Теоретическая задача 6.1

Задача 1

Функция e^x приближается на [0,1] интерполяционным многочленом степени 3 с чебышёвским набором узлов интерполяции. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит 10^{-3}.

Решение:

Приближение происходит многочленом степени 3, так что у нас 4 узла интерполяции. Поскольку это чебышевские узлы, то (с учетом того, что мы работаем на отрезке [0,1], а не [-1, 1]) они имеют вид:

$x_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\dfrac{(2k-1)\pi}{8}$, k = 1, 2, 3, 4

Таким образом (конкретно в этой задаче буду ради удобства нумеровать x не с 0, а с 1):

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\dfrac{\pi}{8}$

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\dfrac{3\pi}{8}$

$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\dfrac{5\pi}{8}$

$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\dfrac{7\pi}{8}$

Погрешность интерполяции можно будет оценить как:

$\Delta = |L_3(x) - f(x)| = \dfrac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} \cdot ||\omega(x)||,$

где $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$f^{(4)}(\xi(x)) = e^{\xi(x)}$ - так как $(e^x)' = e^x$.

Поскольку функция e^x возрастает на [0,1], то можем сказать, что $|f^{(4)}(\xi(x))| \leq e^1 = e$ при $\xi(x) \in [0,1]$

Оценим теперь $||\omega(x)||$:

$\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = (x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\dfrac{\pi}{8})(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\dfrac{3\pi}{8})(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\dfrac{5\pi}{8})\cdot$

$\cdot(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\dfrac{7\pi}{8})$

Однако мы можем вспомнить, что $cos\dfrac{5\pi}{8} = -cos\dfrac{3\pi}{8}$ и $cos\dfrac{7\pi}{8} = -cos\dfrac{\pi}{8}$.

Подставим это в формулу выше и используем формулу разности квадратов:

$\omega(x) = (x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\dfrac{\pi}{8})(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\dfrac{\pi}{8})(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\dfrac{3\pi}{8})(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\dfrac{3\pi}{8}) =$

$= ((x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}cos^2(\dfrac{\pi}{8}))((x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}cos^2(\dfrac{3\pi}{8})) =$

$= (x-\frac{1}{2})^4 - \frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})^2(cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{3\pi}{8})) + \frac{1}{16}cos^2(\dfrac{\pi}{8})cos^2(\dfrac{3\pi}{8})$

Отметим, что $||\omega|| = max|\omega(x)|$, где $x \in [0,1]$ (такая норма у нас по условию - равномерная).

Итак, $0 \leq x \leq 1$, значит $-\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, то есть

$0 \leq (x-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$

Сделаем замену:

$(x-\frac{1}{2})^2 = a$, имеем:

$a^2 - 2a \cdot \frac{1}{8}(cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{3\pi}{8})) + \frac{1}{64}(cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{3\pi}{8}))^2 - \frac{1}{64}(cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{3\pi}{8}))^2 +$

$+ \frac{1}{16} \cdot cos^2(\dfrac{\pi}{8})cos^2(\dfrac{3\pi}{8}) = (a - \frac{1}{8}(cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{3\pi}{8})))^2 - \frac{1}{64}(cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{3\pi}{8}))^2 +$

$+ \frac{1}{16} \cdot cos^2(\dfrac{\pi}{8})cos^2(\dfrac{3\pi}{8})$

Я буду пользоваться тем, что

$cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{3\pi}{8}) = cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}) = cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + sin^2(\dfrac{\pi}{8}) = 1$ - основное тригонометрическое тождество.

Кроме того, так как $0 \leq (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$, то $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$

Значит: $(a - \frac{1}{8}(cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{3\pi}{8})))^2 = (a - \frac{1}{8})^2 \leq (\frac{1}{8})^2 = \frac{1}{64}$ (в силу предыдущей строки).

Тогда можно отметить, что

$(a - \frac{1}{8}(cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{3\pi}{8})))^2 - \frac{1}{64}(cos^2(\dfrac{\pi}{8}) + cos^2(\dfrac{3\pi}{8}))^2 + \frac{1}{16} \cdot cos^2(\dfrac{\pi}{8})cos^2(\dfrac{3\pi}{8}) \leq$

$\leq \dfrac{1}{64} - \dfrac{1}{64} \cdot 1^2 + \frac{1}{16} \cdot cos^2(\dfrac{\pi}{8})cos^2(\dfrac{3\pi}{8}) = \frac{1}{16} \cdot cos^2(\dfrac{\pi}{8})cos^2(\dfrac{3\pi}{8}) \leq \frac{1}{16} \cdot (0.923879)^2 \cdot (0.382684)^2 \leq$

≤ 0.007

Таким образом, имеем:

$\Delta \leq \dfrac{e}{4!} \cdot 0.007 \leq 0.0007929 \leq 10^{-3}$,

что и требовалось доказать.

Доказано.

