# Apprentissage machine 1

## Chapitre 2 : La régression lineaire

**Ouadfel Salima**
Faculté NTIC/IFA
salima.ouadfel@univ-constantine2.dz

Université Constantine 2
جامعة قسنطينة 2

# Apprentissage machine 1

# Chapitre 2 : La régression linéaire

Faculté NTIC/IFA

salima.ouadfel@univ-constantine2.dz

## Etudiants concernés

| Faculté/Institut | Département | Niveau | Spécialité |
| --- | --- | --- | --- |
| Nouvelles technologies | IFA | Master1 | STIC |

# La régression linéaire

## Apprentissage supervisé

L'apprentissage supervisé (*supervised learning*) consiste à générer **un modèle de prédiction** à partir de données annotées. L'annotation consiste à affecter à chaque donnée une étiquette qui est la réponse à prédire.

**C'est une analyse prédictive**

## Apprentissage non supervisé

En apprentissage non supervisé (*unsupervised learning*), l'algorithme prend en entrée des données non annotées (sans leur label) et découvre par lui-même des similarités ou des différences entre les données à partir des features qui les décrivent.

**C'est une analyse descriptive**

## La régression

Le modèle de régression est un **modèle d'apprentissage supervisé** qui permet de **prédire** une variable expliquée $Y$ continue (dépendante) à partir de variables explicatives (indépendantes) $X$.

Exemples:

- Prédire le prix d'une maison Y en se basant sur sa surface ($X_1$), nombre de chambres ($X_2$) et son âge ($X_3$).

- Prédire le poids d'une personne adulte Y en fonction de sa taille ($X$).

## La régression

**Prédire le prix d'une maison**

test

| area | bedrooms | balcony | age |
|---|---|---|---|
| 4600 | 5 | 3 | 1 |
| 2050 | 2 | 2 | 2 |
| 1450 | 2 | 2 | 3 |

| area | bedrooms | balcony | age |
|---|---|---|---|
| 1200 | 2 | 0 | 2 |
| 2300 | 3 | 2 | 5 |
| 2500 | 4 | 2 | 1 |
| 3650 | 5 | 3 | 3 |
| 1800 | 3 | 1 | 5 |
| 3000 | 3 | 1 | 4 |
| 1222 | 1 | 0 | 2 |

Données d'apprentissage

| price |
|---|
| 500000 |
| 620000 |
| 122500 |
| 6000000 |
| 2122000 |
| 120000 |
| 450000 |

**Labels**

Apprentissage

**Modèle**

Prédiction

| price |
|---|
| 6500000 |
| 1530000 |
| 1563330 |

label

## La régression

**Prédire le poids d'une personne**

| *Taille* |
|---|
| 160 |
| 165 |
| 170 |
| 175 |
| 180 |
| 185 |
| 190 |

Données d'apprentissage

| *Poids* |
|---|
| 66 |
| 68.23 |
| 70.44 |
| 71.29 |
| 73.86 |
| 74.68 |
| 76.28 |

**Labels**

Apprentissage

test

| *Taille* |
|---|
| 155 |
| 195 |

**Modèle**

Prédiction

| *Poids* |
|---|
| 68 |
| 80 |

label

## La régression lineaire

Le modèle de régression est linéaire quand la variable expliquée $Y$ change linéairement en fonction des variables explicatives indépendantes $X$.

On parle de modèle de régression linéaire :

- simple si le modèle permet de prédire **la variable expliquée Y** à partir **d’une variable explicative X**

- multiple si elle permet de prédire la **variable expliquée** Y à partir de **plusieurs variables explicatives** $\mathbf{X}_i$.

# La regression lineaire

## La régression linéaire simple

Prédire le poids d'une personne adulte en fonction de sa  taille.

X:Variable explicative

Y:Variable expliquée

| | *Taille* | *Poids* |
|---|---|---|
| 1 | 160 | 66 |
| 2 | 165 | 68.23 |
| 3 | 170 | 70.44 |
| 4 | 175 | 71.29 |
| 5 | 180 | 73.86 |
| 6 | 185 | 74.68 |
| 7 | 190 | 76.28 |

## La régression linéaire multiple

Exemple: Prédire le prix d'une maison en se basant sur sa surface, nombre de chambres et son âge.

**X:Variables explicatives**

**Y:Variable expliquée**

| Surface | Chambres | Age | Prix |
|---|---|---|---|
| 2600 | 2 | 20 | 550000 |
| 3000 | 3 | 15 | 585000 |
| 3200 | 4 | 18 | 610000 |
| 3600 | 4 | 10 | 595000 |
| 4000 | 5 | 8 | 760000 |

