Теоретическая задача 1.1

Докажите, что $max_{i,j}|a_{ij}|$ не является матричной нормой.

Решение:

По определению, чтобы векторная норма являлась матричной нормой, она должна обладать свойством субмультипликативности (для допускающих умножение матриц).

Для представленной выше нормы докажем, что она не является матричной нормой, приведя пример матриц A и B, для которых нарушается свойство субмультипликативности.

Рассмотрим такие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В таком случае свойство субмультипликативности говорит, что $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

Однако $||A|| = max_{i,j}|a_{ij}| = 1$,

$||B|| = max_{i,j}|b_{ij}| = 1$.

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$||C|| = max_{i,j}|c_{ij}| = 2$.

То есть получаем: $||AB|| = ||C|| = 2 \geq 1 = 1 \cdot 1 = ||A|| \cdot ||B||$.

Противоречие.

Значит, представленная выше норма матричной не является.

Доказано.