Численное ОДУ

In [1]:

```
import numpy as np
from scipy import linalg as LA
import math
import matplotlib.pyplot as plt
```

Задание 1

Решите уравнение:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

с начальным условием $u(t = 0) = u_0$ явным методом Эйлера (с различным шагом τ, включая случай $|\lambda|\tau > 1$). Считайте, что $u_0 = 1$. Рассмотрите произвольные значения λ от 0.1 до 100.

Явная схема Эйлера:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n) = \lambda y_n$$

$$y_{n+1} = \tau\lambda y_n + y_n = y_n(1 + \tau\lambda)$$

In [12]:

```
# 10 случайных значений
lamdas = np.random.uniform(0.1, 100, 10)

# потому что сгенерирует, скорее всего, большие числа, итого 11 значений
lamdas = np.append(lamdas, 0.1)
```

In [13]:

```
lamdas
```

Out[13]:

```
array([37.276225  ,  1.3878437 , 56.75248516, 99.45755035, 38.34133749,
       32.83555496, 81.31367967, 12.28541926, 66.20323663, 84.01946343,
        0.1       ])
```

In [17]:

```
def find_solution1(tau, lamb):
    eps = 1e-2
    y = 1
    y_prev = 2 # просто чтобы не остановиться сразу
    while(abs(y-y_prev) > eps):
        y_prev = y
        y = y * (1 + tau * lamb)
    return y
```

In [20]:

```
tau = 0.0001
for l in lamdas:
    print("tau = ", tau, " lambda = ", l, " Solution: ", find_solution1(tau, l))
```

```
tau =  0.0001  lambda =  37.27622500067155  Solution:  1.003727622500067
tau =  0.0001  lambda =  1.3878436970813215  Solution:  1.000138784369708
tau =  0.0001  lambda =  56.75248515708388  Solution:  1.0056752485157083
tau =  0.0001  lambda =  99.45755035225588  Solution:  1.0099457550352255
tau =  0.0001  lambda =  38.341337487509826  Solution:  1.003834133748751
tau =  0.0001  lambda =  32.83555496225057  Solution:  1.0032835554962252
tau =  0.0001  lambda =  81.31367966652128  Solution:  1.0081313679666521
tau =  0.0001  lambda =  12.28541925843162  Solution:  1.001228541925843
tau =  0.0001  lambda =  66.20323663038467  Solution:  1.0066203236630384
tau =  0.0001  lambda =  84.01946342598993  Solution:  1.008401946342599
tau =  0.0001  lambda =  0.1  Solution:  1.00001
```

In [22]:

```
tau = 0.00001
for l in lamdas:
    print("tau = ", tau, " lambda = ", l, " Solution: ", find_solution1(tau, l))
```

```
tau =  1e-05  lambda =  37.27622500067155  Solution:  1.0003727622500067
tau =  1e-05  lambda =  1.3878436970813215  Solution:  1.0000138784369708
tau =  1e-05  lambda =  56.75248515708388  Solution:  1.0005675248515709
tau =  1e-05  lambda =  99.45755035225588  Solution:  1.0009945755035226
tau =  1e-05  lambda =  38.341337487509826  Solution:  1.000383413374875
tau =  1e-05  lambda =  32.83555496225057  Solution:  1.0003283555496225
tau =  1e-05  lambda =  81.31367966652128  Solution:  1.000813136796653
tau =  1e-05  lambda =  12.28541925843162  Solution:  1.0001228541925844
tau =  1e-05  lambda =  66.20323663038467  Solution:  1.0006620323663038
tau =  1e-05  lambda =  84.01946342598993  Solution:  1.00084019463426
tau =  1e-05  lambda =  0.1  Solution:  1.000001
```

In [33]:

```
# В нашем случае если |lambda|*tau>1, то каждый увеличивается более чем в 2 раза, расходимс
print("tau = ", 0.1, " lambda = ", 80, " Solution: ", find_solution1(0.1, 80))
```

```
tau =  0.1  lambda =  80  Solution:  inf
```

Задание 2

Решите уравнение:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

с начальным условием $u(t = 0) = u_0$ неявным методом Эйлера (с различным шагом τ, включая случай $|\lambda|\tau > 1$). Сравните результаты с результатами для явного метода Эйлера.

