Теоретическая задача 10.1

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень z неизвестной кратности $p > 1$, причем $f(x)$ – дважды дифференцируемая функция.

а) построить модификацию метода Ньютона с квадратичной скоростью сходимости.

б) Предложить способ численной оценки кратности корня.

Решение:

а) Классический метод Ньютона имеет вид: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Вообще для поиска корней кратности p используют модификацию метода Ньютона: $x_{n+1} = x_n - p\ \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, он будет иметь квадратичную скорость сходимости, как нам и нужно в задании (это уже ответ на 1й вопрос).

Поясним теперь этот ответ:

$x_{n+1} = x_n - p\ \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = h(x_n)$, где $h(x) = x - p\ \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Отметим, что так как $f(z) = 0$ (ведь z - корень), то считаем $h(z) = z$. Так как это корень кратности p, то в окрестности z выполнено: $f(x) \approx a(x-z)^p$, тогда в окрестности z:

$$\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \approx 1 - \frac{a(x-z)^p\ ap(p-1)(x-z)^{p-2}}{a^2p^2(x-z)^{p-1}(x-z)^{p-1}} =$$
$$= 1 - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p}$$

Здесь это выполнено из того, что в окрестности z:

- $f(x) \approx a(x-z)^p$
- $f'(x) \approx ap(x-z)^{p-1}$
- $f(x) \approx ap(p-1)(x-z)^{p-2}$

Таким образом, в окрестности z:

$h'(x) = \left(x - p\ \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)' = 1 - p \cdot \left(\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)' = 1 - p \cdot \dfrac{1}{p} = 1 - 1 = 0$, в том числе и $h(z) = 0$.

Тогда можем записать (ξ из отрезка между x_n и z):

$$|z - x_{n+1}| = |h(z) - h(x_n)| = |h(z) - \left(h(z) + (z-x_n)h'(z) + \frac{1}{2}(z-x_n)^2h''(\xi)\right)| =$$

$= |\dfrac{1}{2}(z-x_n)^2h''(\xi)| = \dfrac{1}{2}\ |h''(\xi)||z-x_n|^2 = C\ |z-x_n|^2$, где $C = \dfrac{1}{2}\ |h''(\xi)|$, то есть у нас *квадратичная сходимость*.

Тут равенства следуют из того, что:

Первое: определение x_{n+1} + еще выше пояснение было, что $z = h(z)$.
Второе: разложили в Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
Третье: сократили $h(z)$ + использовали то, что $h'(z) = 0$

Итак, мы показали, что у нас квадратичная сходимость

Ответ на пункт а): $x_{n+1} = x_n - p\,\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

б) Для численной оценки кратности корня мы используем обычный классический метод Ньютона:

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Если z - корень кратности p, то в окрестности z функция будет иметь вид $f(x) \approx a(x-z)^p$.

Из предыдущего пункта мы знаем, что тогда $\left(\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)' = \dfrac{1}{p}$.

Итого: если мы обозначим $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = m(x_n)$, где $m(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, то

$m'(x) = 1 - \left(\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)' = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p}$, тогда аналогично предыдущему пункту:

$$x_{n+1} - z = m(x_n) - m(z) \approx m(z) + m'(z)(x_n - z) - m(z) = m'(z)(x_n - z) = \frac{p-1}{p}(x_n - z)$$

То есть у нас линейная скорость сходимости, но при этом мы можем найти p (численно) по алгоритму:

1. $\dfrac{p-1}{p} \approx \dfrac{x_{n+1} - z}{x_n - z}$ при приближении к z.

   Отсюда: $p = \left(1 - \dfrac{x_{n+1} - z}{x_n - z}\right)^{-1}$

2. Обозначим $p_n = \left(1 - \dfrac{x_{n+1} - z}{x_n - z}\right)^{-1}$ и будем вычислять его на каждом шаге метода Ньютона.

3. если p_n сходятся к какому-то целому неотрицательному p – это наша кратность, выводим ее.

Ответ к пункту б): На каждом шаге алгоритма считаем $p_n = \left(1 - \dfrac{x_{n+1} - z}{x_n - z}\right)^{-1}$, и если p_n сходятся к натуральному числу, то это и есть нужная нам кратность.