## Le modèle de régression linéaire simple:

**Représentation graphique Nuage de points**

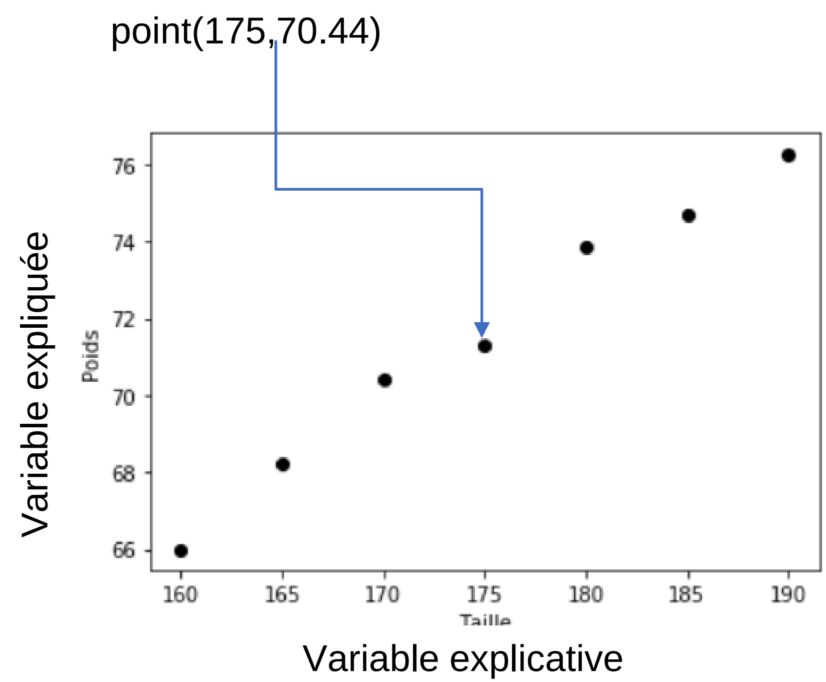
Soit n données (n samples ) $(x_i, y_i)\ i = 1..n$ tel que:

$x_i$ est une variable explicative et $y_i$ est une variable expliquée

Un nuage de points est une représentation graphique dans un plan des paires $(x_i, y_i)\ i = 1..n$ tel que la variable expliquée est sur l'axe Y et la variable explicative est sur l'axe X.

**X:Variable explicative** **Y:Variable expliquée**

| | *Taille* | *Poids* |
|---|---|---|
| 1 | 160 | 66 |
| 2 | 165 | 68.23 |
| 3 | 170 | 70.44 |
| 4 | 175 | 71.29 |
| 5 | 180 | 73.86 |
| 6 | 185 | 74.68 |
| 7 | 190 | 76.28 |

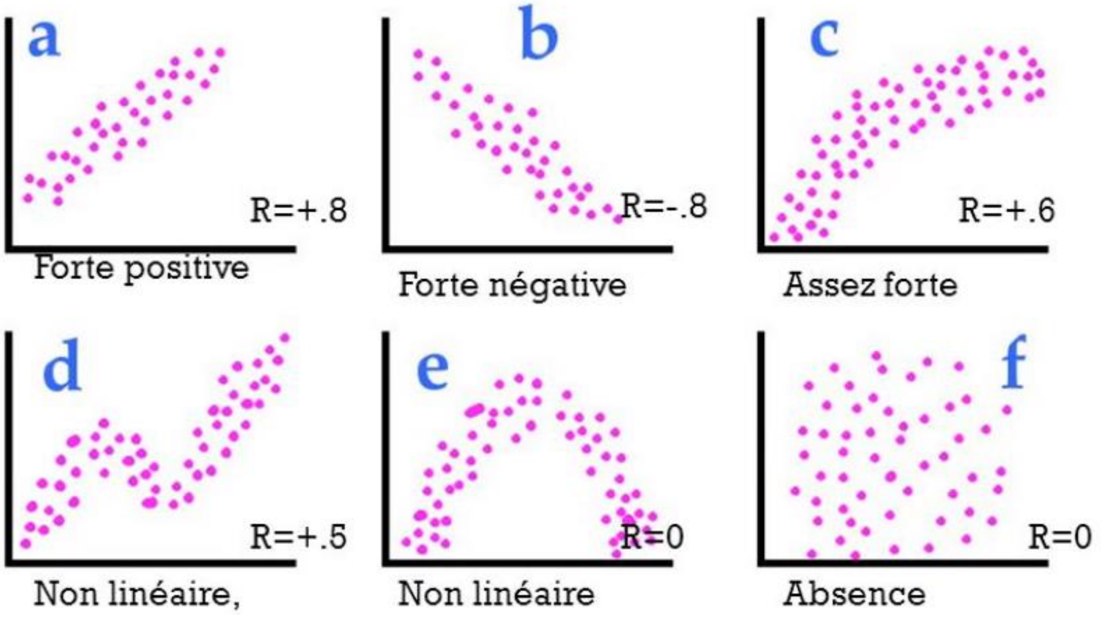


## Le modèle de régression linéaire simple:

**Représentation graphique Nuage de points**

Les nuages de points montrent le type de relation entre les deux variables continues X et Y.

