Optimointimallin matemaattinen johto

Elias Ervamaa

18. tammikuuta 2026

1 Johdanto

Tässä dokumentissa johdetaan analyyttinen ratkaisu kahden jonon resurssien allokointiongelmalle. Tarkastelu etenee kahdessa vaiheessa: ensin johdetaan yksittäisen M/M/1-jonon odotusajan lauseke, minkä jälkeen ratkaistaan optimointiongelma Lagrangen kertoimien menetelmällä.

1.1 Muuttujat

Mallissa käytetään seuraavia merkintöjä:

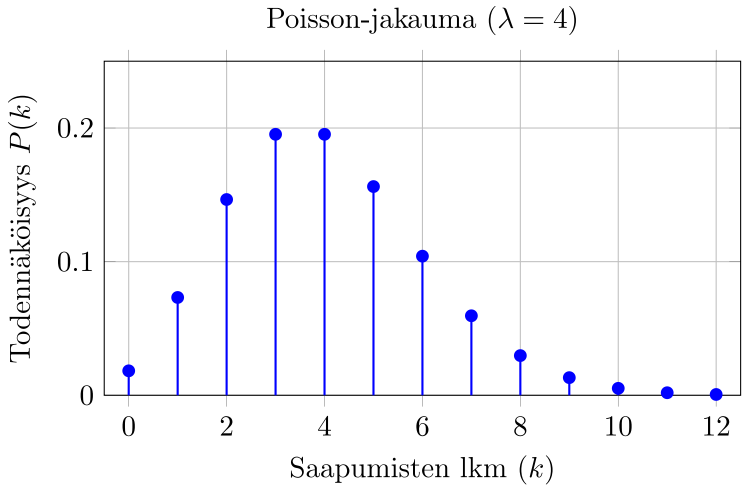
- $\lambda_i \in \mathbb{N}$: Saapumisintensiteetti (asiakasta / aikayksikkö).
- $\mu_i \in \mathbb{R}_+$: Palvelunopeus (palvelua / aika / työntekijä).
- $x_i \in \mathbb{R}_+$: Työntekijöiden määrä.
- $w_i \in \mathbb{R}_+$: Odotusajan painokerroin ("haittakerroin").
- $c_i \in \mathbb{R}_+$: Työntekijän yksikkökustannus.
- $B \in \mathbb{R}_+$: Kokonaisbudjetti.

2 Todennäköisyysjakaumat

Saapumisprosessi (Poisson)

Asiakkaiden saapuminen noudattaa Poisson-prosessia. Todennäköisyys sille, että aikayksikössä (t) saapuu tasan k asiakasta, on:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

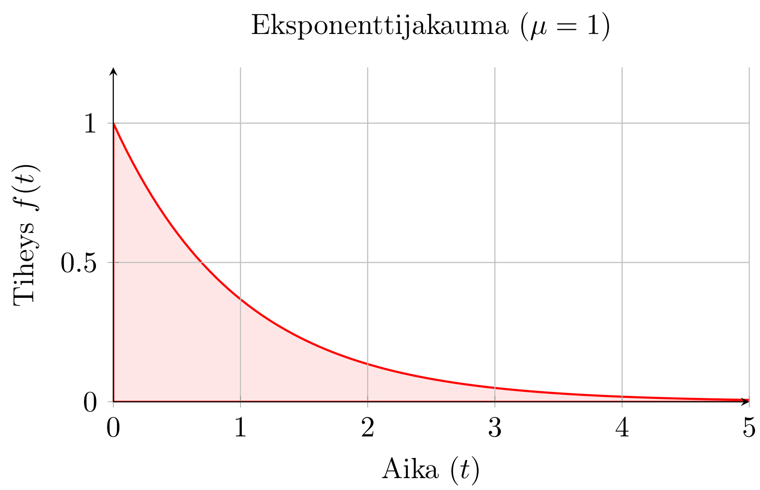


Palveluajat (Eksponentti)

Palveluajat T noudattavat eksponenttijakaumaa. Tiheysfunktio on:

$$f(t; \mu) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

Tässä μ kuvaa palvelunopeutta (rate), joten keskimääräinen palveluaika on $E[T] = 1/\mu$.



