Теоретическая задача 1.2

Докажите, что

$\|xy^*\|_F = \|xy^*\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2 \quad \forall x, y \in C^n$

Решение:

1)

$$\|xy^*\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i y_j^*|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i|^2 \cdot |y_j^*|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i|^2 \cdot |\overline{y}_j^T|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i|^2 \cdot |y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|x_1|^2 \cdot |y_1|^2 + |x_1|^2 \cdot |y_2|^2 + ... + |x_1|^2 \cdot |y_n|^2 + |x_2|^2 \cdot |y_1|^2 + ... + |x_n|^2 \cdot |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left((|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2) \cdot (|y_1|^2 + |y_2|^2 + ... + |y_n|^2)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |y_j|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = ||x||_2 \cdot ||y||_2$$

Вот откуда мы получаем каждый из восьми знаков равенства в написанном выше выражении:

1 - по определению нормы Фробениуса

2 - разложили модуль произведения

3 - из определения $y^* = \overline{y^T}$

4 - так как $|\overline{y}_j| = |y_j|$

5 - расписали сумму

6 - сгруппировали множители

7 - записали то же самое с использованием знака суммы

8 - из определения $||.||_2$-нормы.

2)

Рассмотрим, чему равна норма $\|xy^*\|_2$. Обозначим $A = xy^*$, тогда

$||A||_2 = \max\limits_k \sigma_k$, где $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k(A^*A)}$. (Вообще можно рассматривать и AA^T, но напишем A^*A, как в лекции).

Итак, осталось найти собственные значения матрицы A^*A.

Для начала посчитаем, какой ранг у матрицы A.

Вспомним, как выражается эта матрица:

$$A = xy^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & ... & \overline{y_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1\overline{y_1} & x_1\overline{y_2} & ... & x_1\overline{y_n} \\ x_2\overline{y_1} & x_2\overline{y_2} & ... & x_2\overline{y_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n\overline{y_1} & x_n\overline{y_2} & ... & x_n\overline{y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$$

Здесь мы просто перемножили матрицы и обозначили строки полученной матрицы за a_i.

Теперь заметим, что строки полученной матрицы являются линейно зависимыми.

Если все $x_i = 0, \quad i = 1, ...n$, то матрица нулевая, ранг ноль. Тогда, очевидно, собственное значение будет нулевое, получим $||A||_2 = 0$, однако и $||x||_2 = 0$, то есть будет выполнено $\|xy^*\|_2 = 0 = \|x\|_2\|y\|_2$, что и требовалось. Таким образом, для этого случая задача решена.

Однако же рассмотрим нетривиальный случай, когда есть ненулевые x_i. Без ограничения общности, скажем, что $x_1 \neq 0$. Тогда все строки матрицы мы сможем очевидным образом выразить через первую:

$a_i = a_1 \cdot \dfrac{x_i}{x_1}, \quad i = 2, ..., n.$

Итак, по определению, ранг матрицы A равен 1:

$rk(A) = 1$

Аналогично $rk(A^*) = 1$

Теперь воспользуемся теоремой о ранге произведения матриц: "Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей".

Итак, $rk(A^*A) \leq 1$.

Теперь воспользуемся утверждением о том, что количество ненулевых различных собственных значений не превосходит ранг матрицы (доказывается это приведением матрицы к жордановой нормальной форме; кроме того, знаем, что при элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется).

Значит, у матрицы A^*A не более одного ненулевого собственного значения. Найдем его в явном виде:

$A^*A = (xy^*)^*xy^* = yx^*xy^*$

Здесь мы использовали то, что $(AB)^* = B^*A^*$.

Итак, мы можем написать так:

$(yx^*xy^*)y = yx^*xy^*y = y(x^*xy^*y)$

Мы здесь просто переставили скобки. Однако (x^*xy^*y) имеет размерность 1, то есть это некое число $\lambda = x^*xy^*y$. Тогда можем переписать выражение выше в новом виде:

$(A^*A)y = \lambda y,$

то есть y - собственный вектор A^*A с собственным значением λ.

Поскольку мы выяснили, что у матрицы A^*A может быть не более одного ненулевого собственного значения (так как ее ранг равен единице), то имеем:

$||A||_2 = \sigma = \sqrt{\lambda(A^*A)} = \sqrt{x^*xy^*y}$

Распишем:

$$x^*x = (\overline{x_1} \quad \overline{x_2} \quad ... \quad \overline{x_n}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \overline{x_1} \cdot x_1 + \overline{x_2} \cdot x_2 + ... + \overline{x_n} \cdot x_n =$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = ||x||_2^2$$

Аналогично $y^*y = ||y||_2^2$.

Итак, мы можем записать:

$\|xy^*\|_2 = ||A||_2 = \sigma = \sqrt{\lambda(A^*A)} = \sqrt{x^*xy^*y} = \sqrt{||x||_2^2 \cdot ||y||_2^2} = ||x||_2 \cdot ||y||_2$

3)

Из пункта 1: $\|xy^*\|_F = \|x\|_2\|y\|_2$

Из пункта 2: $\|xy^*\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2$

Итак, требуемое в условии доказано.