Теоретическая задача 10.3

Выписать формулу метода Ньютона для поиска корня нелинейного уравнения. Начальное приближение к корню определить гарфически. Оценить априорно число итераций, необходимое для достижения точности $= 0.00001 = 10^{-5}$

а) $ln(x+2) - x^2 = 0$

б) $e^x - 2x - 2 = 0$

Решение:

Формула метода Ньютона для поиска корня нелинейного уравнения выглядит так:

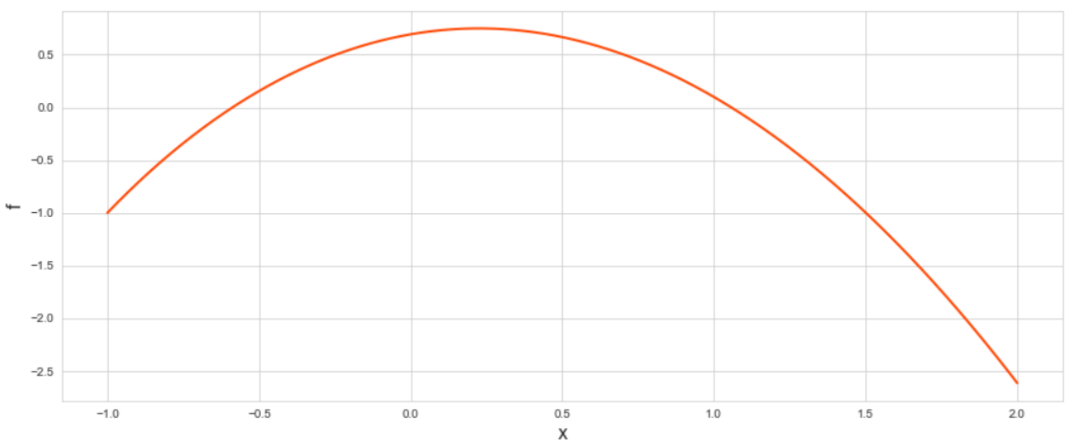
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

а) $f(x) = ln(x+2) - x^2$, $f'(x) = -2x + \dfrac{1}{x+2}$

Метод:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{ln(x_n+2) - x_n^2}{-2x_n + \dfrac{1}{x_n+2}}$$

Рассмотрим как выглядит график:



Как мы видим, у нас два решения. Поскольку в условии не требуется искать оба, найдем любое из них, например правое, которое расположено возле 1.

Функция непрерывная, при этом:

$f(0.8) = 0.3896 > 0$

$f(1.2) = -0.2768 < 0$

Значит, в силу непрерывности, на отрезке $[0.8, 1.2]$ имеется решение.

Теперь рассмотрим теорему о сходимости метода Ньютона. У нас $f'' \in C^2[0.8, 1.2]$, $f'(x) \neq 0$ при $x \in [0.8, 1.2]$.

Найдем γ:

$f''(x) = -2 - \dfrac{1}{(x+2)^2} < 0$ на $[0.8, 1.2]$, причем возрастает, так что

$max|f''(x)| = |f''(0.8)| = 2 \cdot 0.8 + \dfrac{1}{2.8^2} = 2.12755$

$f'(x) = -2x + \dfrac{1}{x+2} < 0$, причем убывает на отрезке, поэтому

$min|f'(x)| = |f'(0.8)| = 1.6 - \dfrac{1}{2.8} = 1.242857$

Тогда $\gamma = \dfrac{2.12755}{2 \cdot 1.242857} = \dfrac{2.12755}{2.4857143} = 0.8559$

Из этой теоремы:

$|e_k| \leq \gamma^{-1}(\gamma|e_0|)^{2^k}$

Мы хотим:

$\gamma^{-1}(\gamma|e_0|)^{2^k} \leq 10^{-5}$

$-ln(\gamma) + 2^k ln(\gamma|e_0|) \leq -5ln(10)$

$|e_0| \leq 1.0571 - 1 = 0.0571$

$2^k \geq \dfrac{5ln(10) - ln(\gamma)}{ln(\gamma|e_0|)} = \dfrac{11.512925 + 0.1556017}{3.01855} = 3.8656,$

