tamaño poblacional N era pequeño, la probabilidad de éxito p cambió en forma considerable de un intento a otro, y el experimento *no fue* binomial.

REGLA PRÁCTICA

Si el tamaño muestral es grande con respecto al tamaño poblacional, en particular si $n/N \geq .05$, entonces el experimento resultante no es binomial.

En el capítulo 4, tiramos al aire dos monedas justas y construimos la distribución de probabilidad para x, el número de caras, un experimento binomial con $n = 2$ y $p = .5$. La distribución binomial general de probabilidad se construye en la misma forma, pero el procedimiento se complica cuando n se hace grande. Afortunadamente, las probabilidades $p(x)$ siguen un modelo general. Esto nos permite usar una sola fórmula para hallar $p(x)$ para cualquier valor dado de x.

LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE PROBABILIDAD

Un experimento binomial consta de n intentos idénticos con probabilidad p de éxito en cada intento. La probabilidad de k éxitos en n intentos es

$$P(x = k) = C_k^n p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

para valores de $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. El símbolo C_k^n es igual a,

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donde $n! = n(n-1)(n-2) \cdots (2)(1)$ y $0! \equiv 1$.

Las fórmulas generales para μ, σ^2 y σ dadas en el capítulo 4 se pueden usar para obtener las siguientes fórmulas más sencillas para la media y desviación estándar binomiales.

MEDIA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR PARA LA VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL

La variable aleatoria x, el número de éxitos en n intentos, tiene una distribución de probabilidad con este centro y dispersión:

$$\begin{aligned} \text{Media:} \quad & \mu = np \\ \text{Varianza:} \quad & \sigma^2 = npq \\ \text{Desviación estándar:} \quad & \sigma = \sqrt{npq} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.3

Encuentre $P(x = 2)$ para una variable aleatoria binomial con $n = 10$ y $p = .1$.

Solución $P(x = 2)$ es la probabilidad de observar 2 éxitos y 8 fracasos en una secuencia de 10 intentos. Se podrían observar 2 éxitos primero, seguidos de 8 fracasos consecutivos:

S, S, F, F, F, F, F, F, F, F

MI CONSEJO

$n! = n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)$
Por ejemplo, $5! = 5(4)(3)(2)(1) = 120$ y $0! \equiv 1$.

Como p es la probabilidad de éxito y q es la probabilidad de fracaso, esta secuencia particular también resulta en $x = 2$ éxitos.

$$ppqqqqqqqq = p^2q^8$$

Sin embargo, pueden también resultar muchas otras secuencias en $x = 2$. La fórmula binomial utiliza C_2^{10} para contar el número de secuencias y da la probabilidad exacta cuando se usa la fórmula binomial con $k = 2$:

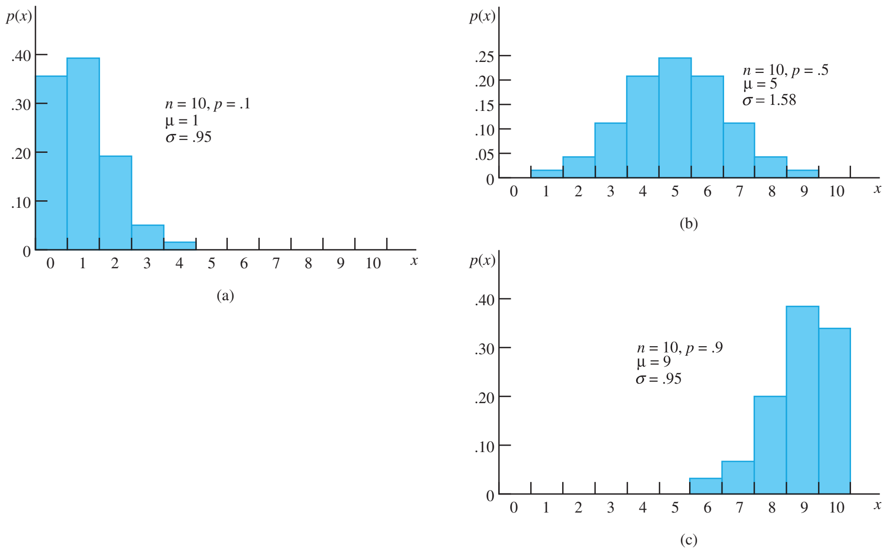
$$P(x = 2) = C_2^{10}(.1)^2(.9)^{10-2}$$
$$= \frac{10!}{2!(10-2)!}(.1)^2(.9)^8 = \frac{10(9)}{2(1)}(.01)(.430467) = .1937$$

Se podría repetir el procedimiento del ejemplo 5.3 para cada valor de x (0, 1, 2, …, 10) y encontrar todos los valores de $p(x)$ necesarios para construir un histograma de probabilidad para x. Éste sería un trabajo largo y tedioso, pero la gráfica resultante se vería como la figura 5.1a). Se puede verificar la altura de la barra para $x = 2$ y encontrar $p(2) = P(x = 2) = .1937$. La gráfica está sesgada a la derecha; esto es, casi todo el tiempo se observarán valores pequeños de x. La media o "punto de equilibrio" está alrededor de $x = 1$; de hecho, se puede usar la fórmula para hallar la media exacta:

$$\mu = np = 10(.1) = 1$$

Las figuras 5.1b) y 5.1c) muestran las otras dos distribuciones binomiales con $n = 10$ pero con diferentes valores de p. Vea las formas de estas distribuciones. Cuando $p = .5$, la distribución es exactamente simétrica alrededor de la media, $\mu = np = 10(.5) = 5$. Cuando $p = .9$, la distribución es la "imagen espejo" de la distribución para $p = .1$ y está sesgada a la izquierda.

FIGURA 5.1
Distribuciones de probabilidad binomial



EJEMPLO 5.4

En un tiempo largo, se ha observado que un jugador profesional de baloncesto puede hacer un tiro libre en un intento determinado con probabilidad igual a .8. Suponga que él lanza cuatro tiros libres.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste exactamente dos tiros libres?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste al menos un tiro libre?

Solución Un "intento" es un solo tiro libre y se puede definir un "éxito" como una canasta y un "fracaso" como una falla, de modo que $n = 4$ y $p = .8$. Si se supone que la probabilidad del jugador de encestar el tiro libre no cambia de un tiro a otro, entonces el número x de veces que enceste el tiro libre es una *variable aleatoria binomial.*

1. $P(x = 2) = C_2^4(.8)^2(.2)^2$

$$= \frac{4!}{2!2!}(.64)(.04) = \frac{4(3)(2)(1)}{2(1)(2)(1)}(.64)(.04) = .1536$$

La probabilidad es .1536 de que enceste exactamente dos tiros libres.

2.
$$\begin{aligned} P(\text{al menos uno}) &= P(x \geq 1) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) \\ &= 1 - p(0) \\ &= 1 - C_0^4(.8)^0(.2)^4 \\ &= 1 - .0016 = .9984. \end{aligned}$$

Aun cuando se podría calcular $P(x = 1)$, $P(x = 2)$, $P(x = 3)$ y $P(x = 4)$ para hallar esta probabilidad, usar el complemento del evento hace más fácil el trabajo; es decir,

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x = 0).$$

¿Puede usted considerar alguna razón por la que su suposición de intentos independientes podría ser errónea? Si el jugador aprende por su intento previo (es decir, ajusta su tiro de acuerdo con su último intento), entonces su probabilidad p de encestar el tiro libre puede cambiar, posiblemente aumentar, de un tiro a otro. Los intentos *no serían* independientes y el experimento *no sería* binomial.

MI CONSEJO

Use la tabla 1 del apéndice I más que la fórmula binomial siempre que sea posible. *Ésta es una forma más fácil.*

Calcular probabilidades binomiales puede ser tedioso incluso para valores relativamente pequeños de n. Cuando n se hace grande, se hace casi imposible sin ayuda de una calculadora o computadora. Por fortuna tenemos estas dos herramientas. Las tablas de **probabilidades binomiales acumulativas** generadas por computadora se dan en la tabla 1 del apéndice I, para valores de n que van de 2 a 25 y para valores seleccionados de p. Estas probabilidades también pueden ser generadas si se usa el *MINITAB* o los applets Java en el sitio web Premium.

