Теоретическая задача 2.2

Пусть B - действительная квадратная невырожденная матрица. Используя сингулярное разложение, выразите число обусловленности матрицы $A = B^T B$ в 2-норме через число обусловленности матрицы B в 2-норме.

Решение:

Пусть матрица B - размера $n \times n$. Поскольку из условия мы знаем, что она невырожденная, то ее ранг $rk(B) = n$.

Из теоремы о сингулярном разложении, матрицу B мы можем представить в виде произведения

$B = U\Sigma V^*$,

где U, V - унитарные матрицы (причем если B - вещественная по условию, то и эти матрицы можно выбрать как вещественные), а Σ, за счет того что $rk(B) = n$, имеет вид:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Кроме того, мы знаем, что $||B||_2 = \max\limits_k \sigma_k$, в то же время мы знаем, что унитарные матрицы сохраняют 2-норму:

$\max\limits_k \sigma_k = ||B||_2 = ||U\Sigma V^*||_2 = ||\Sigma V^*||_2 = ||\Sigma||_2$

Здесь мы использовали, что U - унитарная, а также что V^* - унитарная: это действительно так, ведь

$(V^*)^{-1} = (V^{-1})^* = (V^*)^* = V = (V^*)^*$

Тут 1 равенство и 3 - из свойств сопряжения, 2 - так как V - унитарная.

Значит, по определению, V^* - унитарная.

Итак, мы определили, что

$\max\limits_k \sigma_k = ||B||_2 = ||\Sigma||_2$

Мы знаем, что

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sigma_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \dfrac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}$$

как обратная к диагональной матрице.

Итак, можем также написать:

$||B^{-1}||_2 = ||(U\Sigma V^*)^{-1}||_2 = ||(V^*)^{-1}(U\Sigma)^{-1}||_2 = ||(V^{-1})^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1}||_2 = ||V\Sigma^{-1}U^{-1}||_2 =$
$= ||\Sigma^{-1}U^{-1}||_2 = ||\Sigma^{-1}||_2 = \max\limits_k \dfrac{1}{\sigma_k} = \dfrac{1}{\min\limits_k \sigma_k}$

Откуда мы здесь получаем равенства:

1 - просто расписали представление B

2 - Обратная матрица произведения

3 - снова обратная матрица произведения + воспользовались тем, что V - унитарная

4 - воспользовались тем, что $(V^{-1})^{-1} = V$

5 - унитарная матрица V сохраняет 2-норму

6 - унитарная матрица U^{-1} сохраняет 2-норму (ниже пояснено, почему она унитарная)

7 - диагональная матрица Σ^{-1} расписана выше

8 - поскольку из определения $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k(B^*B)} \geq 0$, то можем совершить этот переход.

Почему U^{-1} - унитарная:

$(U^{-1})^* = (U^*)^{-1} = (U^{-1})^{-1}$, то есть U^{-1} действительно унитарная, по определению унитарной матрицы (здесь первое равенство мы получили из свойств сопряжения, а второе - из унитарности U).

Итак, мы выяснили, что $cond(B) = ||B^{-1}|_2 \cdot ||B||_2 = \dfrac{\max\limits_k \sigma_k}{\min\limits_k \sigma_k}$

Рассмотрим теперь матрицу

$A = B^TB = (U\Sigma V^*)^T U\Sigma V^* = (V^*)^T(U\Sigma)^T U\Sigma V^* = (V^*)^T\Sigma^T U^T U\Sigma V^* = (V^*)^T\Sigma^T\Sigma V^* =$
$= (V^*)^T\Sigma\Sigma V^* = V\Sigma^2 V^*$

Откуда мы берем равенства:

1 - из условия

2 - расписали B

3, 4 - транспонирование произведения матриц

5 - так как матрица U - вещественная (см. начало док-ва, это из-за того, что по условию B - действительная), то $U^* = \overline{U^T} = U^T$, то есть

$U^T = U^* = U^{-1}$ (так как матрица унитарная), значит $U^TU = U^{-1}U = I$ - единичная матрица

6 - поскольку Σ - диагональная, то $\Sigma^T = \Sigma$

7 - так как V - тоже вещественная, то (аналогично 5-му равенству) $(V^*)^T = (V^T)^T = V$

Тепень можем записать $||A||_2 = ||V\Sigma^2V^*||_2 = ||\Sigma^2||_2$, так как матрицы V, V^* - унитарные, т.е. сохраняют 2-норму.

Кроме того, за счет диагональности Σ, имеем:

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $||A||_2 = \max\limits_k \sigma_k^2 = (\max\limits_k \sigma_k)^2$ (поскольку $\sigma_k \geq 0$) .

Аблолютно аналогично: $||A^{-1}||_2 = \dfrac{1}{(\min\limits_k \sigma_k)^2}$.

Итак, имеем: $cond(A) = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2 = \dfrac{(\max\limits_k \sigma_k)^2}{(\min\limits_k \sigma_k)^2} = (cond(B))^2$

Ответ: $cond(A) = (cond(B))^2$