Задача 2

Оцените погрешность приближения функции e^x интерполяционным многочленом Лагранжа L_2 по узлам $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$ в точках 0.05 и 0.15.

Решение:

Погрешность интерполяции:

$L_2(x) - f(x) = \dfrac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!} \cdot \omega(x)$,

где $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = (x - 0)(x - 0.1)(x - 0.2) = x(x - 0.1)(x - 0.2)$

и $\xi(x) \in [min(x, x_0, x_1, x_2), max(x, x_0, x_1, x_2)]$, то есть $\xi(x) \in [0, 0.2]$

Поскольку погрешность в узнах не задана, считаем значения в узлах точными и учитываем только погрешность интерполяции.

Поскольку функция $f^{(3)}(x) = e^x$ - возрастает на $[0, 0.2]$, то можно сказать, что

$e^0 \leq |f^{(3)}(\xi(x))| \leq e^{0.2}$ при $\xi(x) \in [0, 0.2]$, то есть

$1 \leq |f^{(3)}(\xi(x))| \leq 1.22141$.

1) В точке 0.05:

$|\omega(x)| = 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.15 = 3.75 \cdot 10^{-4}$

Таким образом, прогрешность:

$|r| \leq \dfrac{1.22141}{6} \cdot 3.75 \cdot 10^{-4} \leq 0.7634 \cdot 10^{-4}$

2) В точке 0.15:

$|\omega(x)| = 0.15 \cdot 0.05 \cdot 0.05 = 3.75 \cdot 10^{-4}$ - точно такое же значение, как и в точке 0.05, так что и дальнейшие вычисления будут такие же (поскольку и на $|f^{(3)}(\xi(x))|$ оценка была такая же).

Ответ: Погрешность не превосходит $0.7634 \cdot 10^{-4}$

Задача 3

Задана табличная функция. С какой точностью можно восстановить значение в точке $x = \pi/5$, если известно, что функция в узлах задана с абсолютной погрешностью, не превосходящей 10^{-2}.

Решение:

В данной задаче погрешность сложится из 2 различных погрешностей:

- погрешность интерполяции
- погрешность измерения

Будем строить интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. У нас 4 узла интерполяции, значит многочлен будет 3-й степени.

$L(x) = f(x_0) \cdot c_0(x) + f(x_1) \cdot c_1(x) + f(x_2) \cdot c_2(x) + f(x_3) \cdot c_3(x)$, где:

- $c_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{-\pi^3/72}$
  $c_0(x_*) = -\dfrac{\pi^3 \cdot 72 \cdot 2}{30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \pi^3} = -0.016$
- $c_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{\pi^3/432}$
  $c_1(x_*) = 0.576$
- $c_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{-\pi^3/576}$
  $c_2(x_*) = 0.512$
- $c_3(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{\pi^3/216}$
  $c_3(x_*) = -0.072$

Посчитаем погрещность интерполяции:

$L(x) - f(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} \cdot \omega(x)$,

где $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = (x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3}) =$

$= x(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})$

$|L(x_*) - f(x_*)| \leq \Delta_{int} = \dfrac{M_4}{4!} \cdot |\omega(x_*)|$

У нас:

M_4 - максимум $f^{(4)}(\xi(x))$, где $\xi(x) \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

$f^{(4)}(x) = (sin(x))^{(4)} = (cos(x))''' = (-sin(x))'' = (-cos(x))' = sin(x)$,

На итервале $[0, \frac{\pi}{3}]$: $sin(x)$ - возрастающая функция, так что $M_4 = sin(\frac{\pi}{3}) \leq 0.8661$

$|\omega(x_*)| = \dfrac{\pi^4}{22500}$

Итого: $\Delta_{int} \leq \dfrac{0.8661}{24} \cdot \dfrac{\pi^4}{22500} \leq 0.000157$

В то же время $\Delta_{mes} \leq |f^*(x_0) \cdot c_0(x_*) + f^*(x_1) \cdot c_1(x_*) + f^*(x_2) \cdot c_2(x_*) + f^*(x_3) \cdot c_3(x_*) - f(x_*)|$, где $f^*(x_i) = f(x_i) + \delta$, $\delta = 10^{-2}$ - погрешность из условия.

Итак:

$\Delta_{mes} \leq |\delta(c_0(x_*) + c_1(x_*) + c_2(x_*) + c_3(x_*)) + f(x_0) \cdot c_0(x_*) + f(x_1) \cdot c_1(x_*) + f(x_2) \cdot c_2(x_*) +$

$+f(x_3)\cdot c_3(x_*)-f(x_*)|=|0.01\cdot(-0.016+0.576+0.512-0.072)+0+0.5\cdot 0.576+0.71\cdot 0.512-0.87\cdot 0.072-sin(\frac{\pi}{5})|\leq|0.01+0.288+0.36352-0.06264-0.587785|=0.0111$

Итого: $\Delta\leq\Delta_{int}+\Delta_{mes}=0.000157+0.0111=0.011257$

Прим.: Вообще, в одном из источников нашла способ подсчета второй погрешности в виде:
$\Delta_{mes}=\delta\cdot(|c_0(x_*)|+|c_1(x_*)|+|c_2(x_*)|+|c_3(x_*)|)=10^{-2}\cdot(0.016+0.576+0.512+0.072)=1.824\cdot 10^{-2}=0.01824$
Тогда получится, что:
$\Delta\leq\Delta_{int}+\Delta_{mes}=0.000157+0.01824=0.018397$

Но я все же оставлю первый способ.