**R est le coefficient de corrélation.**
**R est entre -1 et +1**

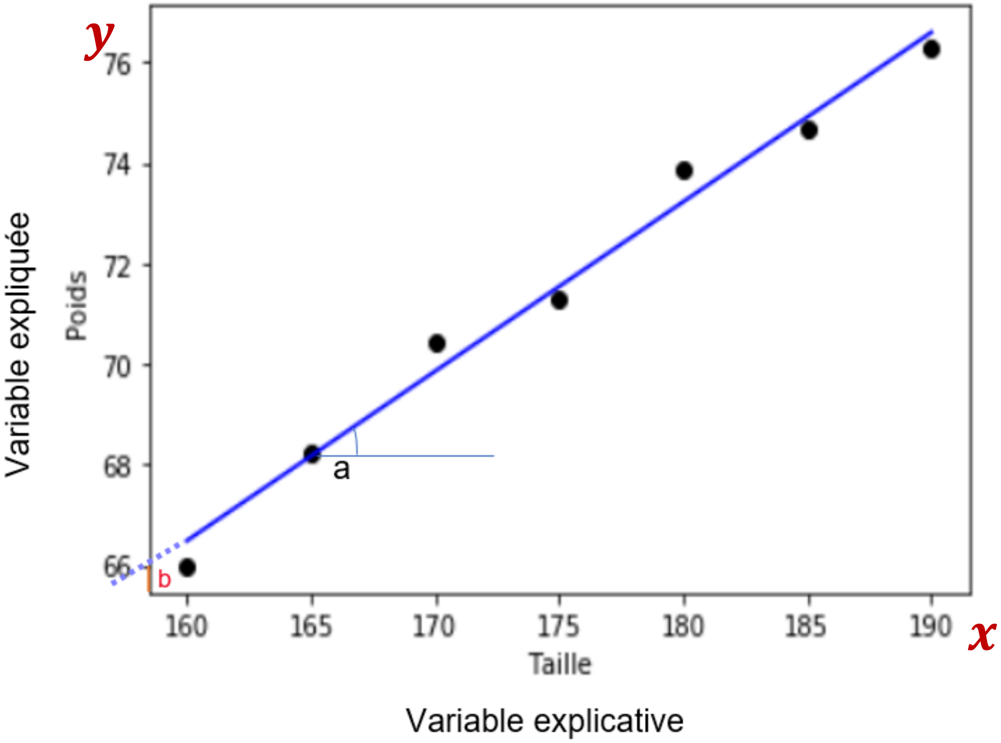


## Le modèle de régression linéaire simple:

Le modèle de régression linéaire qui exprime une relation linéaire entre une variable explicative $\boldsymbol{x}$ et une variable explique $\boldsymbol{y}$, est donné par l'équation suivante:

$$\boldsymbol{y = a_0 + a_1 x + \varepsilon}$$

$\boldsymbol{a_0}$ : point d'intersection ($\boldsymbol{x}$=0)
$\boldsymbol{a_1}$ : pente de la droite
ε : erreur de prédiction



# La regression linéaire

## L'équation de la régression linéaire simple

$$y_i = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1} x_i + \varepsilon_i$$

Erreur sur la $i^{\text{ème}}$ donnée

$i^{\text{ème}}$ donnée expliquée de $Y$

Terme intersection

Influence de la $i^{\text{ème}}$ donnée explicative de x

## Le modèle de régression linéaire simple

**Valeur observée**

$$y_i \quad = a_0 + a_1 x_i \ + \varepsilon_i$$

**Valeur prédite**

$$\widehat{y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i$$

**Erreur de prédiction**

$$\varepsilon_i = y_i \ - \widehat{y}_i$$

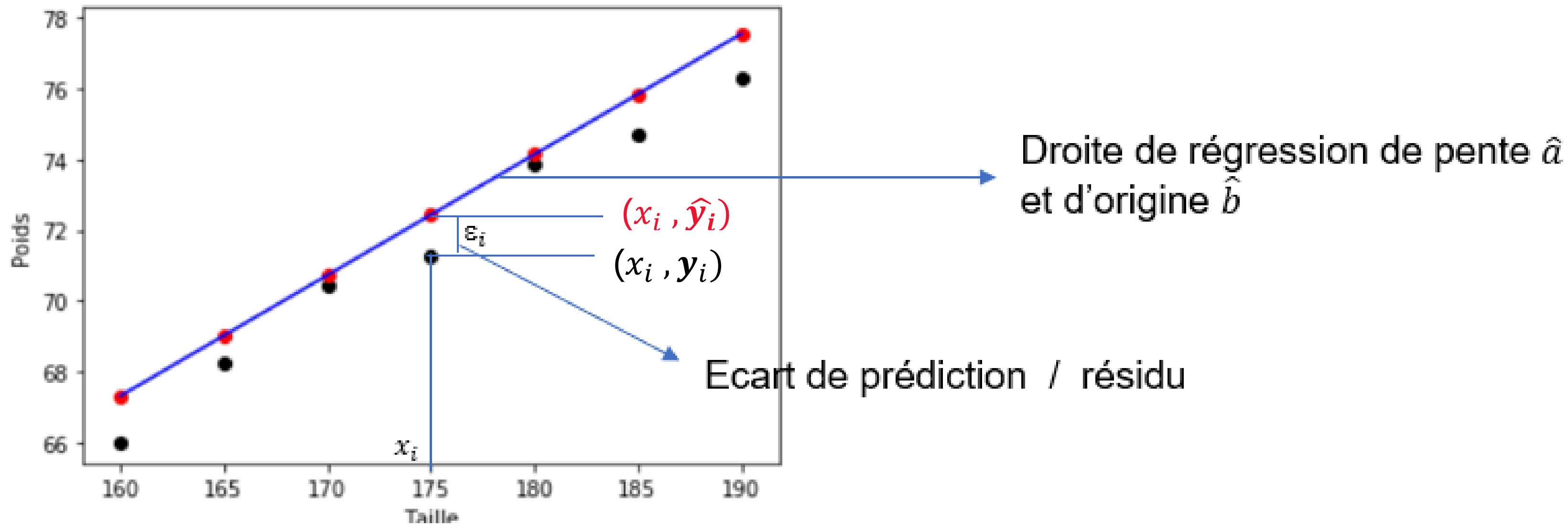
## Le modèle de régression linéaire simple