Las probabilidades binomiales *acumulativas* difieren de las probabilidades binomiales *individuales* que se calcularon con la fórmula binomial. Una vez que usted encuentre la columna de probabilidades para los valores correctos de n y p en la tabla 1, el renglón marcado como k da la suma de todas las probabilidades binomiales de $x = 0$ a $x = k$. La tabla 5.1 muestra parte de la tabla 1 para $n = 5$ y $p = .6$. Si se muestra en el renglón marcado $k = 3$, se encuentra

$$P(x \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = .663$$

TABLA 5.1 **Parte de la tabla 1 del apéndice I para $n = 5$**

								p						
k	.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	k
0	—	—	—	—	—	—	—	.010	—	—	—	—	—	0
1	—	—	—	—	—	—	—	.087	—	—	—	—	—	1
2	—	—	—	—	—	—	—	.317	—	—	—	—	—	2
3	—	—	—	—	—	—	—	.663	—	—	—	—	—	3
4	—	—	—	—	—	—	—	.922	—	—	—	—	—	4
5	—	—	—	—	—	—	—	1.000	—	—	—	—	—	5

Si la probabilidad que usted necesite calcular no está en esta forma, necesitará considerar una forma para reescribir su probabilidad y hacer uso de las tablas.

EJEMPLO 5.5

Use la tabla binomial acumulativa para $n = 5$ y $p = .6$ para hallar las probabilidades de estos eventos:

1. Exactamente tres éxitos
2. Tres o más éxitos

Solución

1. Si encuentra $k = 3$ en la tabla 5.1, el valor en tabla es

$$P(x \le 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$$

Como usted desea sólo $P(x = 3) = p(3)$, debe restar la probabilidad no deseada:

$$P(x \le 2) = p(0) + p(1) + p(2)$$

que se encuentra en la tabla 5.1 con $k = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} P(x = 3) &= P(x \le 3) - P(x \le 2) \\ &= .663 - .317 = .346 \end{aligned}$$

2. Para hallar P(tres o más éxitos) $= P(x \ge 3)$ usando la tabla 5.1, se debe usar el complemento del evento de interés. Escriba

$$P(x \ge 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - P(x \le 2)$$

Se puede hallar $P(x \le 2)$ en la tabla 5.1 con $k = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} P(x \ge 3) &= 1 - P(x \le 2) \\ &= 1 - .317 = .683 \end{aligned}$$

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo utilizo la tabla 1 para calcular probabilidades binomiales?

1. Encuentre los valores necesarios de n y p. Aísle la columna apropiada de la tabla 1.
2. La tabla 1 da $P(x \le k)$ en la fila marcada k. Reescriba la probabilidad que necesite para que esté en esta forma.
   - Haga una lista de los valores de x en su evento.
   - De la lista, escriba el evento como la diferencia de dos probabilidades:

   $$P(x \le a) - P(x \le b) \quad \text{para } a > b$$

   o el complemento del evento:

   $$1 - P(x \le a)$$

   o sólo el evento en sí:

   $$P(x \le a) \text{ o } P(x < a) = P(x \le a - 1)$$

Repertorio de ejercicios

A. Considere una variable aleatoria binomial con $n = 5$ y $p = .6$. Aísle la columna apropiada en la tabla 1 y llene las probabilidades siguientes. Una de las probabilidades, $P(x \le 3)$ ya está llena.

k	0	1	2	3	4	5
$P(x \le k)$				.663		

B. Complete los espacios en blanco en la tabla siguiente. El segundo problema ya está hecho.

El problema	Lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
4 o menos				
4 o más	4, 5	$P(x \ge 4)$	$1 - P(x \le 3)$	$1 - .663 = .337$
Más de 4				
Menos de 4				
Entre 2 y 4 (inclusive)				
Exactamente 4				

Informe de progreso

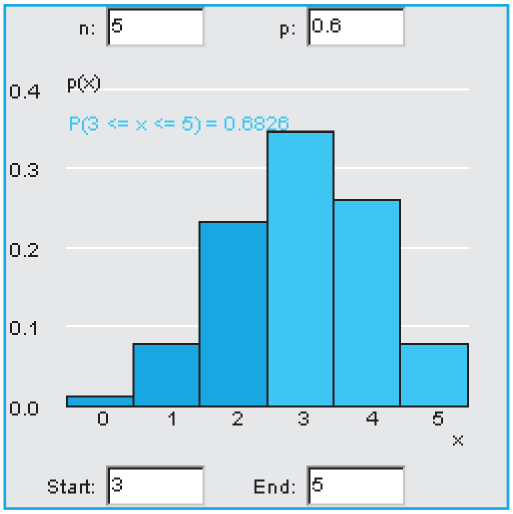
- ¿Todavía tiene problemas? Trate de nuevo usando el repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina las probabilidades binomiales? Puede saltarse el repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

MI APPLET

El applet Java llamado **Calculating Binomial Probabilities (Calculando probabilidades binomiales)** da una imagen visual de la distribución binomial para valores de $n \leq 100$ y cualquier p que usted escoja. Puede usar este applet para calcular probabilidades binomiales para cualquier valor de x o para cualquier intervalo $a \leq x \leq b$. Para reproducir los resultados del ejemplo 5.5, teclee **5** en la caja marcada "n" y **0.6** en la caja marcada "p", presionando la tecla "Enter" después de cada entrada. A continuación introduzca los valores inicial y final para x (si necesita calcular una probabilidad individual, ambas entradas serán iguales). La probabilidad se calcula y queda sombreada en rojo en su pantalla (azul claro en la figura 5.2) cuando presiona "Enter". ¿Cuál es la probabilidad de tres o más éxitos de la figura 5.2? ¿Esto confirma nuestra respuesta del ejemplo 5.5? Usted usará este applet de nuevo para la sección Mi Applet ejercicios al final del capítulo.

FIGURA 5.2
Applet Calculating Binomial Probabilities (Calculando probabilidades binomiales)



EJEMPLO 5.6

Se probó un régimen formado por una dosis diaria de vitamina C para determinar su efectividad para prevenir el resfriado común. Diez personas que estuvieron siguiendo el régimen prescrito fueron observadas durante un año. Ocho pasaron el invierno sin un resfriado. Suponga que la probabilidad de pasar el invierno sin un resfriado es .5 cuando no se sigue el régimen de vitamina C. ¿Cuál es la probabilidad de observar ocho o más sobrevivientes, dado que el régimen es ineficiente para aumentar la resistencia a resfriados?

Solución Si se supone que el régimen de vitamina C es ineficiente, entonces la probabilidad p de sobrevivir el invierno sin un resfriado es .5. La distribución de probabilidad para x, el número de sobrevivientes, es

$$p(x) = C_x^{10}(.5)^x(.5)^{10-x}$$

Usted ya ha aprendido cuatro formas de hallar P(8 o más sobrevivientes) $= P(x \geq 8)$. Obtendrá los mismos resultados con cualquiera de los cuatro; escoja el método más cómodo para su problema particular.

1. *La fórmula binomial:*

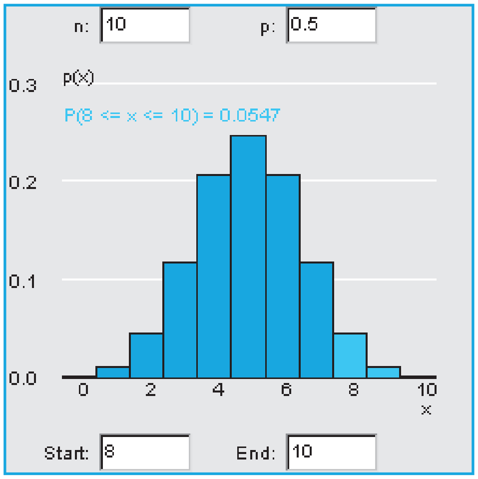
$$\begin{aligned} P(8 \text{ o más}) &= p(8) + p(9) + p(10) \\ &= C_8^{10}(.5)^{10} + C_9^{10}(.5)^{10} + C_{10}^{10}(.5)^{10} \\ &= .055 \end{aligned}$$

2. *Las tablas binomiales acumulativas:* Encuentre la columna correspondiente a $p = .5$ en la tabla para $n = 10$:

$$\begin{aligned} P(8 \text{ o más}) &= P(x \geq 8) = 1 - P(x \leq 7) \\ &= 1 - .945 = .055 \end{aligned}$$

3. *El applet* **Calculating Binomial Probabilities (Calculando probabilidades binomiales):** Introduzca $n = 10$, $p = .5$ y calcule la probabilidad de que x sea entre 8 y 10. La probabilidad, $P(x \geq 8) = .0547$, está sombreado en rojo en su pantalla (azul claro en la figura 5.3).

