Теоретическая задача 9.2

Оценить минимальное число N разбиений отрезка для вычисления заданного интеграла по составной квадратурной формуле трапеций, обеспецивающее точность 10^{-4}.

$a)\ I = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$

$b)\ I = \int\limits_0^1 sin(x^2) dx$

Решение:

$a)\ I = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$

$f(x) = e^{-x^2}$

Мы знаем, что при вычислении по формуле трапеций погрешность будет:

$eps_{trap} \leq \frac{1}{12} M_2 (b-a) h^2 = \frac{(b-a)^3}{12N^2} M_2,$

где в нашем случае $b = 1$, $a = 0$, $M_2 = \max\limits_{[0,1]} |f''(x)|$

Оценим M_2:

$f(x) = e^{-x^2}$, значит $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, тогда $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$

Чтобы найти максимум модуля второй производной, рассмотрим третью производную:

$f'''(x) = -2xe^{-x^2}(4x^2 - 2) + e^{-x^2} \cdot 8x = -4xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$

Для нахождения точек экстремума второй производной, приравняем к нулю третью производную:

$-4xe^{-x^2}(2x^2 - 3) = 0.$

Данное уравнение имеет 3 решения:

$x_1 = 0$

$x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ – но это больше, чем $\sqrt{1} = 1$, то есть лежит вне отрезка $[0, 1]$.

$x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ – также лежит вне отрезка $[0, 1]$.

Итак, рассмотрим модуль второй производной в точке 0 и на концах отрезка (в данном случае это тот же 0 и 1).

$|f''(0)| = e^0 \cdot 2 = 2$

$|f''(1)| = e^{-1} \cdot 2 < 2,$

поэтому $M_2 = 2$

Вернемся к нашей формуле:

$eps_{trap} \leq \frac{(b-a)^3}{12N^2} M_2 = \frac{1^3}{12N^2} \cdot 2 = \frac{1}{6N^2}$

Нам нужно, чтобы была обеспечена точность 10^{-4}, то есть чтобы:

$\frac{1}{6N^2} \leq \epsilon = 10^{-4}$, значит

$N \geq \sqrt{\frac{1}{6\epsilon}} \geq 40.82$

Таким образом, $N = 41$ - минимальное подходящее нам число разбиений.

$b)\ I = \int\limits_0^1 sin(x^2) dx$

$f(x) = sin(x^2)$

Мы знаем, что при вычислении по формуле трапеций погрешность будет:
$eps_{trap} \leq \frac{1}{12}M_2(b-a)h^2 = \frac{(b-a)^3}{12N^2}M_2$,
где в нашем случае $b = 1$, $a = 0$, $M_2 = \max\limits_{[0,1]} |f''(x)|$

Оценим M_2:
$f(x) = sin(x^2)$, значит $f'(x) = 2x \cdot cos(x^2)$, тогда
$f''(x) = 2cos(x^2) - 4x^2 \cdot sin(x^2)$
Чтобы найти максимум модуля второй производной, рассмотрим третью производную:
$f'''(x) = -4x(3sin(x^2) + 2x^2 \cdot cos(x^2))$

При $x \in [0,1]$ имеем: $sin(x) \geq 0$, $cos(x) \geq 0$ (находимся в первой координатной четверти), соответственно: $sin(x^2) \geq 0$, $cos(x^2) \geq 0$, так как $x^2 \in [0,1]$ при $x \in [0,1]$.

Значит, $3sin(x^2)+2x^2 \cdot cos(x^2) \geq 0$ при $x \in [0,1]$, поэтому $f'''(x) = -4x(3sin(x^2)+2x^2 \cdot cos(x^2)) \leq 0$, так что f'' не возрастает на $[0,1]$.

Тогда просто посчитаем модули значения второй производной на концах отрезка и выберем максимум из них:
$|f''(0)| = 2$
$|f''(1)| = |2cos(1) - 4sin(1)| = 2.285279 > 2$
Таким образом, $M_2 = |f''(1)| = 2.285279$
Вернемся к нашей формуле:
$eps_{trap} \leq \frac{(b-a)^3}{12N^2}M_2 = \frac{1^3}{12N^2} \cdot 2.285279 = \frac{2.285279}{12N^2}$
Нам нужно, чтобы была обеспечена точность 10^{-4}, то есть чтобы:
$\frac{2.285279}{12N^2} \leq \epsilon = 10^{-4}$, значит
$N \geq \sqrt{\frac{2.285279}{12\epsilon}} \geq 43.639$
Таким образом, $N = 44$ - минимальное подходящее нам число разбиений.

Ответ:
$a)$ $N = 41$
$b)$ $N = 44$