Теоретическая задача 4.1

Итерационный метод Якоби применяется для решения линейной системы с трехдиагональной матрицей A. Диагональные элементы $(i=j)$ равны 4, элементы на 2-х ближайших диагоналях $(|i-j|=1)$ равны 1.

Найдите число итераций, нужное для достижения точности 10^{-6} в ∞ норме, если известно, что для начального приближения $||x-x_0||_\infty < 10$, где x - точное решение системы.

Решение:

1) Для рассмотрения метода Якоби представим матрицу A в виде:

$A = L + D + U$, где

L - строго нижнетреугольная часть

D - диагональная часть

U - строго верхнетреугольная часть

В нашем случае, согласно условию, матрица A равна:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 4 \end{pmatrix}$$

Очевидным образом данную матрицу раскладываем на L, D, U:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 4 \end{pmatrix}$$

2) Запишем шаг для итерационного метода Якоби:

$x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)x^k + D^{-1}b$

Обозначим $S = -D^{-1}(L+U)$ и посмотрим, чему равна эта матрица:

$$S = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & ... & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Также отметим, что $||S||_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |s_{ij}|$ - максимальная сумма модулей по строке.
В нашем случае $||S||_\infty = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Примечание: в принципе, при размере матрицы из условия (A) $n \le 2$ получится, что для матрицы S будет всего две (или одна при $n = 1$) строки, в каждой только один ненулевой элемент, равный $\frac{1}{4}$. И тогда $||S||_\infty = \frac{1}{4}$. Однако, без ограничения общности, будем считать, что метод Якоби мы применим для матрицы размера больше 2, и норма все же будет равна $\frac{1}{2}$

3) Из лекции мы знаем, что для любого итерационного метода вида
$x^{k+1} = Sx^k + f$
Число итераций мы можем оценить таким образом:
$k \ge \dfrac{log(\epsilon/||e^0||)}{log(q)}$,
где:
k - число итераций,
$\epsilon = 10^{-6}$ - необходимая точность, взятая из условия,
$||e^0|| = ||x - x_0||_\infty < 10$ - по условию,
$q = ||S||_\infty = \frac{1}{2}$ - по предыдущему пункту.
Итого, вычисляем:
$k \ge \dfrac{log(10^{-7})}{log(1/2)} \ge 23.253$
Итак, минимальное целое число итераций - это $k = 24$.

Ответ: $k = 24$ - необходимое число итераций.