FIGURA 5.3
Applet Java para el ejemplo 5.6



4. *Salida del MINITAB:* La salida que se muestra en la figura 5.4 da la **función acumulativa de distribución**, que da las mismas probabilidades que encontró en las tablas acumulativas binomiales. La **función de densidad de probabilidad** da las probabilidades binomiales individuales, que encontró usted usando la fórmula binomial.

FIGURA 5.4
Salida del *MINITAB* para el ejemplo 5.6

Función acumulativa de distribución

Binomial with n = 10 and p = 0.5

x	P(X <= x)
0	0.00098
1	0.01074
2	0.05469
3	0.17187
4	0.37695
5	0.62305
6	0.82813
7	0.94531
8	0.98926
9	0.99902
10	1.00000

Función de densidad de probabilidad

Binomial with n = 10 and p = 0.5

x	P(X = x)
0	0.000977
1	0.009766
2	0.043945
3	0.117188
4	0.205078
5	0.246094
6	0.205078
7	0.117188
8	0.043945
9	0.009766
10	0.000977

Usando la función acumulativa de distribución, calcule

$$P(x \geq 8) = 1 - P(x \leq 7)$$
$$= 1 - .94531 = .05469$$

O bien, usando la función de densidad de probabilidad, calcule

$$P(x \geq 8) = p(8) + p(9) + p(10)$$
$$= .043945 + .009766 + .000977 = .05469$$

EJEMPLO 5.7

¿Preferiría usted tomar un examen de opción múltiple o uno de recordatorio completo? Si no sabe nada del material, tendrá una calificación de cero en un examen de recordatorio completo pero, si le dan cinco opciones por cada pregunta, ¡tiene al menos una probabilidad en cinco de adivinar correctamente! Si un examen de opción múltiple contiene 100 preguntas, cada una con cinco posibles respuestas, ¿cuál es la calificación esperada para un estudiante que está adivinando en cada pregunta? ¿Dentro de qué límites caen las calificaciones de "no lo sabe"?

Solución Si x es el número de respuestas correctas en el examen de 100 preguntas, la probabilidad de una respuesta correcta, p, es una en cinco, de modo que $p = .2$. Como el estudiante selecciona respuestas al azar, las $n = 100$ respuestas son independientes y la calificación esperada para esta variable aleatoria binomial es

$$\mu = np = 100(.2) = 20 \qquad \text{respuestas correctas}$$

Para evaluar la dispersión o variabilidad de las calificaciones, se puede calcular

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100(.2)(.8)} = 4$$

Entonces, usando su conocimiento de variación a partir del teorema de Chebyshev y la Regla empírica, puede hacer estos enunciados:

- Una gran proporción de las calificaciones estará a no más de dos desviaciones estándar de la media, o sea de $20 - 8 = 12$ a $20 + 8 = 28$.
- Casi todas las calificaciones estarán a no más de tres desviaciones estándar de la media, o sea de $20 - 12 = 8$ a $20 + 12 = 32$.

La opción de "adivinar" da al estudiante una mejor calificación que una de cero en el examen de recordatorio completo, pero el estudiante todavía no pasará el examen. ¿Qué otras opciones tiene el estudiante?

5.2 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 190.

5.1 Considere una variable aleatoria binomial con $n = 8$ y $p = .7$. Aísle la columna apropiada en la tabla 1 y llene las probabilidades.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(x \le k)$									

Llene los espacios en blanco de la tabla siguiente.

El problema	Haga una lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
3 o menos		$P(x \le$ ___$)$		
3 o más		$P(x \ge$ ___$)$	$1 - P(x \le$ ___$)$	
Más de 3		$P(x >$ ___$)$	$1 - P(x \le$ ___$)$	
Menos de 3		$P(x <$ ___$)$	$P(x \le$ ___$) - P(x \le$ ___$)$	
Entre 3 y 5 (inclusive)		$P($___ $\le x \le$ ___$)$	$P(x \le$ ___$)$	
Exactamente 3		$P(x =$ ___$)$	$P(x \le$ ___$) - P(x \le$ ___$)$	

5.2 Considere una variable aleatoria binomial con $n = 9$ y $p = .3$. Separe la columna apropiada de la tabla 1 y llene las probabilidades siguientes.

κ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(x \le \kappa)$									

Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente.

El problema	Haga una lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad	Encuentre la probabilidad
Exactamente 2				
Más de 2				
2 o más				
Menos de 2				
Entre 2 y 4 (inclusive)				
2 o menos				

TÉCNICAS BÁSICAS

5.3 **El problema de la urna** Un frasco contiene cinco pelotas: tres rojas y dos blancas. Dos pelotas se escogen al azar sin restituirlas (sin devolverlas al frasco) y se registra el número x de pelotas rojas. Explique por qué x es o no es una variable aleatoria binomial. (SUGERENCIA: Compare las características de este experimento con las características de un experimento binomial dado en esta sección.) Si el experimento es binomial, dé los valores de n y p.

5.4 **El problema de la urna, continúa** Consulte el ejercicio 5.3. Suponga que el muestreo fue realizado con restitución. Esto es, suponga que la primera pelota se seleccionó del frasco, se observó y luego fue restituida (vuelta al frasco), y que las pelotas entonces se mezclaron antes de seleccionar la segunda pelota. Explique por qué x, el número de pelotas rojas observado, es o no es una variable aleatoria binomial. Si el experimento es binomial, dé los valores de n y p.

5.5 Evalúe estas probabilidades binomiales:

a. $C^8_2(.3)^2(.7)^6$ **b.** $C^4_0(.05)^0(.95)^4$
c. $C^{10}_3(.5)^3(.5)^7$ **d.** $C^7_1(.2)^1(.8)^6$

5.6 Evalúe estas probabilidades binomiales:

a. $C^8_0(.2)^0(.8)^8$ **b.** $C^8_1(.2)^1(.8)^7$ **c.** $C^8_2(.2)^2(.8)^6$
d. $P(x \le 1)$ cuando $n = 8$, $p = .2$
e. P(dos éxitos o menos)

5.7 Sea x una variable aleatoria binomial con $n = 7$, $p = .3$. Encuentre estos valores:

a. $P(x = 4)$ **b.** $P(x \le 1)$ **c.** $P(x > 1)$
d. $\mu = np$ **e.** $\sigma = \sqrt{npq}$

5.8 Use la fórmula para la distribución binomial de probabilidad para calcular los valores de $p(x)$ y construya el histograma de probabilidad para x cuando $n = 6$ y $p = .2$. [SUGERENCIA: Calcule $P(x = k)$ para siete valores diferentes de k.]

5.9 Consulte el ejercicio 5.8. Construya el histograma de probabilidad para una variable aleatoria x con $n = 6$ y $p = .8$. Use los resultados del ejercicio 5.8; no calcule de nuevo todas las probabilidades.

5.10 Si x tiene una distribución binomial con $p = .5$, ¿la forma de la distribución de probabilidad será simétrica, sesgada a la izquierda o sesgada a la derecha?

5.11 Sea x una variable aleatoria binomial con $n = 10$ y $p = .4$. Encuentre estos valores:

a. $P(x = 4)$ **b.** $P(x \ge 4)$ **c.** $P(x > 4)$
d. $P(x \le 4)$ **e.** $\mu = np$ **f.** $\sigma = \sqrt{npq}$

5.12 Use la tabla 1 del apéndice I para hallar la suma de las probabilidades binomiales de $x = 0$ a $x = k$ para estos casos:

a. $n = 10$, $p = .1$, $k = 3$
b. $n = 15$, $p = .6$, $k = 7$
c. $n = 25$, $p = .5$, $k = 14$

5.13 Use la tabla 1 del apéndice I para evaluar las siguientes probabilidades para $n = 6$ y $p = .8$:

a. $P(x \ge 4)$ **b.** $P(x = 2)$
c. $P(x < 2)$ **d.** $P(x > 1)$

Verifique estas respuestas usando los valores de $p(x)$ calculados en el ejercicio 5.9.