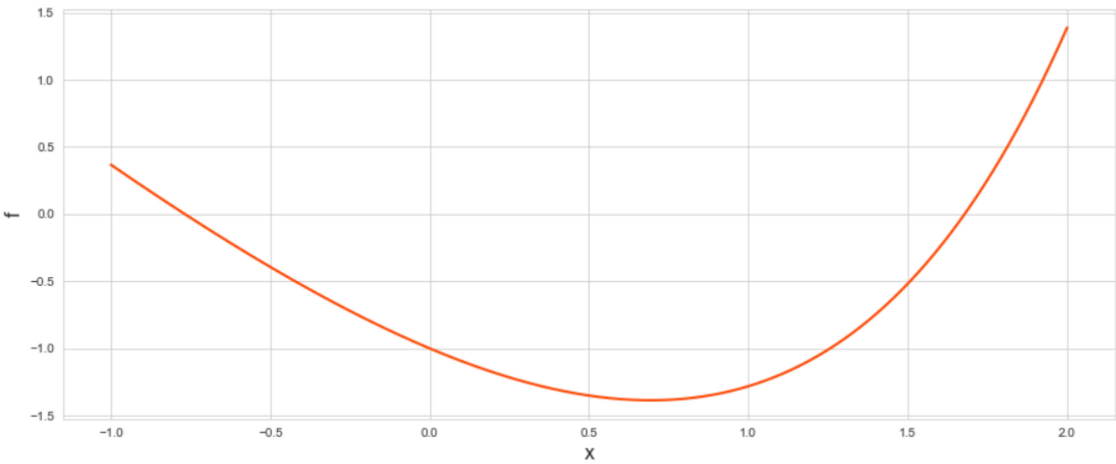
то есть $2^k \geq 3.8656$, значит $k \geq 2$.

б) $f(x) = e^x - 2x - 2$, $f'(x) = e^x - 2$

Метод:

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - 2x_n - 2}{e^{x_n} - 2}$

Рассмотрим как выглядит график:



Как мы видим, у нас два решения. Поскольку в условии не требуется искать оба, найдем любое из них, например правое, которое расположено возле 1.6.

Функция непрерывная, при этом:

$f(1.6) = -0.246967 < 0$

$f(1.7) = 0.073947 > 0$

Значит, в силу непрерывности, на отрезке $[1.6, 1.7]$ имеется решение.

Теперь рассмотрим теорему о сходимости метода Ньютона. У нас $f'' \in C^2[0.8, 1.2]$, $f'(x) \neq 0$ при $x \in [1.6, 1.7]$.

Найдем γ:

$f''(x) = e^x > 0$ на $[1.6, 1.7]$, причем возрастает, так что

$max|f''(x)| = |f''(1.7)| = e^{1.7} = 5.473947$

$f'(x) = e^x - 2 > 0$ на отрезке, причем возрастает на отрезке, поэтому

$min|f'(x)| = |f'(1.6)| = e^{1.6} - 2 = 2.9530324$

Тогда $\gamma = \dfrac{5.473947}{2 \cdot 2.9530324} = \dfrac{5.473947}{5.9060648} = 0.9268$

Из этой теоремы:

$|e_k| \leq \gamma^{-1}(\gamma|e_0|)^{2^k}$

Мы хотим:
$\gamma^{-1}(\gamma|e_0|)^{2^k} \leq 10^{-5}$
$-ln(\gamma) + 2^k ln(\gamma|e_0|) \leq -5ln(10)$
$|e_0| \leq 1.67834 - 1.65 = 0.02834$
$2^k \geq \frac{5ln(10) - ln(\gamma)}{ln(\gamma|e_0|)} = \frac{11.512925 + 0.07597983}{3.639498} = \frac{11.5889048}{3.639498} = 3.184,$
то есть $2^k \geq 3.184$, значит $k \geq 2$.

Ответ:
а) $k = 2$
б) $k = 2$