Явная схема Эйлера:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n, y_n) = \lambda y_{n+1}$$

$$y_{n+1}(1 - \tau\lambda) = y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - \tau\lambda}$$

In [24]:

```
# 10 случайных значений
lamdas = np.random.uniform(0.1, 100, 10)

# потому что сгенерирует, скорее всего, большие числа, итого 11 значений
lamdas = np.append(lamdas, 0.1)
```

In [25]:

```
def find_solution2(tau, lamb):
    eps = 1e-2
    y = 1
    y_prev = 2 # просто чтобы не остановиться сразу
    while(abs(y-y_prev) > eps):
        y_prev = y
        y = y / (1 - tau * lamb)
    return y
```

In [28]:

```
tau = 0.0001
for l in lamdas:
    print("tau = ", tau, " lambda = ", l, " Solution: ", find_solution2(tau, l))
```

```
tau =  0.0001  lambda =  36.233470540981706  Solution:  1.0036365234405937
tau =  0.0001  lambda =  54.46723932672665  Solution:  1.0054765532060888
tau =  0.0001  lambda =  57.35089999762182  Solution:  1.005768170979463 5
tau =  0.0001  lambda =  12.81548165451193  Solution:  1.0012831926386232
tau =  0.0001  lambda =  22.769773898825257  Solution:  1.0022821738481345
tau =  0.0001  lambda =  0.273381881078379  Solution:  1.0000273389355048
tau =  0.0001  lambda =  94.4656598023507  Solution:  1.0095366546173081
tau =  0.0001  lambda =  76.16184521810166  Solution:  1.0076746359654607
tau =  0.0001  lambda =  11.461845924982674  Solution:  1.0011474998391339
tau =  0.0001  lambda =  58.113273908631406  Solution:  1.005845296321484
tau =  0.0001  lambda =  0.1  Solution:  1.000010000100001
```

In [29]:

```
tau = 0.00001
for l in lamdas:
    print("tau = ", tau, " lambda = ", l, " Solution: ", find_solution2(tau, l))
```

```
tau =  1e-05  lambda =  36.233470540981706  Solution:  1.0003624660394355
tau =  1e-05  lambda =  54.46723932672665  Solution:  1.0005449692229582
tau =  1e-05  lambda =  57.35089999762182  Solution:  1.0005738381012919
tau =  1e-05  lambda =  12.81548165451193  Solution:  1.0001281712423071
tau =  1e-05  lambda =  22.769773898825257  Solution:  1.0002277495970566
tau =  1e-05  lambda =  0.273381881078379  Solution:  1.0000027338262845
tau =  1e-05  lambda =  94.4656598023507  Solution:  1.0009455498178976
tau =  1e-05  lambda =  76.16184521810166  Solution:  1.0007621989569708
tau =  1e-05  lambda =  11.461845924982674  Solution:  1.000114631598147
tau =  1e-05  lambda =  58.113273908631406  Solution:  1.0005814706507183
tau =  1e-05  lambda =  0.1  Solution:  1.000001000001
```

В целом, результаты очень похожи на те, что были получены в явном методе Эйлера. Время выполнения и полученные результаты довольно похожи.

In [35]:

```
# В нашем случае если |lambda|*tau>1, то в отличие от явного метода, мы СОЙДЕМСЯ
print("tau = ", 0.1, " lambda = ", 80, " Solution: ", find_solution2(0.1, 80))
```

```
tau =  0.1  lambda =  80  Solution:  0.00041649312786339027
```

Но результат при этом получился не очень хороший.

Задание 3

Рассмотрим уравнение, описывающее поведение маятника

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$$

Приведите это уравнение к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка.

3.1 Решите полученную систему уравнений с помощью явного метода Эйлера.

3.2 Известно, что в уравнении движения маятника сохраняется энергия, т. е.

$$E = \frac{u'^2}{2} + \frac{\omega^2 u^2}{2}$$

остаётся постоянной величиной. Постройте зависимость E от времени для Вашего численного решения. Подтврждается ли сохранение энергии?

3.3 Реализуйте метод Рунге–Кутты 2-го порядка. Сравните решения полученные этими методами (для различных шагов дискретизации расчётной сетки).

Система дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\omega^2 u \end{cases}$$

3.1

In [54]:

```
def solve_eyler(tau, omega):
    u = 1
    v = 1
    u_prev = 10
    v_prev = 10
    eps = 1e-3
    while(abs(u-u_prev) > eps or abs(v-v_prev) > eps):
        u_prev = u
        v_prev = v
        u = u + tau * v
        v = v + tau * omega * omega * u_prev
    return u, v
```

In [55]:

```
solve_eyler(0.0001, 0.01)
```

Out[55]:

```
(1.0001, 1.00000001)
```

3.2

In [70]:

```
def get_E(t, omega):
    u, v = solve_eyler(t, omega)
    E = 0.5 * v**2 + 0.5 * u**2 * omega**2
    return E
```

In [78]:

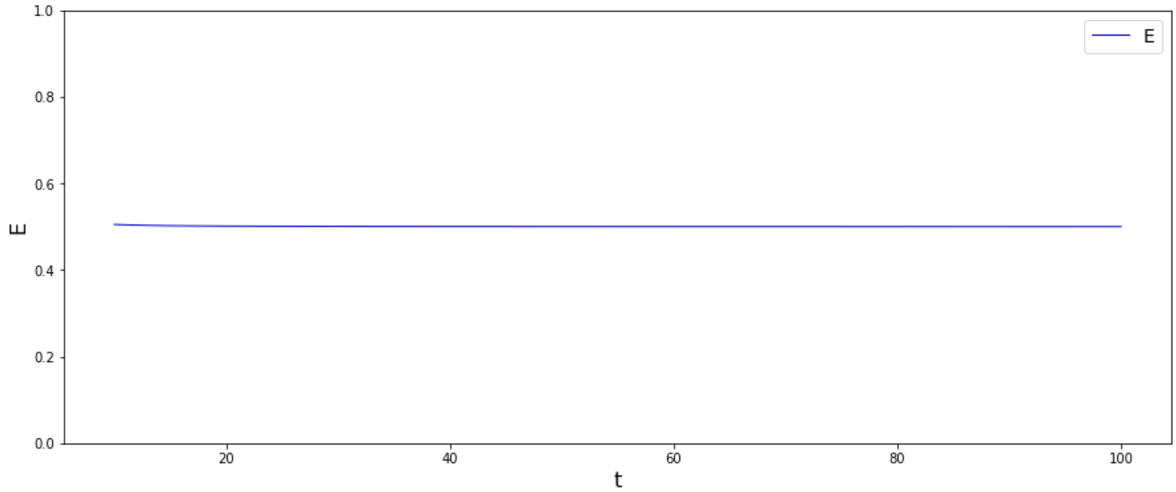
```
tau = 0.0001
E = []

for omega in np.linspace(0.01, 0.1, 12):
    # omega = 1/T
    e = get_E(tau, omega)
    print(e)
    E.append(e)
```

```
0.5000500200004999
0.5001653553735543
0.5003476596728992
0.5005969328985361
0.5009131750504672
0.5012963861286948
0.501746566133222
0.5022637150640528
0.502847832921191
0.5034989197046413
0.5042169754144091
0.5050020000505
```

In [81]:

```
omegas = np.linspace(0.01, 0.1, 12)
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(1/omegas, E, color = 'blue', label = "E", linewidth = 1)
plt.xlabel('t', fontsize=16)
plt.ylabel('E', fontsize=16)
plt.legend(fontsize=14)
plt.ylim(0, 1)
plt.show()
```



Действительно, сохраняется.

3.3

2-й порядок:

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2}$$

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$c_1 = a_{11} + a_{12}$$

$$c_2 = a_{21} + a_{22}$$

Считаем: $c_1 = 0, a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0,$

тогда имеем:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n))$$

In [82]:

```
def solve_rk(t, h, omega):
    u = 1
    v = 1
    u_prev = 10
    v_prev = 10
    eps = 1e-3
    while(abs(u-u_prev) > eps or abs(v-v_prev) > eps):
        u_prev = u
        v_prev = v
        u = u + v * h/2
        v = v - omega**2 * (u * h/2)
    return u, v
```

In [91]:

```
solve_rk(0.001, 0.001, 0.01)
```

Out[91]:

```
(1.0005, 0.999999949975)
```

In [94]:

```
def get_E2(t, h, omega):
    u, v = solve_rk(t, h, omega)
    E = 0.5 * v**2 + 0.5 * u**2 * omega**2
    return E
```

In [95]:

```
tau = 0.0001
E2 = []

for omega in np.linspace(0.01, 0.1, 12):
    # omega = 1/T
    e = get_E2(tau, 0.001, omega)
    print(e)
    E2.append(e)
```

```
0.5000499999875012
0.5001652892148897
0.5003475205743373
0.5005966940658807
0.50091280968957
0.5012958674454686
0.5017458673336536
0.502262809354215 6
0.5028466935072583
0.5034975197928994
0.5042152882112693
0.5049999987625124
```

Возьмем другой шаг:

In [96]:

```
tau = 0.0001
E2 = []

for omega in np.linspace(0.01, 0.01, 12):
    # omega = 1/T
    e = get_E2(tau, 0.001, omega)
    print(e)
    E2.append(e)
```

```
0.5000499999875012
0.5000499999875012
0.5000499999875012
0.5000499999875012
0.5000499999875012
0.5000499999875012
0.5000499999875012
0.5000499999875012
0.5000499999875012
0.5000499999875012
0.5000499999875012
0.5000499999875012
```

Так, с уменьшением шага, результаты стали еще более точными.

Результаты совпали с полученными в первой части.