5.14 $P(x \leq k)$ en cada caso:

a. $n = 20, p = .05, k = 2$

b. $n = 15, p = .7, k = 8$

c. $n = 10, p = .9, k = 9$

5.15 Use la tabla 1 del apéndice I para hallar lo siguiente:

a. $P(x < 12)$ para $n = 20, p = .5$

b. $P(x \leq 6)$ para $n = 15, p = .4$

c. $P(x > 4)$ para $n = 10, p = .4$

d. $P(x \geq 6)$ para $n = 15, p = .6$

e. $P(3 < x < 7)$ para $n = 10, p = .5$

5.16 Encuentre la media y desviación estándar para una distribución binomial con estos valores:

a. $n = 1000, p = .3$ **b.** $n = 400, p = .01$

c. $n = 500, p = .5$ **d.** $n = 1600, p = .8$

5.17 Encuentre la media y desviación estándar para una distribución binomial con $n = 100$ y estos valores de p:

a. $p = .01$ **b.** $p = .9$ **c.** $p = .3$

d. $p = .7$ **e.** $p = .5$

5.18 En el ejercicio 5.17, la media y desviación estándar para una variable aleatoria binomial se calcularon para un tamaño muestral fijo, $n = 100$ y para valores diferentes de p. Grafique los valores de la desviación estándar para los cinco valores de p dados en el ejercicio 5.17. ¿Para qué valores de p la desviación estándar parece ser un máximo?

5.19 Sea x una variable aleatoria binomial con $n = 20$ y $p = .1$.

a. Calcule $P(x \leq 4)$ usando la fórmula binomial.

b. Calcule $P(x \leq 4)$ usando la tabla 1 del apéndice I.

c. Use la salida *MINITAB* de esta página para calcular $P(x \leq 4)$. Compare los resultados de los incisos a), b) y c).

d. Calcule la media y desviación estándar de la variable aleatoria x.

e. Use los resultados del inciso d) para calcular los intervalos $\mu \pm \sigma$ $\mu \pm 2\sigma$, y $\mu \pm 3\sigma$. Encuentre la probabilidad de que una observación caiga en cada uno de estos intervalos.

f. ¿Los resultados del inciso e) son consistentes con el teorema de Chebyshev? ¿Con la Regla empírica? ¿Por qué sí o por qué no?

Salida *MINITAB* para el ejercicio 5.19

Función de densidad de probabilidad

```
Binomial with n = 20 and p = 0.1
 x   P( X = x )
 0     0.121577
 1     0.270170
 2     0.285180
 3     0.190120
 4     0.089779
 5     0.031921
 6     0.008867
 7     0.001970
 8     0.000356
 9     0.000053
10     0.000006
11     0.000001
12     0.000000
13     0.000000
14     0.000000
15     0.000000
16     0.000000
17     0.000000
18     0.000000
19     0.000000
20     0.000000
```

APLICACIONES

5.20 Clima en Chicago Un meteorólogo en Chicago registró el número de días de lluvia durante un periodo de 30 días. Si la variable aleatoria x se define como el número de días de lluvia, ¿x tiene una distribución binomial? Si no es así, ¿por qué no? Si es así, ¿se conocen los valores de n y de p?

5.21 Telemercadeo Una empresa de investigación de mercado contrata operadores para realizar encuestas por teléfono. La computadora marca al azar un número telefónico y la operadora pregunta a quien conteste si tiene tiempo para contestar algunas preguntas. Sea x el número de llamadas telefónicas hechas hasta que el primer entrevistado está dispuesto a contestar las preguntas de la operadora. ¿Es éste un experimento binomial? Explique.

5.22 Calificaciones del SAT (examen de aptitud escolar) En 2006, el promedio combinado de calificaciones del SAT (lectura + verbal + escritura) para estudiantes que van hacia la universidad en Estados Unidos fue 1518 (de 2400). Suponga que aproximadamente 45% de todos los graduados de preparatoria toman este examen y que 100 son seleccionados al azar en todo Estados Unidos.[1] ¿Cuál de las siguientes variables aleatorias tiene una distribución binomial aproximada? Si es posible, dé los valores para n y p.

a. El número de estudiantes que tomaron el SAT.

b. Las calificaciones de los 100 estudiantes en el SAT.

c. El número de estudiantes que calificaron arriba del promedio del SAT.

d. El tiempo que tomó a cada estudiante para completar el SAT.

5.23 Sistemas de seguridad El sistema de seguridad de una casa está diseñado para tener un 99% de confiabilidad. Suponga que nueve casas equipadas con este sistema experimentan un intento de robo. Encuentre las probabilidades de estos eventos:

a. Al menos una de las alarmas se activó.

b. Más de siete de las alarmas se activaron.

c. Ocho o menos alarmas se activaron.

5.24 Tipos de sangre En cierta población, 85% de las personas tienen tipo de sangre Rh positivo. Suponga que dos personas de esta población se casan. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos tengan Rh negativo, lo cual hace inevitable que sus hijos tengan Rh negativo?

5.25 Colores de autos La preferencia por el color de un auto cambia con los años y de acuerdo al modelo particular que seleccione el cliente. En un año reciente, suponga que 10% de todos los autos de lujo que se vendieron eran negros. Si 125 autos de ese año y tipo se seleccionan al azar, encuentre las siguientes probabilidades:

a. Al menos cinco autos son negros.

b. A lo sumo seis autos son negros.

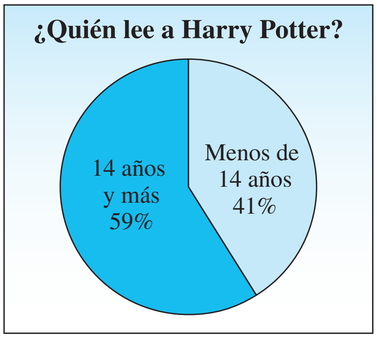
c. Más de cuatro autos son negros.

d. Exactamente cuatro autos son negros.

e. Entre tres y cinco autos (inclusive) son negros.

f. Más de 20 autos no son negros.

5.26 Harry Potter De todos los libros de Harry Potter comprados en un año reciente, alrededor del 60% fueron comprados por lectores de 14 años de edad o más.[2] Si se entrevista a 12 aficionados de Harry Potter que compraron libros ese año y si $p = .6$, encuentre las siguientes probabilidades.



a. Al menos cinco de ellos tenían 14 años o más.

b. Exactamente nueve de ellos tenían 14 años o más.

c. Menos de tres de ellos tenían 14 años o más.

5.27 Cuentas del médico Unos registros muestran que 30% de todos los pacientes ingresados en una clínica médica no pagan sus cuentas y que, en última instancia, esas cuentas son olvidadas. Suponga que $n = 4$ nuevos pacientes representan una selección aleatoria de entre un gran conjunto de prospectos de pacientes atendidos por la clínica. Encuentre estas probabilidades:

a. Las cuentas de todos los pacientes tendrán finalmente que olvidarse.

b. Una tendrá que olvidarse.

c. Ninguna tendrá que olvidarse.

5.28 Cuentas del médico II Considere el problema de pagos al médico del ejercicio 5.27 en un escenario más realista. De todos los pacientes ingresados a una clínica médica, 30% no pagan sus cuentas y las deudas finalmente se olvidan. Si la clínica trata 2000 pacientes diferentes en un periodo de un año, ¿cuál es el número medio (esperado) de deudas que tienen que olvidarse? Si x es el número de deudas olvidadas del grupo de 2000 pacientes, encuentre la varianza y desviación estándar de x. ¿Qué se puede decir acerca de la probabilidad de que x pase de 700? (SUGERENCIA: Use los valores de μ y σ, junto con el teorema de Chebyshev, para contestar esta pregunta.)

5.29 Infestación de la mosca blanca Suponga que 10% de los campos en una región agrícola determinada están infestados con la mosca blanca de la remolacha. Se seleccionan 100 campos de esta región y se inspeccionan para ver si están infestados.

a. ¿Cuál es el número promedio de campos muestreados que están infestados de la mosca blanca?

b. ¿Dentro de qué límites esperaría usted hallar el número de campos infestados, con probabilidad aproximada de 95%?

c. ¿Qué podría usted concluir si encuentra que $x = 25$ campos estuvieran infestados? ¿Es posible que una de las características de un experimento binomial no se satisfaga en este experimento? Explique.

5.30 Preferencias de color en ratones En un experimento de psicología, la investigadora planea probar la preferencia de color en ratones bajo ciertas condiciones experimentales. Ella diseña un laberinto en el que el ratón debe escoger uno de dos caminos, en color ya sea rojo o azul, en cada uno de 10 cruceros. Al final del laberinto, el ratón recibe una recompensa en alimento. La investigadora cuenta el número de veces que el ratón escoge el camino rojo. Si usted fuera la investigadora, ¿cómo usaría esta cuenta para determinar si el ratón tiene alguna preferencia por un color?

5.31 Dolor de espalda Seis de cada 10 personas adultas dicen que el dolor de la espalda baja limita en forma considerable sus actividades atléticas.[3] A una muestra al azar de $n = 8$ adultos se les preguntó si el dolor de la espalda baja limita en forma considerable sus actividades atléticas. La salida impresa del *MINITAB* muestra las probabilidades acumulativas e individuales.

