Теоретическая задача 9.1

Табличная функция f_i есть проекция на равномерную сетку с шагом h бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$. Используется приближенный метод вычисления первой производной:

$f'(x_2) \approx \dfrac{f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3}{6h}$

Каков порядок аппроксимации этой формулы? Указать оптимальный шаг численного дифференцирования и максимальную точность, с которой может быть найдено значение производной.

Решение:

Разложим в ряды Тейлора:

$f_0 = f(x_2 - 2h) = f(x_2) - 2hf'(x_2) + 2h^2 f''(x_2) - \dfrac{4}{3}h^3 f'''(x_2) + \dfrac{2}{3}h^4 f''''(x_2) + ...$

$f_1 = f(x_2 - h) = f(x_2) - hf'(x_2) + \dfrac{1}{2}h^2 f''(x_2) - \dfrac{1}{6}h^3 f'''(x_2) + \dfrac{1}{24}h^4 f''''(x_2) + ...$

$f_2 = f(x_2)$

$f_3 = f(x_2 + h) = f(x_2) + hf'(x_2) + \dfrac{1}{2}h^2 f''(x_2) + \dfrac{1}{6}h^3 f'''(x_2) + \dfrac{1}{24}h^4 f''''(x_2) + ...$

Рассмотрим погрешность метода:

$|f'(x_2) - \dfrac{f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3}{6h}| =$

$= |\dfrac{6hf'(x_2) - (f(x_2) - 2hf'(x_2) + 2h^2 f''(x_2) - \frac{4}{3}h^3 f'''(x_2) + \frac{2}{3}h^4 f''''(x_2))}{6h} +$

$+ \dfrac{6(f(x_2) - hf'(x_2) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_2) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x_2) + \frac{1}{24}h^4 f''''(x_2)) - 3f(x_2)}{6h} +$

$+ \dfrac{-2(f(x_2) + hf'(x_2) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_2) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x_2) + \frac{1}{24}h^4 f''''(x_2)) + O(h^5)}{6h}|$

$= |\dfrac{6hf'(x_2) - f(x_2) + 2hf'(x_2) - 2h^2 f''(x_2) + \frac{4}{3}h^3 f'''(x_2) - \frac{2}{3}h^4 f''''(x_2)}{6h} +$

$+ \dfrac{6f(x_2) - 6hf'(x_2) + 3h^2 f''(x_2) - h^3 f'''(x_2) + \frac{1}{4}h^4 f''''(x_2) - 3f(x_2)}{6h} +$

$+ \dfrac{-2f(x_2) - 2hf'(x_2) - h^2 f''(x_2) - \frac{1}{3}h^3 f'''(x_2) - \frac{1}{12}h^4 f''''(x_2) + O(h^5)}{6h}| =$

$= |\dfrac{1}{6}(0 \cdot f(x_2) + 0 \cdot f'(x_2) + 0 \cdot f''(x_2) + 0 \cdot f'''(x_2) - \dfrac{h^3}{2} f''''(x_2) + O(h^4))| =$

$= \dfrac{h^3}{12} f''''(x_2) + O(h^4)$

$4 = p + 1 \Rightarrow p = 3$ – порядок аппроксимации.

Далее, $|r_1| \leq M_4 \cdot h^3 \cdot (\dfrac{2}{18} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{72}) = \dfrac{M_4 h^3}{6}$

(из модулей коэффициентов при третьей производной)

В то же время оценим погрешность округления:

Если $|\epsilon(x)| \leq E$, то для нашей формулы:

$|r_2| \leq \dfrac{\epsilon + 6\epsilon + 3\epsilon + 2\epsilon}{6h} \leq 2\dfrac{E}{h}$

Итого:

$|r| \leq |r_1| + |r_2| \leq \dfrac{M_4 h^3}{6} + 2\dfrac{E}{h}$

В поисках оптимального h, продифференцируем ошибку (см. выражение в строке выше) по h:

$\dfrac{M_4 h^2}{2} - 2\dfrac{E}{h^2} = 0$ – условие оптимума

$M_4 h^4 = 4E$

$h_{opt} = \left(\dfrac{4E}{M_4}\right)^{\dfrac{1}{4}}$ – оптимальное значение h.

Найдем максимальную точность, а именно значение ошибки при оптимальном h:

$\dfrac{M_4}{6}\left(\dfrac{4E}{M_4}\right)^{\dfrac{3}{4}} + 2E\left(\dfrac{4E}{M_4}\right)^{-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{4^{\frac{3}{4}}}{6}E^{\frac{3}{4}}M_4^{1-\frac{3}{4}} + 2\cdot 4^{-\frac{1}{4}}E^{1-\frac{1}{4}}M_4^{\frac{1}{4}} =$

$= E^{\frac{3}{4}}M_4^{\frac{1}{4}}(\dfrac{2\sqrt{2}}{6} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}) = E^{\frac{3}{4}}M_4^{\frac{1}{4}}(\dfrac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}E^{\frac{3}{4}}M_4^{\frac{1}{4}}$

Ответ:

p = 3 – порядок аппроксимации

$h_{opt} = \left(\dfrac{4E}{M_4}\right)^{\dfrac{1}{4}}$ – оптимальное значение h.

$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}E^{\frac{3}{4}}M_4^{\frac{1}{4}}$ – максимальная точность