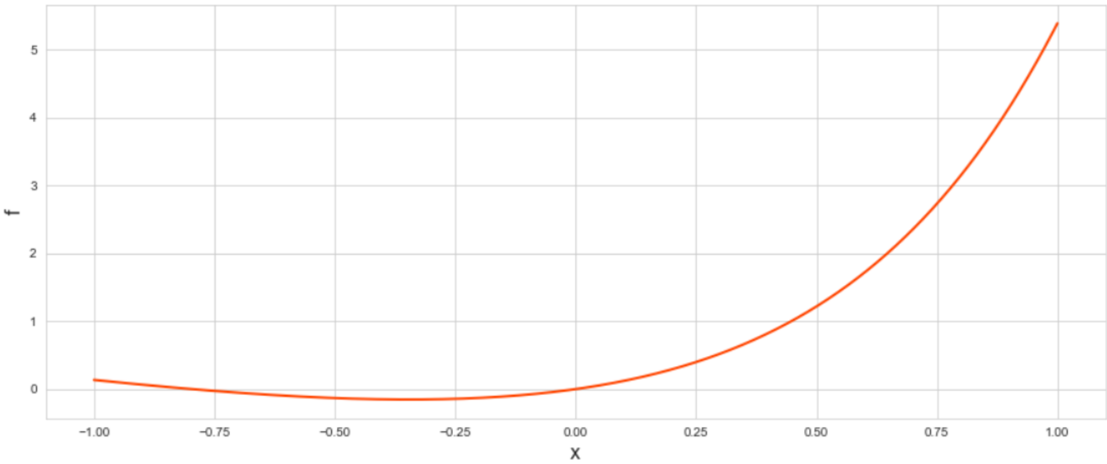
Теоретическая задача 10.2

Предложить метод простой итерации и определить область его сходимости для решения уравнения $x = e^{2x} - 1$.

Решение:

Посмотрим, как примерно графически будут расположены решения:



Итак, у нас будет 2 решения: одно в районе -0.7, второе около нуля.

Рассмотрим две функции для метода простой итерации:

1) Для поиска левого решения рассмотрим функцию непосредственно $x = e^{2x} - 1$.

То есть $f(x) = e^{2x} - 1$.

Для сходимости метода простой итерации нам надо: $|f'(x)| < 1$, то есть

$|2e^{2x}| < 1$.

Так как $2e^{2x}$ – это положительная возрастающая функция, то на интервале сходимости должно быть выполнено:

$2e^{2x} < 1$, то есть $x < \dfrac{ln(\frac{1}{2})}{2} \approx -0.3465$

Итак, область сходимости: $(-\infty; -0.3465)$, и левое решение в нее попадает.

Метод: $x_{n+1} = e^{2x_n} - 1$

2) Для поиска правого решения найдем функцию в виде:

$f(x) = x + \alpha F(x)$, где $F(x) = e^{2x} - x - 1$

Чтобы метод простой итерации сходился, надо: $|f'(x)| < 1$, то есть:

$|1 + \alpha F'(x)| < 1$

$-1 < 1 + \alpha F'(x) < 1$

$-2 < \alpha F'(x) < 0$

$-2 < \alpha(2e^{2x} - 1) < 0$

Возьмем $\alpha = -1$, так как правое решение в районе нуля, а $\alpha(2e^0 - 1) = \alpha = -1 \in (-2, 0)$

Итак, $f(x) = x - e^{2x} + x + 1 = -e^{2x} + 2x + 1$

То есть метод выглядит так: $x_{n+1} = -e^{2x_n} + 2x_n + 1$

Найдем область сходимости:

$|f'(x) < 1|$
$|-2e^{2x}+2| < 1$
$-1 < -2e^{2x}+2 < 1$
$-3 < -2e^{2x} < -1$
$1 < 2e^{2x} < 3$
$ln(\frac{1}{2}) < 2x < ln(\frac{3}{2})$
$\frac{ln(\frac{1}{2})}{2} < x < \frac{ln(\frac{3}{2})}{2}$,
то есть $-0.34657 < x < 0.202732$
Таким образом, область сходимости – это $(-0.34657, 0.202732)$.

Ответ: Мы используем две функции:
1) $x_{n+1} = e^{2x_n} - 1$ сходится на $(-\infty; -0.3465)$
2) $x_{n+1} = -e^{2x_n} + 2x_n + 1$ сходится на $(-0.34657, 0.202732)$.