Salida impresa del *MINITAB* para el ejercicio 5.31

Función acumulativa de distribución

Binomial with n = 8 and p = 0.6

x	P(X <= x)
0	0.00066
1	0.00852
2	0.04981
3	0.17367
4	0.40591
5	0.68461
6	0.89362
7	0.98320
8	1.00000

Función de densidad de probabilidad

Binomial with n = 8 and p = 0.6

x	P(X = x)
0	0.000655
1	0.007864
2	0.041288
3	0.123863
4	0.232243
5	0.278692
6	0.209019
7	0.089580
8	0.016796

a. Use la fórmula binomial para hallar la probabilidad de que los ocho indiquen que el dolor de la espalda baja era un factor limitante en sus actividades atléticas.

b. Confirme los resultados del inciso (**a**) usando la salida impresa del *MINITAB*.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que a los sumo siete individuos digan que el dolor de la espalda baja es un factor limitante en sus actividades atléticas?

5.32 Comida rápida y gasolineras 40% de los estadounidenses que viajan en auto buscan gasolineras y mercados de alimentos que sean cercanos o visibles desde la carretera. Suponga que a una muestra aleatoria de $n = 25$ estadounidenses que viajan en auto se les pregunta cómo determinan dónde detenerse para tomar alimentos y cargar gasolina. Sea x el número de la muestra que responden que buscan gasolineras y mercados de alimentos que sean cercanos o visibles desde la carretera.

a. ¿Cuáles son la media y varianza de x?

b. Calcule el intervalo $\mu \pm 2\sigma$. ¿Cuáles valores de la variable aleatoria binomial x caen en este intervalo?

c. Encuentre $P(6 \leq x \leq 14)$. ¿Cómo se compara esto con la fracción del intervalo $\mu \pm 2\sigma$ para cualquier distribución? ¿Y para distribuciones en forma de montículo?

5.33 Prueba del gusto por el PTC La prueba del gusto por el PTC (feniltiocarbamida) es un ejercicio favorito para toda clase de genética humana. Se ha establecido que un solo gen determina la característica y que 70% de los estadounidenses son "probadores", en tanto que 30% son "no probadores". Suponga que se escogen 20 estadounidenses y se someten a la prueba del gusto del PTC.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que 17 o más sean "probadores"?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que 15 o menos sean "probadores"?

5.34 El mejor amigo del hombre Según la Sociedad protectora de animales de Estados Unidos, hay aproximadamente 65 millones de perros con dueño en Estados Unidos y alrededor del 40% de todas las familias en Estados Unidos tienen al menos un perro.[4] Suponga que la cifra del 40% es correcta y que 15 familias se seleccionan al azar para un estudio sobre propiedad de mascotas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente ocho de las familias tenga al menos un perro?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos cuatro de las familias tenga al menos un perro?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 10 familias tenga al menos un perro?

5.3 LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE POISSON

Otra variable aleatoria discreta que tiene numerosas aplicaciones prácticas es la **variable aleatoria de Poisson**. Su distribución de probabilidad da un buen modelo para datos que representa el número de sucesos de un evento especificado en una unidad determinada de tiempo o espacio. A continuación veamos algunos ejemplos de experimentos para los cuales la variable aleatoria x puede ser modelada por la variable aleatoria de Poisson:

- El número de llamadas recibidas por un conmutador durante un tiempo determinado
- El número de bacterias por volumen pequeño de fluido
- El número de llegadas de clientes al mostrador de una caja de pago en un minuto determinado

- El número de descomposturas de una máquina durante un día determinado
- El número de accidentes de tránsito en un crucero dado durante un tiempo determinado

En cada uno de estos ejemplos, **x representa el número de eventos que ocurren en un periodo o espacio, durante el cual se puede esperar que ocurra un promedio de μ de estos eventos**. Las únicas suposiciones necesarias, cuando uno usa la distribución de Poisson para modelar experimentos tales como éstos, son que las cuentas o eventos ocurren **al azar e independientemente** unos de otros. La fórmula para la distribución de probabilidad de Poisson, así como su media y varianza, se dan a continuación.

LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE POISSON

Sea μ el número promedio de veces que ocurre un evento en cierto tiempo o espacio. La probabilidad de k sucesos de este evento es

$$P(x = k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

para valores de $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. La media y desviación estándar de la variable aleatoria de Poisson x son

Media: μ

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{\mu}$

MI CONSEJO

Utilice la fórmula Poisson o la tabla 2 para calcular probabilidades de Poisson.

El símbolo $e = 2.71828\ldots$ se evalúa usando su calculadora científica, que debe tener una función como e^x. Para cada valor de k, se pueden obtener las probabilidades individuales para la variable aleatoria de Poisson, igual que como hicimos para la variable aleatoria binomial.

Alternativamente, se pueden usar **tablas acumulativas de Poisson** (tabla 2 del apéndice I) o probabilidades acumulativas o individuales generadas por el *MINITAB*. Estas dos opciones son por lo general más cómodas que hacer el cálculo manualmente. Los procedimientos son semejantes a los empleados para la variable aleatoria binomial.

MI ENTRENADOR PERSONAL

¿Cómo calculo probabilidades de Poisson usando la fórmula?

1. Encuentre el valor necesario de μ.
2. Haga una lista de valores de x en su evento.
3. Para cada valor de x, sustituya $x = k$ en la fórmula, $P(x = k) = \dfrac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$.
4. Sume las probabilidades individuales en (3) para hallar la probabilidad de interés.

Repertorio de ejercicios

A. Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 1.5$. Calcule las siguientes probabilidades usando la tabla siguiente:

Probabilidad	Fórmula	Valor calculado
$P(x = 0)$	$\dfrac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ________	
$P(x = 1)$	$\dfrac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ________	
P(1 o menos éxitos)	$P(x =$ ____$) + P(x =$ ____$)$	

¿Cómo uso la tabla 2 para calcular probabilidades de Poisson?

1. Encuentre el valor necesario de μ. Aísle la columna apropiada de la tabla 2.
2. La tabla 2 da $P(x \le k)$ en el renglón marcado k. Reescriba la probabilidad que necesita para que esté en esta forma.
   - Haga una lista de los valores de x en su evento.
   - De la lista, escriba el evento como la diferencia de dos probabilidades:

$$P(x \le a) - P(x \le b) \quad \text{para } a > b$$

o el complemento del evento:

$$1 - P(x \le a)$$

o sólo el evento mismo:

$$P(x \le a) \text{ o } P(x < a) = P(x \le a - 1)$$

Repertorio de ejercicios

B. Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 1.5$. Separe la columna apropiada en la tabla 2 y llene las probabilidades siguientes. Una de las probabilidades, $P(x \le 3)$, ya está llenada.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(x \le k)$				.934				

C. Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente. El tercer problema ya está hecho.

El problema	Lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
3 o menos				
3 o más				
Más de 3	4, 5, 6, . . .	$P(x > 3)$	$1 - P(x \le 3)$	.066
Menos de 3				
Entre 2 y 4 (inclusive)				
Exactamente 3				

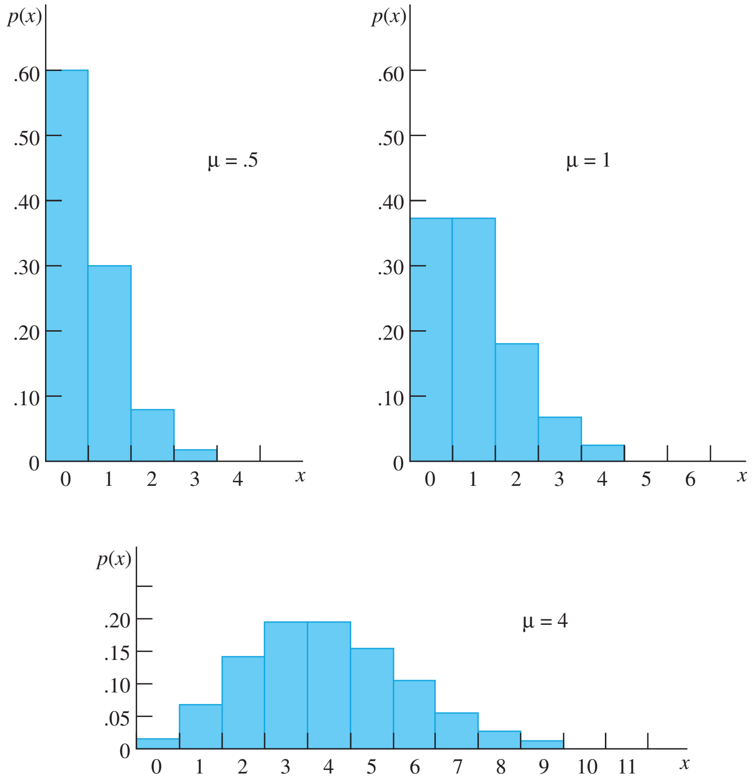
Informe de progreso

- ¿Todavía tiene problemas? Trate de nuevo usando el repertorio de ejercicios del final de esta sección.
- ¿Ya domina las probabilidades binomiales? Puede saltarse el repertorio de ejercicios del final de esta sección.