# Exemple

$x_i$ :valeur de la variable taille

$\boldsymbol{y}_i$ : valeur réelle de la variable poids

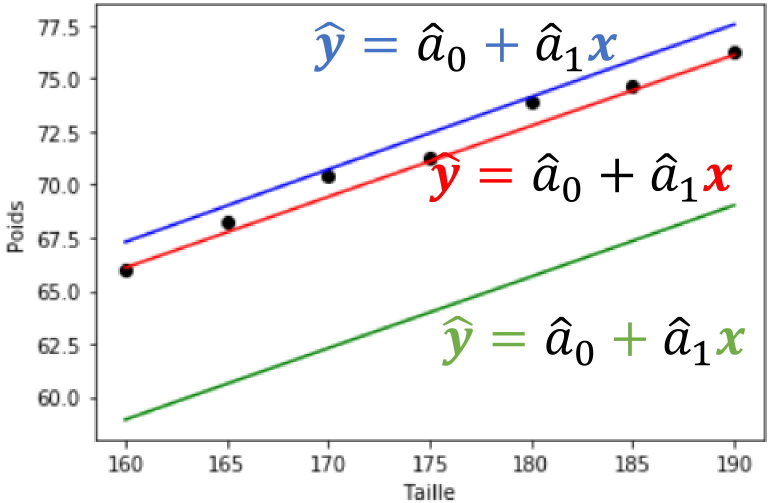
$\boldsymbol{\hat{y}_i}$ : valeur prédite de la variable poids




Représentation graphique de la droite de la régression linéaire simple

## Le modèle de régression linéaire simple

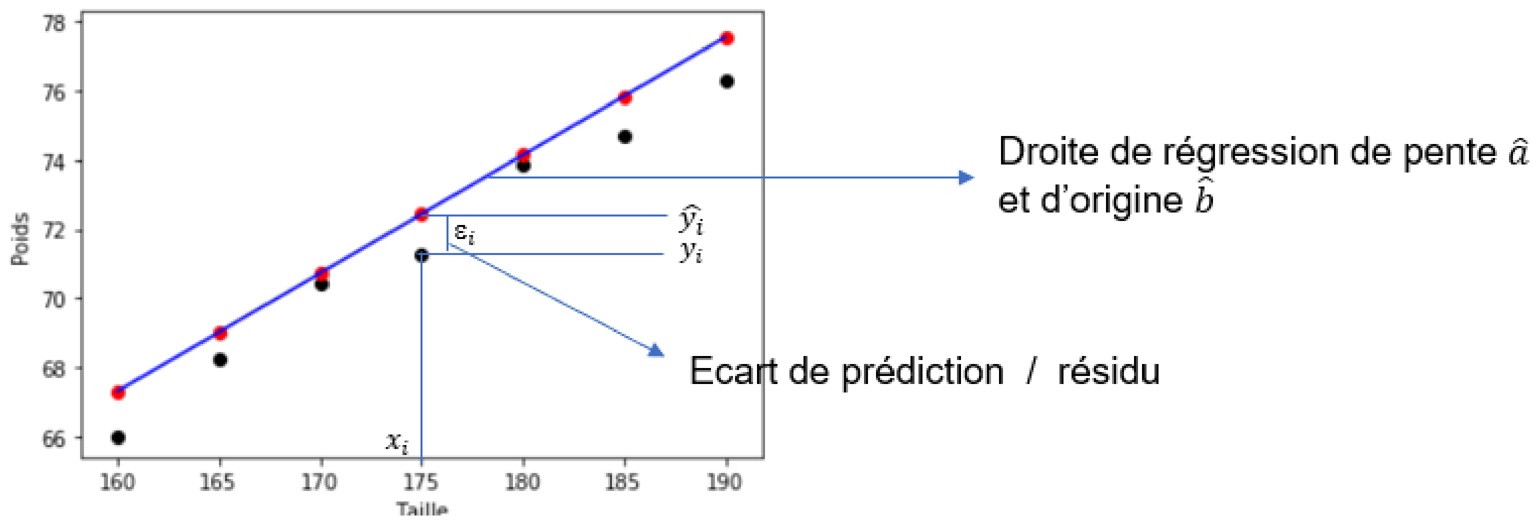
▲




On peut trouver plusieurs droites de régression selon les valeurs de $\hat{a}_0$ et $\hat{a}_1$

Comment choisir la bonne droite?

