Formules du Calcul Propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité, applications.

La logique, modèle mécanique du monde qui nous entoure.

I Syntaxe et Sémantique

1) Syntaxe "L'écriture des formules"

déf : une variable propositionnelle est un symbole représentant un prédicat

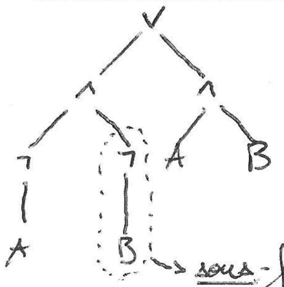
déf : un connecteur logique est un symbole de relation ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)

déf : le langage propositionnel est formé des séquence de variables propositionnelles et de connecteur logique

déf : une formule est un élément valide du langage propositionnel

representations :

arbre de dérivation



→ sous-formule

forme linéarisée

$((\neg A)\wedge(\neg B))\vee(A\wedge B)$

formule de dérivation

$$\varphi ::= \neg\varphi \mid \varphi\wedge\varphi \mid \varphi\vee\varphi \mid \varphi\rightarrow\varphi \mid \varphi\leftrightarrow\varphi \mid P$$

not : $\mathcal{F}$ dénote l'ensemble des formules

2) Sémantique "Le sens des formules"

a) Modèle

déf : un modèle $\mathcal{M}$ est la donnée d'une distribution de valeurs de vérité $\delta : P \rightarrow \{V,F\}$

on note $\mathcal{M} \models \varphi$ si $\delta(\varphi)=V$, $\mathcal{M} \not\models \varphi$ sinon

on étend δ à $\mathcal{F}$ par induction structurelle en $\delta_F : \mathcal{F} \rightarrow \{V,F\}$

et on note $\mathcal{M} \models \varphi$ (resp. $\mathcal{M} \not\models \varphi$) si $\delta_F(\varphi)=V$ (resp. F)

b) Propriétés des formules

déf : formules valides (tautologie), insatisfiables et satisfaites par un modèle $\mathcal{M}$

déf : φ et ψ sont deux formules équivalentes signifie que pour tout modèle $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models \varphi$ ssi. $\mathcal{M} \models \psi$), et on note $\varphi \models\!\dashv \psi$

Loi de DE MORGAN, équivalence et implication.

c) Théorie

déf : une théorie est un ensemble de formules.

déf : une théorie T est une conséquence sémantique d'une théorie T' si pour tout modèle $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models T' \Rightarrow \mathcal{M} \models T$

déf : théories satisfaites, satisfiables, inconsistantes, équivalentes

II Substitutions et formes normales

1) Substitutions

déf : $\tau : P \rightarrow \mathcal{F}$ est appelée substitution propositionnelle et on peut l'étendre à $\tau_F : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ par induction structurelle

lemme d'équivalence

si (τ, τ') substitutions propositionnelles telle que $\forall P_i \in P, \tau(P_i) \models\!\dashv \tau'(P_i)$ alors $\forall \varphi \in \mathcal{F}, \tau_F(\varphi) \models\!\dashv \tau'_F(\varphi)$

2) Formes normales

a) négative (NNF)

déf Une forme est normale négative si les négations portent uniquement sur des variables propositionnelles

$\overline{\varphi} \overset{not}{=} nnf(\neg\varphi)$

$nnf(\neg(\varphi\wedge\psi)) \overset{def}{=} nnf(\neg\varphi) \vee nnf(\neg\psi) = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$

$nnf(\neg(\varphi\vee\psi)) \overset{def}{=} \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}$

b) conjonctive (CNF)

déf une forme est normale conjonctive si elle est formé uniquement de la conjonction de disjonction de variable propositionnelles ou de leur négation