Las respuestas están al final de este libro.

Una vez calculados los valores para $p(x)$, puede usted usarlos para construir un histograma de probabilidad para la variable aleatoria x. En la figura 5.5 se presentan gráficas de la distribución de probabilidad de Poisson para $\mu = .5$, 1 y 4.

FIGURA 5.5
Distribuciones de probabilidad de Poisson para $\mu = .5$, 1 y 4



EJEMPLO 5.8

El número promedio de accidentes de tránsito en cierto crucero de carretera es dos por semana. Suponga que el número de accidentes sigue una distribución de Poisson con $\mu = 2$.

1. Encuentre la probabilidad de que no haya accidentes en este crucero de carretera durante un periodo de 1 semana.
2. Encuentre la probabilidad de que a lo sumo haya tres accidentes en esta sección de carretera durante un periodo de 2 semanas.

Solución

1. El número promedio de accidentes por semana es $\mu = 2$. Por tanto, la probabilidad de que no haya accidentes en esta sección de carretera durante 1 semana determinada es

$$P(x = 0) = p(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} = .13533$$

2. Durante un periodo de 2 semanas, el número promedio de accidentes en esta sección de carretera es $2(2) = 4$. La probabilidad de que a lo sumo haya tres accidentes durante un periodo de 2 semanas es

$$P(x \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$$

donde

$$p(0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = .018316 \quad p(2) = \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = .146525$$

$$p(1) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = .073263 \quad p(3) = \frac{4^3 e^{-4}}{3!} = .195367$$

Por tanto,

$$P(x \leq 3) = .018316 + .073263 + .146525 + .195367 = .433471$$

Este valor podría leerse directamente de la tabla 2 del apéndice I, indicando $\mu = 4$ y $k = 3$, como $P(x \leq 3) = .433$.

En la sección 5.2, utilizamos las tablas binomiales acumulativas para simplificar el cálculo de probabilidades binomiales. Desafortunadamente, en situaciones prácticas, con frecuencia n es grande y no se dispone de tablas.

MI CONSEJO

Se puede estimar probabilidades binomiales con la de Poisson cuando n es grande y p es pequeña.

LA APROXIMACIÓN DE POISSON A LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La distribución de probabilidad de Poisson da una aproximación sencilla, fácil de calcular y precisa a probabilidades binomiales cuando n es grande y $\mu = np$ es pequeña, de preferencia con $np < 7$. Una aproximación apropiada para valores más grandes de $\mu = np$ se da en el capítulo 6.

EJEMPLO 5.9

Suponga que una compañía de seguros de vida asegura las vidas de 5000 hombres de 42 años de edad. Si estudios actuariales muestran que la probabilidad de que cualquier hombre de 42 años muera en un año determinado es .001, encuentre la probabilidad exacta de que la compañía tendrá que pagar $x = 4$ reclamaciones durante un año determinado.

Solución La probabilidad exacta está dada por la distribución binomial como

$$P(x = 4) = p(4) = \frac{5000!}{4!4996!}(.001)^4(.999)^{4996}$$

para la cual no se dispone de tablas binomiales. Calcular $P(x = 4)$ sin ayuda de una computadora sería muy lento, pero la distribución de Poisson se puede usar para dar una buena aproximación para $P(x = 4)$. Calculando $\mu = np = (5000)(.001) = 5$ y sustituyendo en la fórmula para la distribución de probabilidad de Poisson, tenemos

$$p(4) \approx \frac{\mu^4 e^{-\mu}}{4!} = \frac{5^4 e^{-5}}{4!} = \frac{(625)(.006738)}{24} = .175$$

El valor de $p(4)$ podría obtenerse también usando la tabla 2 del apéndice I con $\mu = 5$ como

$$p(4) = P(x \leq 4) - P(x \leq 3) = .440 - .265 = .175$$

EJEMPLO 5.10

Una fabricante de podadoras para el pasto compra motores de 1 hp y 2 ciclos, en lotes de 1000, a un proveedor. Ella entonces equipa cada una de las podadoras producidas por su planta con uno de los motores. La historia muestra que la probabilidad de que cualquier motor del proveedor resulte no satisfactorio es .001. En un embarque de 1000 motores, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso? ¿Hay tres o más? ¿Hay cuatro?

Solución Éste es un experimento binomial con $n = 1000$ y $p = .001$. El número esperado de motores defectuosos en un embarque de $n = 1000$ motores es $\mu = np = (1000)(.001) = 1$. Como éste es un experimento binomial con $np < 7$, la probabilidad de x motores defectuosos en este embarque puede aproximarse con

$$P(x = k) = p(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} = \frac{1^k e^{-1}}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!}$$

Por tanto,

$$p(0) \approx \frac{e^{-1}}{0!} = \frac{.368}{1} = .368$$

$$p(3) \approx \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{.368}{6} = .061$$

$$p(4) \approx \frac{e^{-1}}{4!} = \frac{.368}{24} = .015$$

Las probabilidades individuales de Poisson para $\mu = 1$, junto con las probabilidades binomiales individuales para $n = 1000$ y $p = .001$, fueron generadas por *MINITAB* y se muestran en la figura 5.6. Las probabilidades individuales, aun cuando se calculan con fórmulas totalmente diferentes, son casi iguales. Las probabilidades binomiales exactas están en la sección izquierda de la figura 5.6, y las aproximaciones Poisson están a la derecha. Observe que el *MINITAB* deja de calcular probabilidades una vez que el valor sea igual a cero dentro de un nivel de precisión asignado previamente.

FIGURA 5.6
Salida impresa del *MINITAB* de probabilidades binomiales y de Poisson

Función de densidad de probabilidad

```
Binomial with n = 1000 and p = 0.001

 x   P( X = x )
 0     0.367695
 1     0.368063
 2     0.184032
 3     0.061283
 4     0.015290
 5     0.003049
 6     0.000506
 7     0.000072
 8     0.000009
 9     0.000001
10     0.000000
```

Función de densidad de probabilidad

```
Poisson with mean = 1

 x   P( X = x )
 0     0.367879
 1     0.367879
 2     0.183940
 3     0.061313
 4     0.015328
 5     0.003066
 6     0.000511
 7     0.000073
 8     0.000009
 9     0.000001
10     0.000000
```

5.3 EJERCICIOS

REPERTORIO DE EJERCICIOS

Estos ejercicios se refieren a la sección Mi entrenador personal de la página 198.

5.35 Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 2.5$. Calcule las siguientes probabilidades con la tabla siguiente.

Probabilidad	Fórmula	Valor calculado
$P(x = 0)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______________	
$P(x = 1)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______________	
$P(x = 2)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______________	
P(2 o menos éxitos)	$P(x =$ ____$) + P(x =$ ____$) + P(x =$ ____$)$	

5.36 Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 3$. Calcule las siguientes probabilidades con la tabla siguiente.

Probabilidad	Fórmula	Valor calculado
$P(x = 0)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______________	
$P(x = 1)$	$\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} =$ ______________	
P(más de 1 éxito)	$1 - [P(x =$ ____$) + P(x =$ ____$)]$	

5.37 Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 3$. Separe la columna apropiada en la tabla 2 y llene las probabilidades siguientes.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x \leq k)$											

Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente.

El problema	Lista de valores de x	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
3 o menos		$P(x \leq$ ___$)$		
3 o más		$P(x \geq$ ___$)$	$1 - P(x \leq$ ___$)$	
Más de 3		$P(x >$ ___$)$	$1 - P(x \leq$ ___$)$	
Menos de 3		$P(x <$ ___$)$	$P(x \leq$ ___$)$	
Entre 3 y 5 (inclusive)		$P($___ $\leq x \leq$ ___$)$	$P(x \leq$ ___$) - P(x \leq$ ___$)$	
Exactamente 3		$P(x =$ ___$)$	$P(x \leq$ ___$) - P(x \leq$ ___$)$	

5.38 Considere una variable aleatoria de Poisson con $\mu = 0.8$. Separe la columna apropiada en la tabla 2 y llene las probabilidades siguientes.

k	0	1	2	3	4	5
$P(x \leq k)$						

Llene los espacios en blanco en la tabla siguiente.