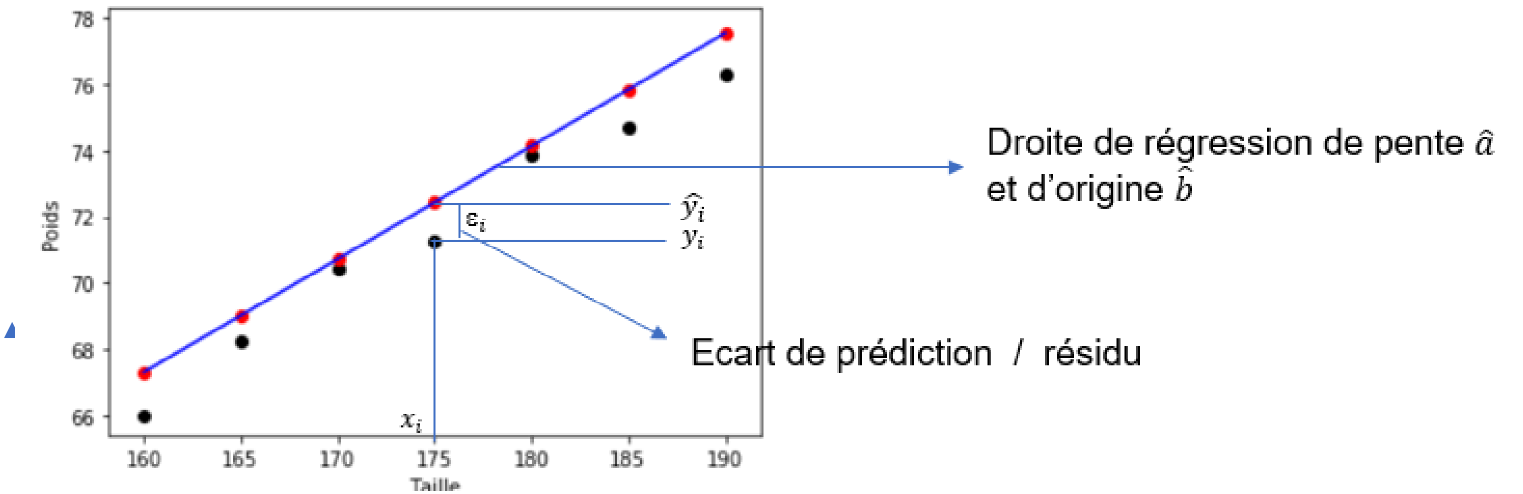
## Le modèle de régression linéaire simple




La bonne droite est celle **qui s'ajuste le mieux** aux couples $(x_i, \boldsymbol{y_i})$ $\boldsymbol{i = 1..n}$

La bonne droite est celle qui minimise $\frac{1}{n}\sum_i^n \varepsilon_i^2$

## Le modèle de régression linéaire simple



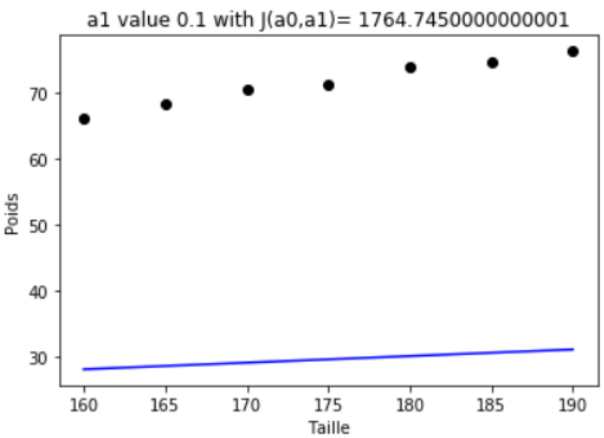

On cherche les paramètres $\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}$ telle que :

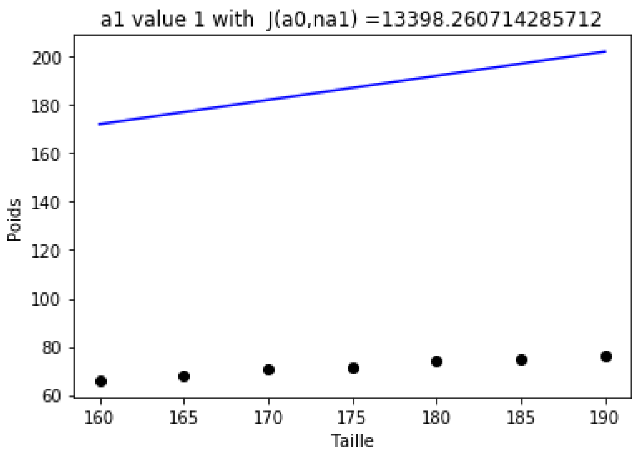
$\sum_i^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}) = \left(y_1 - (\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1}\boldsymbol{x_1})\right)^2 + \ldots\ldots\ldots \left(y_n - (\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1}\boldsymbol{x_n})\right)^2$ est minimum