3 M/M/1-jonon johtaminen

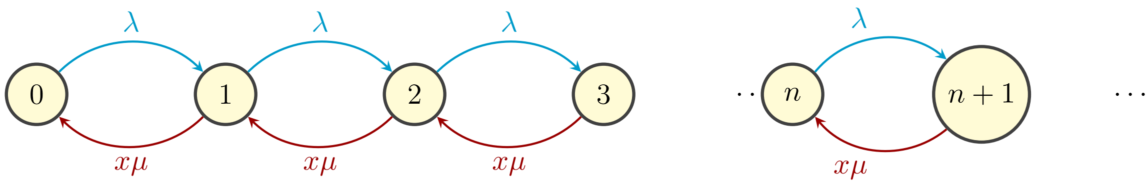
3.1 Tasapainoehto

Mallinnetaan yhtä jonoa jatkuva-aikaisena Markov-ketjuna. Systeemin tila $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ kertoo asiakkaiden kokonaismäärän (jonossa + palvelussa). Systeemin dynamiikka perustuu kahteen voimaan:

- **Saapuminen:** Uusi asiakas saapuu intensiteetillä λ, mikä nostaa tilaa ($n \to n + 1$).
- **Poistuminen:** Palvelu valmistuu intensiteetillä $x\mu$, mikä laskee tilaa ($n \to n - 1$). Tämä on mahdollista vain, kun systeemissä on asiakkaita ($n \geq 1$).

Määritellään liikennekuorma $\rho = \frac{\lambda}{x\mu}$. Systeemin stabiilisuus vaatii ehdon $x > \frac{\lambda}{\mu}$ (eli $\rho < 1$). Oletetaan, että systeemi on ollut toiminnassa riittävän kauan, jolloin alkutilanteen vaikutus on hävinnyt ja systeemi on saavuttanut stokastisen tasapainon. Tämä tapahtuu koska $\rho < 1$, jono ei kasva äärettömyyksiin, vaan todennäköisyysjakauma p_n stabiloituu ajasta riippumattomaksi vakiojakaumaksi. Tässä vakaassa tilassa todennäköisyysvirta tilojen välillä tasaantuu: pitkällä aikavälillä keskimääräinen siirtymä mihin tahansa tilaan n täytyy olla yhtä suuri kuin siirtymä sieltä pois.

Voimme visualisoida tämän tilakaaviona, jossa ympyrät kuvaavat tiloja ja nuolet siirtymäintensiteettejä:



Tarkastellaan leikkausta kahden tilan välissä. Jotta tilannetta kuvaava todennäköisyysjakauma p_n pysyisi vakiona, täytyy virran leikkauksen yli oikealle olla yhtä suuri kuin virran vasemmalle. Tästä saamme **globaalin tasapainoyhtälön**:

$$\underbrace{\lambda \cdot p_n}_{\text{Virta ylös } (n \to n+1)} = \underbrace{x\mu \cdot p_{n+1}}_{\text{Virta alas } (n+1 \to n)}$$

Erikoistapaus Systeemi siirtyy tyhjästä (0) tilaan (1) intensiteetillä λ. Paluu tapahtuu intensiteetillä $x\mu$. Tasapainoehto on:

$$\lambda p_0 = x\mu p_1 \implies p_1 = \frac{\lambda}{x\mu} p_0 = \rho p_0 \qquad \text{(globaali ehto pätee!)}$$

3.2 Yleinen jäsen

Saamme rekursiokaavan $p_n = \rho p_{n-1}$, joka sitoo jokaisen tilan edelliseen.

$$\begin{aligned}
n = 1: &\quad p_1 = \rho p_0 \\
n = 2: &\quad p_2 = \rho p_1 = \rho(\rho p_0) = \rho^2 p_0 \\
n = 3: &\quad p_3 = \rho p_2 = \rho(\rho^2 p_0) = \rho^3 p_0 \\
&\quad \vdots \\
\text{Yleisesti:} &\quad p_n = \rho^n p_0
\end{aligned}$$

Todistus. **Alkuaskel:**
Kun $n = 0$, saamme $\rho^0 p_0 = 1 \cdot p_0 = p_0$, tosi.

Induktio-oletus:
Oletetaan, että väite on tosi mielivaltaisella arvolla $n = k$, eli $p_k = \rho^k p_0$.

