Теоретическая задача 9.3

Предложить способ вычисления интеграла $\int\limits_0^1 cos(\frac{\pi}{x})dx$ с точностью $5 \cdot 10^{-5}$

Решение:

$I = \int\limits_0^1 cos(\frac{\pi}{x})dx$ – сложность вычисления этого интеграла состоит в том, что у него особенность в точке 0.

Одним из возможных вариантов вычисления этого интеграла является разбиение его на сумму двух интегралов:

$I = I_1 + I_2,$

$I_1 = \int\limits_0^\delta cos(\frac{\pi}{x})dx$

$I_2 = \int\limits_\delta^1 cos(\frac{\pi}{x})dx,$

где δ мы определим чуть позже.

Теперь особенность есть только у интеграла I_1, в то время как I_2 мы можем вычислить обычным методом трапеций.

Кроме того, можем вообще оценить $I_1 \approx 0$, и посмотрим, какая будет погрешность:

$|0 - I_1| = |\int\limits_0^\delta cos(\frac{\pi}{x})dx| \leq \int\limits_0^\delta |cos(\frac{\pi}{x})|dx \leq \int\limits_0^\delta 1dx = \int\limits_0^\delta dx = \delta$

Итак, погрешность вычислений в таком случае не будет превосходить δ. В таком случае, мы можем взять $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, где $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ – нужная точность из условия.

В таком случае, погрешность приближения I_1 нулём составит не более $\delta = \frac{\epsilon}{2} = 2.5 \cdot 10^{-5}$

Теперь нам осталось вычислить $I_2 = \int\limits_{\epsilon/2}^1 cos(\frac{\pi}{x})dx$, также с точностью $\frac{\epsilon}{2}$. Предлагается сделать это методом трапеций и оценить, какое число разбиений нам для этого потребуется, после чего мы и получим ответ.

Итак, погрешность в методе трапеций составляет:

$eps_{trap} \leq \frac{1}{12}M_2(b-a)h^2 = \frac{(b-a)^3}{12N^2}M_2,$

где в нашем случае $b = 1$, $a = \frac{\epsilon}{2}$, $M_2 = \max\limits_{[\epsilon/2,1]} |f''(x)|$, причем $f(x) = cos(\frac{\pi}{x})$.

Теперь оценим M_2:

$f'(x) = \frac{\pi \cdot sin(\frac{\pi}{x})}{x^2}$

$f''(x) = -\frac{\pi \cdot (2x \cdot sin(\frac{\pi}{x}) + \pi \cdot cos(\frac{\pi}{x}))}{x^4}$

Поскольку нам не требуется находить минимальное N, обеспечивающее необходимую точность, достаточно просто достижения этой точности, то можно оценить:

$$|f''(x)| = |\frac{\pi \cdot (2x \cdot sin(\frac{\pi}{x}) + \pi \cdot cos(\frac{\pi}{x}))}{x^4}| \leq \frac{\pi \cdot (|2x \cdot sin(\frac{\pi}{x})| + |\pi \cdot cos(\frac{\pi}{x})|)}{x^4} \leq$$

$$\leq \frac{\pi \cdot (2x \cdot 1 + \pi \cdot 1)}{x^4} = \frac{\pi \cdot (2x + \pi)}{x^4} \leq \frac{\pi \cdot (2 \cdot 1 + \pi)}{x^4} \leq \frac{\pi \cdot (2 + \pi)}{(\frac{\epsilon}{2})^4} = \frac{\pi \cdot (2 + \pi) \cdot 2^4}{\epsilon^4}$$

Таким образом, можем взять $M_2 = \frac{\pi \cdot (2 + \pi) \cdot 2^4}{\epsilon^4}$

Тогда имеем:

$eps_{trap} \le \frac{(b-a)^3}{12N^2} M_2 = \frac{(1-\frac{\epsilon}{2})^3}{12N^2} \cdot \frac{\pi \cdot (2+\pi) \cdot 2^4}{\epsilon^4}$

Нам нужно, чтобы была обеспечена точность $\frac{\epsilon}{2}$, то есть чтобы:

$\frac{(1-\frac{\epsilon}{2})^3}{12N^2} \cdot \frac{\pi \cdot (2+\pi) \cdot 2^4}{\epsilon^4} \le \frac{\epsilon}{2} = 2.5 \cdot 10^{-5}$, значит

$N \ge \sqrt{\frac{(1-\frac{\epsilon}{2})^3 \cdot \pi \cdot (2+\pi) \cdot 2^5}{12\epsilon^5}} \ge 371250321638.81573$

Таким образом минимальное подходящее число разбиений это: 371250321639.

Итак, наш итоговый алгоритм:

- Рассматриваем сумму интегралов $I = I_1 + I_2$
- Интеграл $I_1 = \int\limits_0^{\epsilon/2} cos(\frac{\pi}{x})dx$ считаем равным нулю, в ходе чего получаем ошибку, не превосходящую $\frac{\epsilon}{2}$
- Интеграл $I_2 = \int\limits_{\epsilon/2}^{1} cos(\frac{\pi}{x})dx$ считаем при помощи формулы трапеций с числом разбиений $N = 371250321639$, в ходе чего получаем ошибку не более $\frac{\epsilon}{2}$
- Итоговое значение, равное вычисленному в предыдущем пункте значению I_2 (поскольку мы приближали $I_1 \approx 0$), мы вычислили с итоговой точностью $\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, что и требовалось.