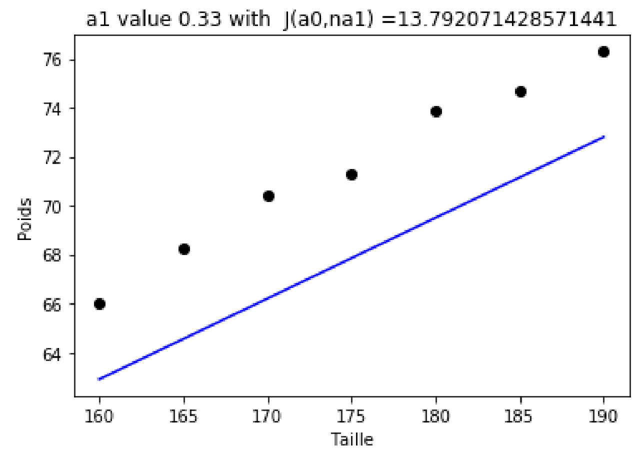
$J(a_0, a_1) = \frac{1}{n}\sum_i^n \varepsilon_i^2$ est la fonction coût du modèle de régression simple.

## Le modèle de régression linéaire simple

Si on fixe $a_0$ et on fait varier $a_1$




La bonne droite est celle qui minimise $\frac{1}{n}\sum_i^n \varepsilon_i^2$

## Le modèle de régression linéaire simple:

### La méthode des moindre carrées

Chercher les valeurs $\hat{a}, \hat{b}$ qui minimisent la somme des carrés.

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\hat{a}_0}, \boldsymbol{\hat{a}_1}) = argmin \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$$\boldsymbol{J}(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = argmin \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = argmin \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i))^2$$

$$\hat{a}_0 = \frac{cov(x,y)}{var(x)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{a}_1 = \bar{y} - \hat{a}_0 \bar{x}$$

avec $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ , $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

## Le modèle de régression linéaire simple

**Modèle :** $y = a_0 + a_1 x + \varepsilon$

**Parametres:** $a_0 \;\; et \;\; a_1$

**Fonction coût:** $J(a_0, a_1) = \sum_i^n \varepsilon_i^2$

**But: minimiser** $J(a_0, a_1)$

$$\hat{a}_1 = \frac{cov(x, y)}{var(x)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}$$

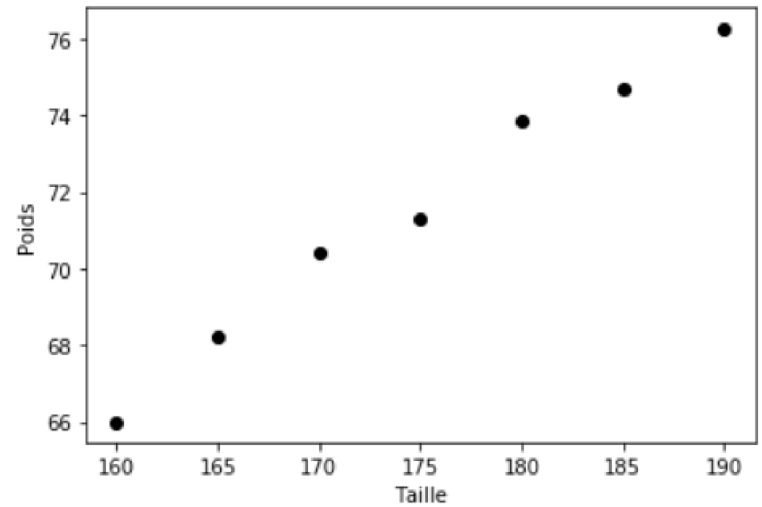
$$\hat{a}_0 = \overline{y} - \hat{a}_1 \overline{x}$$

## Le modèle de régression linéaire simple:

### La méthode des moindre carrées

### Exemple

| *Taille* | *Poids* |
|---|---|
| 160 | 66 |
| 165 | 68.23 |
| 170 | 70.44 |
| 175 | 71.29 |
| 180 | 73.86 |
| 185 | 74.68 |
| 190 | 76.28 |



## Le modèle de régression linéaire simple:

### La méthode des moindre carrées

### Exemple

| $x = Taille$ | $y = Poids$ | $x - \bar{x}$ | $y - \bar{y}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 66 | -15 | -5.54 | 225 | 83.1 |
| 165 | 68.23 | -10 | -3.31 | 100 | 33.1 |
| 170 | 70.44 | -5 | -1.1 | 25 | 5.5 |
| 175 | 71.29 | 0 | -0.25 | 0 | 0 |
| 180 | 73.86 | 5 | 2.32 | 25 | 11.6 |
| 185 | 74.68 | 10 | 3.14 | 100 | 31.4 |
| 190 | 76.28 | 15 | 4.74 | 225 | 71.1 |