Dév 1 ; pratique : Programmation de la transformation de TSEITIN

$$\varphi = \wedge(\vee(P_i \mid \neg P_i))$$

c) disjonctive DNF

déf une forme est normale disjonctive si elle est formé de disjonctions de conjonction

$$\varphi = \vee(\wedge(P_i \mid \neg P_i))$$

d) complète

déf une forme est complète si chacune de ses clauses est une conjonction de l'ensemble de variable de propositions (ou leur négation) ~~et~~

la forme normale complète d'une formule est canonique

e) première

déf : monome impliquant de φ, impliquant premier

prop : les clauses d'une DNF sont des impliquants

déf la DNF constituée des impliquants premiers de φ comme clause est la forme normale première de φ

f) minimale

déf ~~une~~ DNF est minimale si, avec D l'ensemble de ses clauses, $\sum_{M \in D} |M|$ est minimale.

lemme de minimalité

|| si D est minimal, alors $M \in D \Rightarrow M$ est un impliquant premier de $\bigvee_D M$

Théorème de QUINE

|| si φ est une formule propositionnelle sans négation, alors sa forme première est minimale

3/ Satisfiabilité

Problème général

soit φ une formule propositionnelle, φ est-elle satisfiable ?

Théorème de Cook-Levin

|| SAT est un problème NP-complet

2SAT, HORNSAT et XOR SAT sont P-complet

III Théorie de la Preuve

1) Déduction naturelle

déf : un séquent est défini par un couple $(\Gamma, \varphi) \in \mathcal{F}^{(*} \times \mathcal{F}$.

noté $\Gamma \vdash \varphi$ et lu "sous les hypothèses Γ, on prouve la conclusion φ"

déf une règle de démonstration est constituée d'un nombre fini de séquents prémices et d'un séquent conclusion.

on note $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \ \ldots \ \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma_c \vdash \varphi_c}$, lu "pour prouver $\Gamma_c \vdash \varphi_c$, il suffit de montrer tous les prémices".

Règles en annexe (logique intuitionniste, logique classique)

Exercice :

$P, P \to Q \vdash Q$

$\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$

Théorème de complétude

|| si Γ théorie, φ formule alors $\Gamma \models \varphi$ ssi $\Gamma \vdash_c \varphi$

Dev 2 : éléments de preuve

2) Calcul des séquents

déf un séquent est un couple de théories, noté $\Gamma \vdash \Delta$

déf les règles de démonstrations sont définies comme précédemment

Règles en annexe

IV Ouverture

- Introduction des quantificateurs, logique du 1er ordre
- Les preuves de programme
- Circuits logiques

ANNEXE

Déduction naturelle

Axiome

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(ax)$$

Logique

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma' \vdash \psi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi \wedge \psi}\,(\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\,(\wedge_{eg}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\wedge_{ed})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma', \psi \vdash \theta \quad \Gamma'', \varphi \vdash \theta}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash \theta}\,(\vee_e) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\,(\vee_{ig}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\,(\vee_{id})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\,(\to_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi}\,(\to_e)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg \varphi}\,(\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg \varphi \quad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}\,(\neg_e)$$

Structurelle

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\,(aff) \qquad \frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}\,(ctr)$$

Logique intuitionniste

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\,(\bot_e)$$

Logique classique

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\,(\bot_c)$$

Calcul des séquents

Axiomes

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(ax) \qquad \frac{}{\bot \vdash}\,(\bot_g)$$

Logique

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}\,(\wedge_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Delta}\,(\wedge_d)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}\,\vee_g \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Delta}\,(\vee_d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}\,(\to_g) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Delta}\,(\to_d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\,(\neg_g) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Delta}\,(\neg_d)$$

Structurelle

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}\,(aff_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}\,(aff_d)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}\,(ctr_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}\,(ctr_d)$$

Coupure

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \quad \Gamma', \varphi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut)$$

Intuitionniste (retrait de ctrd)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\,(\vee_{d_1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi \vee \varphi}\,(\vee_{d_2})$$

$\vee d$
$\wedge d$
$\to d$
$\neg d$
$aff\,d$
cut

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\,(\wedge_d) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\,\to_d$$