El problema	Lista de valores de *x*	Escriba la probabilidad	Reescriba la probabilidad (si es necesario)	Encuentre la probabilidad
Exactamente 2				
Más de 2				
2 o más				
Menos de 2				
Entre 2 y 4 (inclusive)				
2 o menos				

TÉCNICAS BÁSICAS

5.39 Sea x una variable aleatoria de Poisson con media $\mu = 2$. Calcule estas probabilidades:

a. $P(x = 0)$ **b.** $P(x = 1)$

c. $P(x > 1)$ **d.** $P(x = 5)$

5.40 Sea x una variable aleatoria de Poisson con media $\mu = 2.5$. Use la tabla 2 del apéndice I para calcular estas probabilidades:

a. $P(x \geq 5)$ **b.** $P(x < 6)$

c. $P(x = 2)$ **d.** $P(1 \leq x \leq 4)$

5.41 Poisson *vs.* binomial Sea x una variable aleatoria con $n = 20$ y $p = .1$.

a. Calcule $P(x \leq 2)$ usando la tabla 1 del apéndice I para obtener la probabilidad binomial exacta.

b. Use la aproximación de Poisson para calcular $P(x \leq 2)$.

c. Compare los resultados de los incisos a) y b). ¿Es precisa la aproximación?

5.42 Poisson *vs* binomial II Para ilustrar qué tan bien la distribución de probabilidad de Poisson aproxima la distribución binomial de probabilidad, calcule los valores aproximados de Poisson para $p(0)$ y $p(1)$ para una distribución binomial de probabilidad con $n = 25$ y $p = .05$. Compare las respuestas contra los valores exactos obtenidos de la tabla 1 del apéndice I.

APLICACIONES

5.43 Seguridad en un aeropuerto El mayor número de pequeños aviones de vuelos cortos en aeropuertos importantes ha aumentado la preocupación por la seguridad en el aire. Un aeropuerto de la región este ha registrado un promedio mensual de cinco accidentes que casi ocurren en aterrizajes y despegues en los últimos 5 años.

a. Encuentre la probabilidad de que durante un mes determinado no haya accidentes que casi ocurren en aterrizajes y despegues en el aeropuerto.

b. Encuentre la probabilidad de que durante un mes determinado haya cinco accidentes que casi ocurren.

c. Encuentre la probabilidad de que haya al menos cinco accidentes que casi ocurren durante un mes particular.

5.44 Cuidados intensivos El número x de personas ingresadas a una unidad de cuidados intensivos en un hospital particular, en un día, tiene una distribución de probabilidad de Poisson con media igual a cinco personas por día.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de personas ingresadas a una unidad de cuidados intensivos en un hospital particular, en un día particular, sea dos? ¿Menor o igual a dos?

b. ¿Es probable que x exceda de 10? Explique.

5.45 Propenso a accidentes Los padres preocupados porque sus hijos son "propensos a accidentes" pueden estar tranquilos, de acuerdo a un estudio realizado por el Departamento de Pediatría de la Universidad de California, San Francisco. Los niños que se lesionan dos o más veces tienden a sufrir estas lesiones durante un tiempo relativamente limitado, por lo general un año o menos. Si el número promedio de lesiones por año para niños en edad escolar es de dos, ¿cuáles son las probabilidades de estos eventos?

a. Un niño sufrirá dos lesiones durante el año.

b. Un niño sufrirá dos o más lesiones durante el año.

c. Un niño sufrirá a lo sumo una lesión durante el año.

5.46 Propenso a accidentes, continúa Consulte el ejercicio 5.45.

a. Calcule la media y desviación estándar para x, el número de lesiones por año sufridas por un niño en edad escolar.

b. ¿Dentro de qué límites esperaría usted que caiga el número de lesiones por año?

5.47 Bacterias en muestras de agua Si una gota de agua se pone en la platina y se examina bajo un microscopio, el número x de un tipo particular de bacteria presente se ha encontrado que tiene una distribución de probabilidad de Poisson. Suponga que la cantidad máxima permisible por espécimen de agua para este tipo de bacteria es cinco. Si la cantidad media para el suministro de agua de usted es de dos y usted prueba una sola muestra, ¿es probable que la cantidad exceda la cantidad máxima permisible? Explique.

5.48 Brote de *E. coli* Una mayor investigación y discusión se han concentrado sobre el número de enfermedades que involucran al organismo *Escherichia coli* (01257:H7), que causa un colapso de glóbulos rojos sanguíneos y hemorragia intestinal en sus víctimas.[5] De acuerdo con el Centro para Control de Enfermedades, un estimado de 73 mil casos por infección de *E. coli* y 61 fallecimientos al año ocurren en Estados Unidos. Un brote en 2006 se rastreó hasta cerdos salvajes, que dispersaron la bacteria en un campo de espinacas en California, enfermó a 204 personas en 26 estados y 1 en una provincia canadiense.[6] Los brotes han ocurrido a un porcentaje de 2.5 por 100 mil. Supongamos que este porcentaje no ha cambiado.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo cinco casos de *E. coli* por 100 mil se informen en California este año?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que más de cinco casos de *E. coli* por 100 mil se informen en California este año?

c. Aproximadamente 95% de los sucesos de *E. coli* comprenden a lo sumo ¿cuántos casos?

5.4 LA DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA DE PROBABILIDAD

Supongamos que usted está seleccionando una muestra de elementos de una población y que registra si cada elemento posee o no posee cierta característica. Usted está registrando la típica información de "éxito" o "fracaso" que se encuentra en el experimento binomial. El estudio de la muestra del ejemplo 5.1, así como el muestreo para ver si hay defectos en el ejemplo 5.2., son ilustraciones de estas situaciones de muestreo.

Si el número de elementos de la población es grande con respecto al número en la muestras (como en el ejemplo 5.1), la probabilidad de seleccionar un éxito en un solo intento es igual a la proporción p de éxitos en la población. Debido a que la población es grande con respecto al tamaño muestral, esta probabilidad permanecerá constante (para todos los fines prácticos) de un intento a otro y el número x de éxitos en la muestra seguirá una distribución binomial de probabilidad. No obstante, si el número de elementos en la población es pequeño con respecto al tamaño muestral ($n/N \geq 0.5$), la probabilidad de un éxito para un intento determinado depende de los resultados de intentos precedentes. Entonces el número x de éxitos sigue lo que se conoce como una **distribución hipergeométrica de probabilidad**.

Es fácil visualizar la **variable hipergeométrica aleatoria *x*** si se considera un tazón que contenga M esferas rojas y $N - M$ esferas blancas, para un *total de N* esferas en el tazón. Usted selecciona n esferas del tazón y registra x, el número de esferas rojas que vea. Si ahora define un "éxito" como una esfera roja, tendrá un ejemplo de la variable aleatoria x hipergeométrica.

La fórmula para calcular la probabilidad de exactamente k éxitos en n intentos se da a continuación.

LA DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA DE PROBABILIDAD

Una población contiene M éxitos y $N - M$ fracasos. La probabilidad de exactamente k éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n es

$$P(x = k) = \frac{C_k^M C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N}$$

para valores de k que dependen de N, M y n con

$$C_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

La media y la varianza de una variable aleatoria hipergeométrica son muy semejantes a las de una variable aleatoria binomial con una corrección para el tamaño finito de población:

$$\mu = n\left(\frac{M}{N}\right)$$

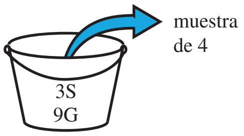
$$\sigma^2 = n\left(\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

EJEMPLO 5.11

Un recipiente tiene 12 botellas de vinos, 3 de las cuales contienen vino que se ha echado a perder. Una muestra de 4 botellas se selecciona al azar de entre la caja.

1. Encuentre la distribución de probabilidad para x, el número de botellas de vino echado a perder de la muestra.
2. ¿Cuáles son la media y la varianza de x?

