Теоретическая задача 11.1

Для численного решения краевой задачи
$u''(x) = f(x), u(0) = a, u(1) = b$
используется конечно-разностная аппроксимация
$U_{i+1} - 2U_i + U_{i+1} = \dfrac{h^2}{12}(f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1})$
Найдите порядок аппроксимации разностной схемы.

Решение:
Для выражения
$U_{i+1} - 2U_i + U_{i+1} = \dfrac{h^2}{12}(f_{i+1} + 10f_i + f_{i+1})$
рассмотрим первое и последнее уравнения. Они содержат известные значения:

- $U_2 - 2U_1 + U_0 = \dfrac{h^2}{12}(f_2 + 10f_1 + a)$, тут $U_0 = a$
- $U_{m+1} - 2U_m + U_{m-1} = \dfrac{h^2}{12}(b + 10f_m + f_{m-1})$, тут $U_{m+1} = b$

Теперь будем искать порядок аппроксимации.
Мы можем записать:
$U_{i-1} = u(x_i - h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \dfrac{h^2}{2}u''(x_i) + \dfrac{h^3}{6}u'''(x_i) + \dfrac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \dfrac{h^5}{120}u^{(5)}(x_i) +$
$+ \dfrac{h^6}{720}u^{(6)}(x_i) + O(h^6)$
$U_i = u(x_i)$
$U_{i+1} = u(x_i + h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \dfrac{h^2}{2}u''(x_i) - \dfrac{h^3}{6}u'''(x_i) + \dfrac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) - \dfrac{h^5}{120}u^{(5)}(x_i) +$
$+ \dfrac{h^6}{720}u^{(6)}(x_i) + O(h^6)$
Тогда:
$U_{i+1} - 2U_i + U_{i+1} = u(x_i) + hu'(x_i) + \dfrac{h^2}{2}u''(x_i) + \dfrac{h^3}{6}u'''(x_i) + \dfrac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \dfrac{h^5}{120}u^{(5)}(x_i) +$
$+ \dfrac{h^6}{720}u^{(6)}(x_i) - 2u(x_i) + u(x_i) - hu'(x_i) + \dfrac{h^2}{2}u''(x_i) - \dfrac{h^3}{6}u'''(x_i) + \dfrac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) - \dfrac{h^5}{120}u^{(5)}(x_i) +$
$+ \dfrac{h^6}{720}u^{(6)}(x_i) + O(h^6) = h^2u''(x_i) + \dfrac{h^4}{12}u^{(4)}(x_i) + \dfrac{h^6}{360}u^{(6)}(x_i) + O(h^6)$

Выражение из условия можем переписать в виде:
$\dfrac{1}{h^2}(U_{i+1} - 2U_i + U_{i+1}) = \dfrac{1}{12}(f_{i+1} + 10f_i + f_{i+1}) = \dfrac{1}{12}f_{i+1} + \dfrac{10}{12}f_i + \dfrac{1}{12}f_{i-1}$

В то же время для нашей краевой задачи: $f(x) = u''(x)$, так что:
$\dfrac{1}{h^2}(U_{i+1} - 2U_i + U_{i+1}) = \dfrac{1}{h^2}(h^2u''(x_i) + \dfrac{h^4}{12}u^{(4)}(x_i) + \dfrac{h^6}{360}u^{(6)}(x_i) + O(h^6)) =$
$= u''(x_i) + \dfrac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i) + \dfrac{h^4}{360}u^{(6)}(x_i) + O(h^4) = f(x_i) + \dfrac{h^2}{12}f''(x_i) + \dfrac{h^4}{360}f^{(4)}(x_i) + O(h^4)$

Для правой части выражения из условия можем написать:
$f_{i-1} = f(x_i - h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \dfrac{h^2}{2}f''(x_i) + \dfrac{h^3}{6}f'''(x_i) + \dfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x_i) + O(h^4)$
$f_{i+1} = f(x_i + h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \dfrac{h^2}{2}f''(x_i) - \dfrac{h^3}{6}f'''(x_i) + \dfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x_i) + O(h^4)$

Тогда:
$$\frac{1}{12}(f_{i+1}+10f_i+f_{i+1}) = \frac{1}{12}(f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2}f''(x_i)+\frac{h^3}{6}f'''(x_i)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_i)+10f(x_i)+$$
$$+f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2}f''(x_i)-\frac{h^3}{6}f'''(x_i)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_i)+O(h^4)) =$$
$$= f(x_i)+\frac{h^2}{12}f''(x_i)+\frac{h^4}{144}f^{(4)}(x_i)+O(h^4)$$

Таким образом, в итоге имеем:
$$r_i = \frac{1}{h^2}(U_{i+1}-2U_i+U_{i+1}) - \frac{1}{12}(f_{i+1}+10f_i+f_{i+1}) =$$
$$= f(x_i)+\frac{h^2}{12}f''(x_i)+\frac{h^4}{360}f^{(4)}(x_i)-f(x_i)-\frac{h^2}{12}f''(x_i)-\frac{h^4}{144}f^{(4)}(x_i)+O(h^4) = -\frac{h^4}{240}f^{(4)}(x_i)+O(h^4)$$
Это, можно сказать, что $O(h^4)$.
Значит, у нас четвертый порядок аппроксимации.

Ответ: 4-й порядок аппроксимации.