Optimointimallin matemaattinen johto

Elias Ervamaa

17. tammikuuta 2026

1 Johdanto

Tässä dokumentissa johdetaan analyyttinen ratkaisu kahden jonon resurssien allokointiongelmalle. Tarkastelu etenee kahdessa vaiheessa: ensin johdetaan yksittäisen M/M/1-jonon odotusajan lauseke, minkä jälkeen ratkaistaan optimointiongelma Lagrangen kertoimien menetelmällä.

1.1 Muuttujat

Mallissa käytetään seuraavia merkintöjä:

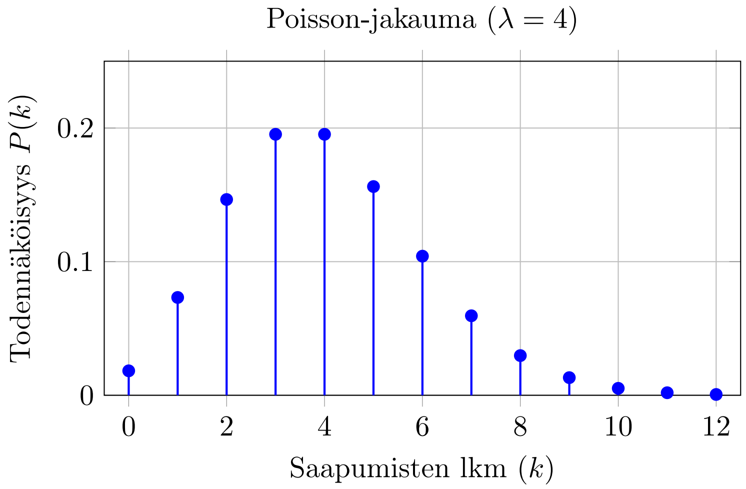
- $\lambda_i \in \mathbb{N}$: Saapumisintensiteetti (asiakasta / aikayksikkö).
- $\mu_i \in \mathbb{R}_+$: Palvelunopeus (palvelua / aika / työntekijä).
- $x_i \in \mathbb{R}_+$: Työntekijöiden määrä.
- $w_i \in \mathbb{R}_+$: Odotusajan painokerroin ("haittakerroin").
- $c_i \in \mathbb{R}_+$: Työntekijän yksikkökustannus.
- $B \in \mathbb{R}_+$: Kokonaisbudjetti.

2 Todennäköisyysjakaumat

Saapumisprosessi (Poisson)

Asiakkaiden saapuminen noudattaa Poisson-prosessia. Todennäköisyys sille, että aikayksikössä (t) saapuu tasan k asiakasta, on:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

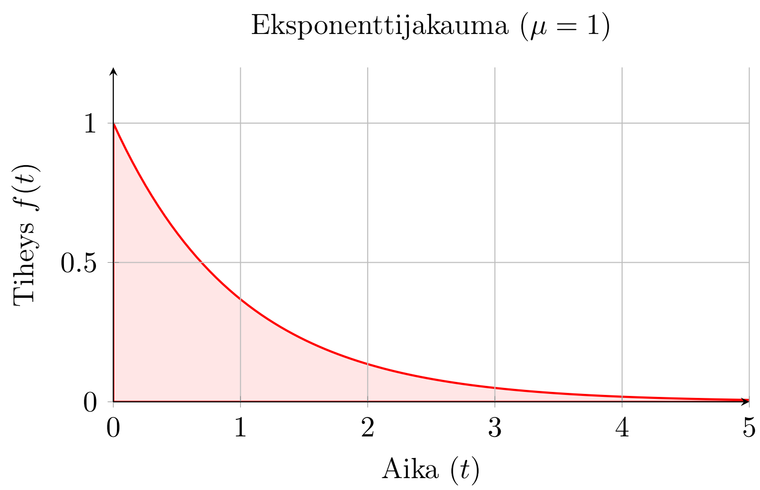


Palveluajat (Eksponentti)

Palveluajat T noudattavat eksponenttijakaumaa. Tiheysfunktio on:

$$f(t; \mu) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

Tässä μ kuvaa palvelunopeutta (rate), joten keskimääräinen palveluaika on $E[T] = 1/\mu$.



3 M/M/1-jonon johtaminen

Tarkastellaan yhtä jonoa. Määritellään liikennekuorma $\rho = \frac{\lambda}{x\mu}$.

3.1 Tasapainoehto

Jotta jono pysyisi tasapainotilassa eikä kasvaisi rajatta, on $x > \frac{\lambda}{\mu}$ (eli $\rho < 1$). Oletetaan, että on kulunut tietty aika, jonka jälkeen jonon jakauma on vakaassa tilassa:

Tasapainoehto tilojen $n-1$ ja n välillä (sisäänvirtaus = ulosvirtaus):

$$\begin{aligned} \lambda p_{n-1} &= (x\mu) p_n \\ p_n &= \frac{\lambda}{x\mu} p_{n-1} = \rho p_{n-1} \end{aligned}$$

Iteroimalla tätä rekursiota alkaen tilasta $n = 0$ saadaan yleinen termi:

$$p_n = \rho^n p_0$$

Koska todennäköisyyksien summan täytyy olla 1, saamme äärettömän geometrisen sarjan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1$$

Kun $\rho < 1$, geometrinen sarja suppenee arvoon $\frac{1}{1-\rho}$. Ratkaistaan p_0:

$$p_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad p_0 = 1 - \rho$$

Tällöin lopullinen todennäköisyysjakauma jonon pituudelle n on:

$$p_n = (1-\rho)\rho^n$$

3.2 Odotettu asiakasmäärä L

Olkoon satunnaismuuttuja N asiakkaiden lukumäärä systeemissä. Äsken johdettu p_n on muuttujan N todennäköisyysfunktio, eli $P(N = n) = p_n$. Odotusarvo lasketaan summaamalla jokainen tila painotettuna niiden todennäköisyyksillä:

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n \tag{3}$$

Summan $\sum n\rho^n$ laskemiseksi tarkastellaan tuttua geometrista sarjaa funktiota:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Derivoidaan yhtälö puolittain muuttujan x suhteen:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Kerrotaan puolittain x:llä, jolloin saadaan haluttu muoto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{4}$$

Sijoitetaan tämä tulos (missä $x = \rho$) alkuperäiseen odotusarvon lausekkeeseen:

$$L = (1-\rho) \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$
$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Palautetaan alkuperäiset muuttujat sijoittamalla $\rho = \frac{\lambda}{x\mu}$:

$$L(x) = \frac{\frac{\lambda}{x\mu}}{1 - \frac{\lambda}{x\mu}} = \frac{\lambda}{x\mu - \lambda} \tag{5}$$

Eli odotettu asiakasmäärä on: $\frac{\lambda}{x\mu-\lambda}$

4 Optimointiongelma

4.1 Ongelman asettelu

Minimoitava tavoitefunktio ja rajoitteet:

4.2 Lagrangen menetelmä

Muodostetaan Lagrangen funktio $\mathcal{L}(x_1, x_2, \alpha)$:

Ratkaistaan KKT-ehdot (osittaisderivaatat nollaksi):

4.3 Lopputulos