Induktioaskel:
Tarkastellaan arvoa $n = k + 1$. Tasapainoyhtälön mukaan:

$$p_{k+1} = \rho \cdot p_k$$

Sijoitetaan tähän induktio-oletus p_k:n paikalle:

$$p_{k+1} = \rho \cdot (\rho^k p_0) = \rho^{k+1} p_0$$

Tämä vastaa väitettä arvolla $n = k + 1$.

Päätös:
Kaava $p_n = \rho^n p_0$ pätee kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 0$. $\square$

3.3 Jakauman johtaminen

Saimme yleisen termin $p_n = \rho^n p_0$. Koska todennäköisyyksien summan täytyy olla 1, voimme ratkaista tuntemattoman vakion p_0:

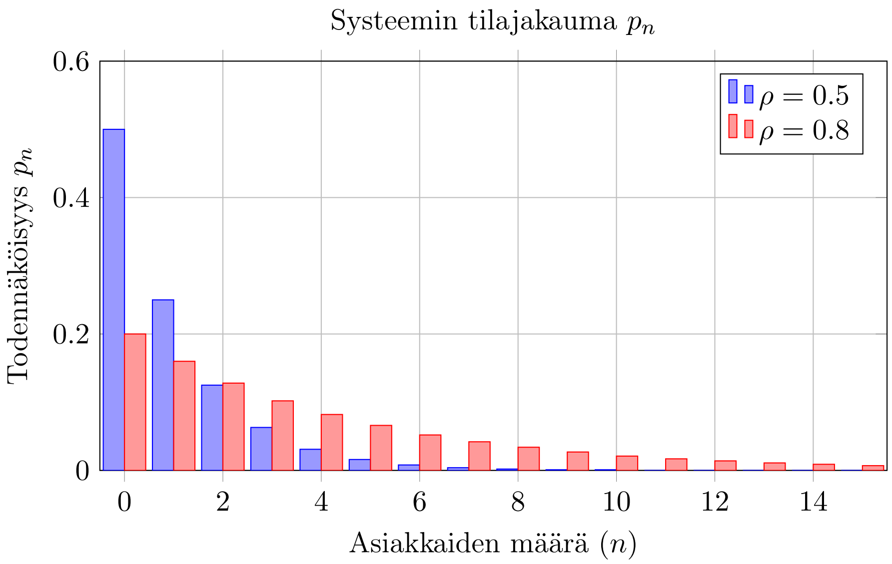
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1$$

Kun stabiilisuusehto $\rho < 1$ on voimassa, geometrinen sarja suppenee arvoon $\frac{1}{1-\rho}$.

$$p_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} = 1 \implies p_0 = 1 - \rho$$

Sijoittamalla p_0 takaisin yleiseen termiin saamme lopullisen todennäköisyysjakauman:

$$p_n = (1-\rho)\rho^n$$



3.4 Odotettu asiakasmäärä L

Olkoon satunnaismuuttuja N asiakkaiden lukumäärä systeemissä. Äsken johdettu p_n on muuttujan N todennäköisyysfunktio, eli $P(N = n) = p_n$. Odotusarvo lasketaan summaamalla jokainen tila painotettuna niiden todennäköisyyksillä:

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

Summan $\sum n\rho^n$ laskemiseksi tarkastellaan tuttua geometrista sarjaa funktiota:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Derivoidaan yhtälö puolittain muuttujan x suhteen:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}(1-x)^{-1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Kerrotaan puolittain x:llä, jolloin saadaan haluttu muoto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Sijoitetaan tämä tulos (missä $x = \rho$) alkuperäiseen odotusarvon lausekkeeseen:

$$L = (1-\rho) \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$
$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Palautetaan alkuperäiset muuttujat sijoittamalla $\rho = \frac{\lambda}{x\mu}$:

$$L(x) = \frac{\frac{\lambda}{x\mu}}{1 - \frac{\lambda}{x\mu}} = \frac{\lambda}{x\mu - \lambda}$$

Eli odotettu asiakasmäärä on: $\frac{\lambda}{x\mu - \lambda}$

4 Optimointiongelma

4.1 Ongelman asettelu

Minimoitava tavoitefunktio ja rajoitteet:

4.2 Lagrangen menetelmä

Muodostetaan Lagrangen funktio $\mathcal{L}(x_1, x_2, \alpha)$:

Ratkaistaan KKT-ehdot (osittaisderivaatat nollaksi):

4.3 Lopputulos