Теоретическая задача 2.1

Докажите, что $cond(AB) \leq cond(A)cond(B)$, где $cond(A)$ - число обусловленности матрицы в произвольной матричной норме

Решение:

На лекции рассматривалось определение $cond(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$. Таким образом, предполагается, что матрица квадратная (для неквадратных матриц обратных не существует). Значит, матрицы A и B - квадратные.

Далее, из определения мы знаем, что:

$cond(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$

$cond(B) = ||B^{-1}|| \cdot ||B||$

$cond(AB) = ||(AB)^{-1}|| \cdot ||AB|| = ||B^{-1}A^{-1}|| \cdot ||AB||$

Последнее равенство мы получили за счет того, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Далее, мы знаем, что по определению матричной нормы, для любых двух допускающих умножение матриц выполнено свойство субмультипликативности:

$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

Аналогично $||B^{-1}A^{-1}|| \leq ||B^{-1}|| \cdot ||A^{-1}||$

Перемножим левые и правые части полученных двух равенств:

$||B^{-1}A^{-1}|| \cdot ||AB|| \leq ||B^{-1}|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||A|| \cdot ||B||$

Из написанных выше 3 выражений имеем:

$cond(AB) = ||B^{-1}A^{-1}|| \cdot ||AB|| \leq ||B^{-1}|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||A|| \cdot ||B|| =$

$= (||A^{-1}|| \cdot ||A||) \cdot (||B^{-1}|| \cdot ||B||) = cond(A) \cdot cond(B)$

Итак,

$cond(AB) \leq cond(A)cond(B)$

Доказано.