Теоретическая задача 1.3

Пусть $A = I + \alpha uu^*$, $\alpha \in C$, $u \in C^n$, $||u||_2 = 1$

Найдите все α, при которых матрица A будет унитарной

Решение:

Запишем определение того, что A - унитарная:

$A^{-1} = A^*$, то есть $A^*A = I$

Из условия знаем, что $A = I + \alpha uu^*$. Подставим это выражение в равенство выше:

$(I + \alpha uu^*)^* \cdot (I + \alpha uu^*) = I$

Раскроем первую скобку:

$(I + \alpha uu^*)^* = I^* + (\alpha uu^*)^* = I + \alpha^*(uu^*)^* = I + \alpha^* uu^*$

Здесь мы воспользовались тем, что: $I^* = I$, $(AB)^* = B^*A^*$ (в роли A и B выступают u и u^* соответственно).

Итак, мы имеем:

$(I + \alpha^* uu^*) \cdot (I + \alpha uu^*) = I$

Раскрываем скобки:

$I + \alpha^* uu^* + \alpha uu^* + \alpha^* \alpha uu^* uu^* = I$

Сокращаем обе части на I и пользуемся тем, что $uu^*uu^* = u(u^*u)u^* = uu^*$

(В задаче 1.2 подробно написано, что $x^*x = ||x||_2^2$, так что у нас $u^*u = ||u||_2^2 = 1^2 = 1$)

Имеем:

$(\alpha^* + \alpha + \alpha^*\alpha)uu^* = 0$

За счет произвольности $u \in C^n$, $||u||_2 = 1$, получаем:

$\alpha^* + \alpha + \alpha^*\alpha = 0$

Вспомним, что $\alpha^*\alpha = |\alpha|^2$

$\alpha^* + \alpha + |\alpha|^2 = 0$

Кроме того, представим в виде: $\alpha = x + iy$

Подставим в равенство выше:

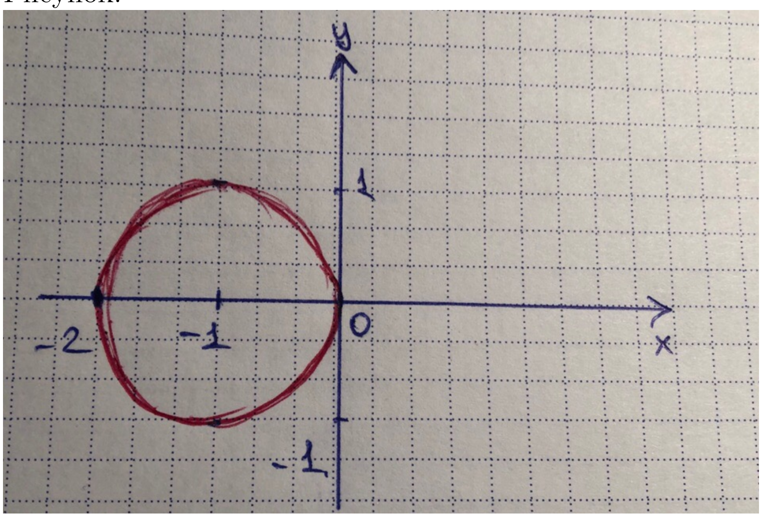
$x - iy + x + iy + x^2 + y^2 = 0$

$x^2 + y^2 + 2x = 0$

$(x + 1)^2 + y^2 = 1$

Таким образом, нужные нам α - это окружность с центром в точке $(-1, 0)$ и радиусом 1.

Рисунок:



Ответ: все нужные нам α лежат на окружности с центром в точке $(-1, 0)$ и радиусом 1.

То есть, они могут задаваться таким образом: $\alpha = -1 + e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$