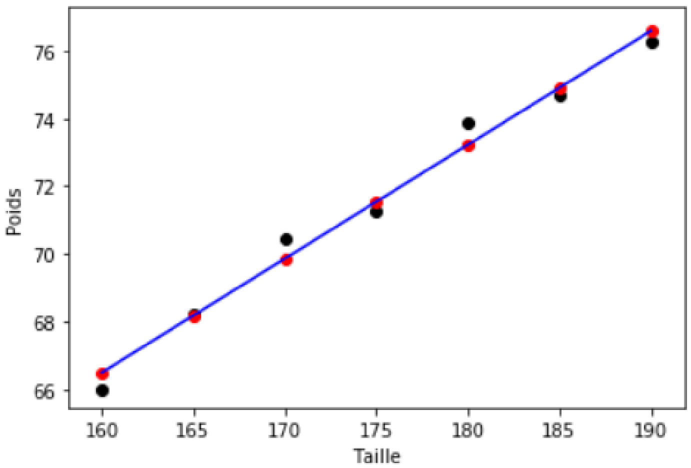
$\bar{x} = 175$ $\bar{y} = 71.54$

$$\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})^2 = 700 \qquad \sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 235.80$$

## Le modèle de régression linéaire simple:

### La méthode des moindre carrées

### Exemple




| $x = Taille$ | $y = Poids$ | $x - \bar{x}$ | $y - \bar{y}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 66 | -15 | -5.54 | 225 | 83.1 |
| 165 | 68.23 | -10 | -3.31 | 100 | 33.1 |
| 170 | 70.44 | -5 | -1.1 | 25 | 5.5 |
| 175 | 71.29 | 0 | -0.25 | 0 | 0 |
| 180 | 73.86 | 5 | 2.32 | 25 | 11.6 |
| 185 | 74.68 | 10 | 3.14 | 100 | 31.4 |
| 190 | 76.28 | 15 | 4.74 | 225 | 71.1 |

$\bar{x} = 175$ $\bar{y} = 71.54$

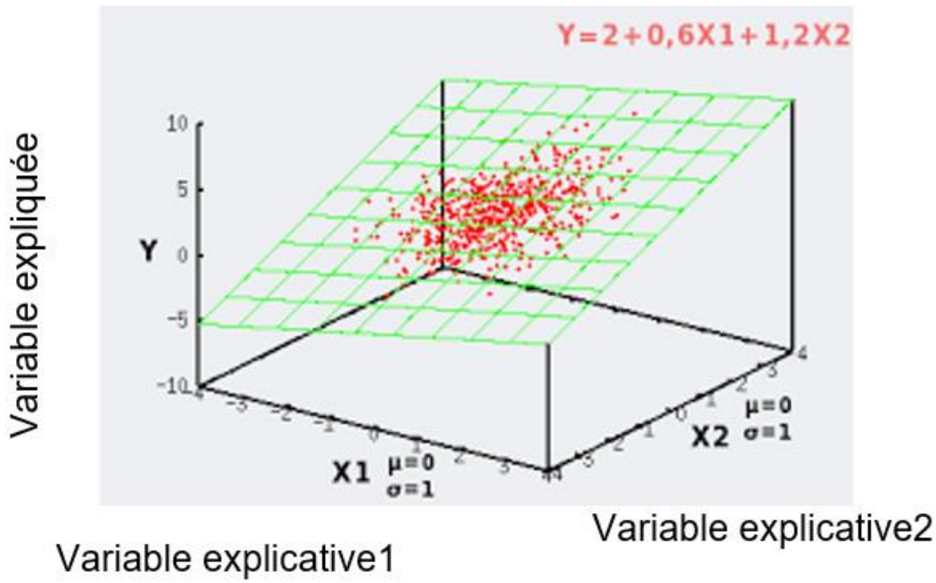
$\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})^2 = 700$ $\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 235.80$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})^2} = 0.33686$$

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x} = 12.58$$

## Le modèle de régression linéaire multiple

Le modèle de régression multiple est une généralisation du modèle de régression simple. On cherche à prédire une variable expliquée en fonction de deux ou plusieurs variables explicatives.



## Le modèle de régression linéaire multiple

- **L'équation de regression multiple**

Le modèle théorique de la régression lineaire multiple est décrit par l'equation suivante:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots . + a_p x_p + \varepsilon$$

**où**

$a_0, a_1, a_2, \ldots . . a_p$ **sont les parametres du modèle**

$\varepsilon$ **représente le terme d'erreur**

# Le modèle de régression linéaire multiple

## L'équation de régression linéaire multiple

$$y_i \quad = a_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + a_3 x_{i3} + \cdots . + a_p x_{ip} + \varepsilon_i$$

I[eme] donnée de y

Terme constant

Influence de la variable $x_1$

Influence de la variable $x_2$

Influence de la variable $x_p$

erreur de la I[eme] donnée De x

Le bon hyperplan est celui **qui s'ajuste le mieux** aux couples $(x_i, \boldsymbol{y_i})$ $\boldsymbol{i = 1..n}$

## Le modèle de régression linéaire multiple

**La fonction coût est :**

$$J(a_0, a_1,\ a_2, \ldots..a_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