Ответ: $\Delta\leq 0.011257$

Задача 4

Про функцию известно, что она имеет максимум при $x=1$ и ее значение в этой точке равно 1. В точке $x=2$ ее значение равно 0, а первая производная равна 3. Приблизить функцию интерполяционным полиномом 3-й степени на отрезке [1,2].

Решение:
Запишем функцию как $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.
Мы можем составить 4 уравнения на основе фактов из условия.

1. $f(1)=1$, поэтому $a+b+c+d=1$
2. $f'(1)=0$

   Это условие наличия экстремума в точке, кроме того, поскольку 1 - конец отрезка, воспринимаем это как одностороннюю правую производную, которая для многочлена также равна:

   $3a+2b+c=0$
3. $f(2)=0$, то есть

   $8a+4b+2c+d=0$
4. $f'(2)=3$, то есть

   $12a+4b+c=3$

Итак, получили систему из 4 уравнений:

$$\begin{cases}a+b+c+d=1\\3a+2b+c=0\\8a+4b+2c+d=0\\12a+4b+c=3\end{cases}$$

Решать будем постепенно:
1) Вычтем из четвертого уравнения второе и получим:

$9a + 2b = 3$, то есть $b = 1.5 - 4.5a$

2) Подставим результат во второе уравнение:

$c = -3a - 2b = -3a - 3 + 9a = 6a - 3$

3) Подставим a, b, c в третье уравнение:

$d = -8a - 4b - 2c = -8a - 6 + 18a - 12a + 6 = -2a$

4) Подставим все, что у нас есть, в первое уравнение:

$a + b + c + d = 1$, то есть

$a + 1.5 - 4.5a + 6a - 3 - 2a = 1$, $0.5a = 2.5$, откуда получаем, что:

$a = 5$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 1.5 - 4.5a = -21 \\ c = 6a - 3 = 27 \\ d = -2a = -10 \end{cases}$$

Итого: $f(x) = 5x^3 - 21x^2 + 27x - 10$

Проверим условия:

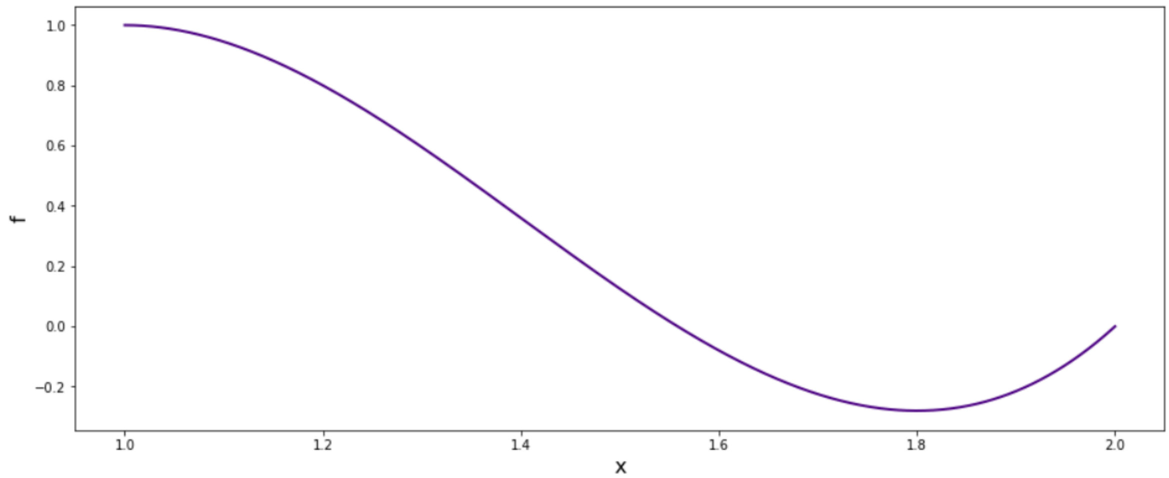
1) $f(1) = 5 - 21 + 27 - 10 = 1$

2) $f(2) = 40 - 84 + 54 - 10 = 0$

3) $f'(2) = 60 - 84 + 27 = 3$

4) $f'(1) = 15 + 27 - 42 = 0$

Кроме того, это действительно максимум на отрезке:



Ответ: $f(x) = 5x^3 - 21x^2 + 27x - 10$