MI CONSEJO



S = V (vinagre)
G = B (buen estado)

Solución Para este ejemplo, $N = 12$, $n = 4$, $V = 3$ y $(N - M) = B = 9$. Entonces.

$$p(x) = \frac{C_x^3 C_{4-x}^9}{C_4^{12}}$$

1. Los valores posibles para x son 0, 1, 2 y 3, con probabilidades

$$p(0) = \frac{C_0^3 C_4^9}{C_4^{12}} = \frac{1(126)}{495} = .25$$

$$p(1) = \frac{C_1^3 C_3^9}{C_4^{12}} = \frac{3(84)}{495} = .51$$

$$p(2) = \frac{C_2^3 C_2^9}{C_4^{12}} = \frac{3(36)}{495} = .22$$

$$p(3) = \frac{C_3^3 C_1^9}{C_4^{12}} = \frac{1(9)}{495} = .02$$

2. La media está dada por

$$\mu = 4\left(\frac{3}{12}\right) = 1$$

y la varianza

$$\sigma^2 = 4\left(\frac{3}{12}\right)\left(\frac{9}{12}\right)\left(\frac{12-4}{11}\right) = .5455$$

EJEMPLO 5.12

Un producto industrial particular se envía en lotes de 20. Hacer pruebas para determinar si un artículo es defectuoso o costoso; por tanto, el fabricante muestrea la producción en lugar de usar un plan de inspección del 100%. Un plan de muestreo construido para reducir al mínimo el número de piezas defectuosas, enviadas a los clientes, exige muestrear cinco artículos de entre cada lote y rechazar el lote si se observa más de una pieza defectuosa. (Si el lote es rechazado, cada artículo del lote se prueba entonces.) Si un lote contiene cuatro defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que sea aceptado?

Solución Sea x el número de defectuosos en la muestra. Entonces $N = 20$, $M = 4$, $(N - M) = 16$ y $n = 5$. El lote será rechazado si $x = 2$, 3 o 4. Entonces

$$P(\text{aceptar el lote}) = P(x \leq 1) = p(0) + p(1) = \frac{C_0^4 C_5^{16}}{C_5^{20}} + \frac{C_1^4 C_4^{16}}{C_5^{20}}$$

$$= \frac{\left(\frac{4!}{0!4!}\right)\left(\frac{16!}{5!11!}\right)}{\frac{20!}{5!15!}} + \frac{\left(\frac{4!}{1!3!}\right)\left(\frac{16!}{4!12!}\right)}{\frac{20!}{5!15!}}$$

$$= \frac{91}{323} + \frac{455}{969} = .2817 + .4696 = .7513$$

5.4 EJERCICIOS

TÉCNICAS BÁSICAS

5.49 Evalúe estas probabilidades:

a. $\dfrac{C_1^3 C_1^2}{C_2^5}$ **b.** $\dfrac{C_2^4 C_1^3}{C_3^7}$ **c.** $\dfrac{C_4^5 C_0^3}{C_4^8}$

$\boxed{\textbf{5.50}}$ Sea x el número de éxitos observado en una muestra de $n = 5$ artículos seleccionados de entre $N = 10$. Suponga que, de los $N = 10$ elementos, 6 eran considerados "éxitos".

a. Encuentre la probabilidad de no observar éxitos.

b. Encuentre la probabilidad de observar al menos dos éxitos.

c. Encuentre la probabilidad de observar dos éxitos.

5.51 Sea x una variable aleatoria hipergeométrica con $N = 15$, $n = 3$ y $M = 4$.

a. Calcule $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$ y $p(3)$.

b. Construya el histograma de probabilidad para x.

c. Use las fórmulas dadas en la sección 5.4 para calcular $\mu = E(x)$ y σ^2.

d. ¿Qué proporción de la población de mediciones cae en el intervalo $(\mu \pm 2\sigma)$? ¿En el intervalo $(\mu \pm 3\sigma)$? ¿Estos resultados concuerdan con los dados por el teorema de Chebyshev?

$\boxed{\textbf{5.52}}$ **Selección de dulces** Un plato de dulces contiene cinco dulces azules y tres rojos. Un niño los alcanza y selecciona tres dulces sin verlos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya dos dulces azules y uno rojo en la selección?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los dulces sean rojos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los dulces sean azules?

APLICACIONES

$\boxed{\textbf{5.53}}$ **Chips de computadora defectuosos** Una pieza de equipo electrónico contiene seis chips de computadora, dos de los cuales están defectuosos. Tres chips de computadora se seleccionan para inspeccionarlos y se registra el número de los defectuosos. Encuentre la distribución de probabilidad para x, el número de chips de computadora defectuosos. Compare sus resultados con las respuestas obtenidas en el ejercicio 4.90.

5.54 **¿Sesgo en el género?** Una compañía tiene cinco solicitantes para dos puestos de trabajo: dos mujeres y tres hombres. Suponga que los cinco solicitantes están igualmente calificados y que no se da preferencia para escoger género alguno. Sea x igual al número de mujeres escogido para ocupar las dos posiciones.

a. Escriba la fórmula para $p(x)$, la distribución de probabilidad de x.

b. ¿Cuáles son la media y la varianza de esta distribución?

c. Construya un histograma de probabilidad para x.

5.55 **Credenciales para enseñanza** En el sur de California, un creciente número de personas que buscan una credencial para enseñanza están escogiendo internados pagados en los tradicionales programas estudiantiles para enseñanza. Un grupo de ocho candidatos para tres posiciones locales de enseñanza estaba formado por cinco candidatos, que se habían inscrito en internados pagados y tres candidatos que se habían inscrito en programas tradicionales estudiantiles para enseñanza. Supongamos que los ocho candidatos están igualmente calificados para las posiciones. Represente con x el número de candidatos capacitados en un internado que son contratados para estas tres posiciones.

a. ¿La x tiene una distribución binomial o una distribución hipergeométrica? Apoye su respuesta.

b. Encuentre la probabilidad de que tres candidatos capacitados en internado sean contratados para estas posiciones.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los tres contratados sea capacitado en internado?

d. Encuentre $P(x \leq 1)$.

5.56 Tratamiento a semillas Es frecuente que las semillas sean tratadas con un fungicida para protegerlas de ambientes mal drenados, húmedos. En un intento a pequeña escala antes de un experimento a gran escala para determinar qué dilución del fungicida aplicar, cinco semillas tratadas y cinco no tratadas se plantaron en suelo arcilloso y se registró el número de plantas que emergieron de las semillas tratadas y de las no tratadas. Suponga que la dilución no fue eficaz y sólo emergieron cuatro plantas. Represente con x el número de plantas que emergieron de semillas tratadas.

a. Encuentre la probabilidad de que $x = 4$.

b. Encuentre $P(x \leq 3)$.

c. Encuentre $P(2 \leq x \leq 3)$.

REPASO DEL CAPÍTULO

Conceptos y fórmulas clave

I. La variable aleatoria binomial

1. **Cinco características:** n intentos independientes idénticos, cada uno resultando ya sea en *éxito* (S) o en *fracaso* (F); la probabilidad de éxito es p y es constante de un intento a otro; y x es el número de éxitos en n intentos.
2. **Cálculo de probabilidades binomiales**
   a. Fórmula: $P(x = k) = C^n_k p^k q^{n-k}$
   b. Tablas binomiales acumulativas
   c. Probabilidades individuales y acumulativas usando *MINITAB*
3. Media de la variable aleatoria binomial: $\mu = np$
4. Varianza y desviación estándar: $\sigma^2 = npq$ y $\sigma = \sqrt{npq}$

II. La variable aleatoria de Poisson

1. El número de eventos que ocurren en un periodo o espacio, durante el cual se espera que ocurra un promedio de μ eventos.
2. **Cálculo de probabilidades de Poisson**
   a. Fórmula: $P(x = k) = \dfrac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$
   b. Tablas acumulativas de Poisson
   c. Probabilidades individuales y acumulativas usando *MINITAB*
3. Media de la variable aleatoria de Poisson: $E(x) = \mu$
4. Varianza y desviación estándar: $\sigma^2 = \mu$ y $\sigma = \sqrt{\mu}$
5. Las probabilidades binomiales se pueden aproximar con probabilidades de Poisson cuando $np < 7$, usando $\mu = np$.

III. La variable aleatoria hipergeométrica

1. El número de éxitos en una muestra de tamaño n de una población finita que contiene M éxitos y $N - M$ fracasos.
2. Fórmula para la probabilidad de k éxitos en n intentos:
$$P(x = k) = \frac{C^M_k C^{N-M}_{n-k}}{C^N_n}$$
3. Media de la variable aleatoria hipergeométrica:
$$\mu = n\left(\frac{M}{N}\right)$$
4. Varianza y desviación estándar:
$$\sigma^2 = n\left(\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$