Теоретическая задача 12.1

Рассматривается параметрическое семейство однократно диагонально-неявных методов Рунге-Кутты. Найти все значения параметра, при которых метод имеет третий порядок аппроксимации.

Решение:

Для наличия третьего порядка аппроксимации должны быть выполнены условия:

1. Упрощающие условия:

   $a_{11} + a_{12} = c_1$, то есть $\gamma + 0 = \gamma$ – верно.

   $a_{21} + a_{22} = c_2$, то есть $1 - 2\gamma + \gamma = 1 - \gamma$ – верно.

2. $b_1 + b_2 = 1$, то есть $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ – верно.

3. $b_1c_1 + b_2c_2 = \frac{1}{2}$, то есть:

   $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma) = \frac{1}{2}$ – верно.

4. Непосредственно для наличия третьего порядка нужны еще 2 условия:

   (a) $b_1c_1^2 + b_2c_2^2 = \frac{1}{3}$, то есть:

   $\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}(1 - \gamma)^2 = \frac{1}{3}$

   $2\gamma^2 - 2\gamma + 1 = \frac{2}{3}$

   $2\gamma^2 - 2\gamma + \frac{1}{3} = 0$

   Отсюда находим: $\gamma_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\gamma_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$

   (b) $b_1a_{11}c_1 + b_1a_{12}c_2 + b_2a_{21}c_1 + b_2a_{22}c_2 = \frac{1}{6}$, то есть:

   $\frac{1}{2}\gamma\gamma + 0 + \frac{1}{2}(1 - 2\gamma)\gamma + \frac{1}{2}\gamma(1 - \gamma) = \frac{1}{6}$

   $\gamma^2 + \gamma - 2\gamma^2 + \gamma - \gamma^2 = \frac{1}{3}$

   $2\gamma^2 - 2\gamma + \frac{1}{3} = 0$

   Отсюда находим: $\gamma_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\gamma_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

   Они совпали со значениями, которые получились в предыдущем подпункте.

Ответ: $\gamma_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\gamma_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$.