Telle que

$$\boldsymbol{\varepsilon_i} = \left(\boldsymbol{y_i} - \left(\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1 x_{i1}} + \boldsymbol{a_2 x_{i2}} + \boldsymbol{a_3 x_{i3}} + \cdots. + \boldsymbol{a_p x_{ip}}\right)\right)$$

## Le modèle de régression linéaire multiple

Chercher les valeurs $\hat{a}_0,\ \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3 \ldots.., \hat{a}_p$ qui minimisent la somme des carrés.

$$J(\hat{a}_0,\ \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3 \ldots.., \hat{a}_p) = argmin \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$$J(\hat{a}_0,\ \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3 \ldots.., \hat{a}_p) = argmin \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Avec

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \boldsymbol{x_1} + \hat{a}_2 \boldsymbol{x_2} + \hat{a}_3 \boldsymbol{x_3} + \cdots + \hat{a}_p \boldsymbol{x_p}$$

## Le modèle de régression linéaire multiple

- **Estimation des parametres par la méthodes des moindres carrées**

**Ecriture matricielle**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & .... & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & .... & x_{2p} \\ & & . & \\ & & . & \\ 1 & x_{n1} & .... & x_{np} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_p \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}}_{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a} + \varepsilon$$

## Le modèle de régression linéaire multiple

- **Estimation des parametres par la méthodes des moindres carrées**

**Ecriture matricielle**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} \ldots \ldots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} \ldots \ldots & x_{2p} \\ & . & \\ & . & \\ 1 & x_{n1} \ldots \ldots & x_{np} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_p \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}}_{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Xa} + \varepsilon$$

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

## Le modèle de régression linéaire multiple

**Modèle :** $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots . + a_px_p + \varepsilon$

**Parametres:** $a_0, a_1,\ a_2, \ldots ..a_p$

**Fonction coût:** $J(a_0, a_1,\ a_2, \ldots ..a_p) = \sum_i^n \varepsilon_i^2$

**But: minimiser:** $J(a_0, a_1,\ a_2, \ldots ..a_p)$

**Transformation:**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \ldots & x_{2p} \\ & & . & \\ & & . & \\ 1 & x_{n1} & \ldots & x_{np} \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ a_p \end{pmatrix}}_{a} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}}_{\varepsilon}$$

$$Y = Xa + \varepsilon$$

$$\hat{a} = (X^TX)^{-1}X^TY$$

## Le modèle de régression linéaire multiple

**retour au modèle de régression simple**

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_i \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \bar{y} \\ s_{xy} + \bar{x}\bar{y} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} &= \frac{1}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n^2\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right\}} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n^2 s_x^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n^2 s_x^2} \begin{pmatrix} n s_x^2 + n\bar{x}^2 & -n\bar{x} \\ -n\bar{x} & n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n s_x^2} \begin{pmatrix} s_x^2 + \bar{x}^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

## Le modèle de régression linéaire multiple

### retour au modèle de régression simple

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\hat{a} = \frac{1}{s_x^2} \begin{pmatrix} (s_x^2 + \bar{x}^2)\bar{y} - \bar{x}(s_{xy} + \bar{x}\bar{y}) \\ -\bar{x}\bar{y} + (s_{xy} + \bar{x}\bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} - \bar{x}\frac{s_{xy}}{s_x^2} \\ \frac{s_{xy}}{s_x^2} \end{pmatrix}$$

**avec**

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

## Le modèle de régression linéaire multiple

Exemple

On veut prédire le prix d'une maison à partir de sa surface, du nombre de chambres et de son age.

On a l'ensemble d'apprentissage suivant:

| Surface | Chambres | Age | Prix |
|---|---|---|---|
| 2600 | 2 | 20 | 550000 |
| 3000 | 3 | 15 | 585000 |
| 3200 | 4 | 18 | 610000 |
| 3600 | 4 | 10 | 595000 |
| 4000 | 5 | 8 | 760000 |

→ **Modèle de régression linéaire multiple**

## Le modèle de régression linéaire multiple

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| Surface | Chambres | Age | Prix |
| 2600 | 2 | 20 | 550000 |
| 3000 | 3 | 15 | 585000 |
| 3200 | 4 | 18 | 610000 |
| 3600 | 4 | 10 | 595000 |
| 4000 | 5 | 8 | 760000 |

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \varepsilon$$

Ecriture matricielle

$$y = aX + \varepsilon$$

X=

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2600 | 2 | 20 |
| 1 | 3000 | 3 | 15 |
| 1 | 3200 | 4 | 18 |
| 1 | 3600 | 4 | 10 |
| 1 | 4000 | 5 | 8 |

y=

| |
|---|
| 550000 |
| 585000 |
| 610000 |
| 595000 |
| 760000 |

$$\hat{a} = (X^TX)^{-1}X^TY$$

# La régression linéaire

La méthode des moindres carrés est une méthode analytique qui permet de trouver une solution exacte. Mais elle devient difficile avec un très grand nombre de données et de caractéritisques à cause de l'inversion de la matrice.

Une alternative à la méthode des moindres carrés est une méthode approximative : l'algorithme ***Descente de Gradient*** pour trouver une solution approximative.