Задача 3

Выбранная в тесте сложность:

$O(N^{2.373} log(N))$.

Объяснение:

Для начала рассмотрим хороший алгоритм для перемножения матриц.

Рассматриваем алгоритм A и векторы x, y размерности M. Наш алгоритм A при поданных на вход x, y считает M значений вида $z_k = \sum_{i,j} t_{ijk} x_i y_j$, где $t_{ijk} \in \{0, 1\}$.

Далее, рассмотрим алгоритм A^n, полученный как алгоритм A, примененный к x, y длины M^n рекурсивно n раз. Мы разбиваем x, y на векторы длины M^{n-1} (их будет M штук). Затем применяем алгоритм A к x, y (они будут рассмотрены как векторы длины M, хотя их длины M^{n-1}).

В чем заключается цель алгоритма: занулить достаточно переменных x_i, y_j, z_k, чтобы на получившихся векторах x, y алгоритм A выдал произведение матриц. Одна из основных техник - разбиваем индексы на тройки (i, j, k), а затем анализируем для каждой группы g:

$\{z_{kg} = \sum_{i,j:(i,j,k)\in g} t_{ijk} x_i y_j\}_k$ - анализируется, насколько полученный результат похож на произведение матриц.

Таким образом, уже при A^2 получается хороший результат (в степени будет меньше 2.376).

В дальнейшем мы рассматриваем "Coppersmith and Winograd's"-конструкцию для вычисления симметричной трилинейной формы (произведение матриц мы можем представить в виде трилинейной формы). Затем углубляемся в теорию групп и работаем с тензорами.

В итоге получаем, что матричное умножение можно проделать за $O(N^{2.373})$.

Вернемся к основной цели: оценке сложности алгоритма нахождения диаметра произвольной сети.

Рассмотрим матрицу M размера $n * n$, где строки и столбцы - вершины графа (сети). И если вершины не соединены ребром, то в соответствующем пересечении строк и столбцов будет стоять ноль. И если для некоторого многочлена степени k:

$p_k(M)(u, v) \neq 0$, тогда для диаметра графа (сети) верно: $D \leq k$.

Пусть M - сумма единичной матрицы и матрицы смежности для данного графа. Положим $p_k(x) = (1 + x)^k$

Тогда можем записать:

$$D \leq \left(\frac{log(n-1)}{log(1/(1-\lambda))} \right).$$

Здесь λ - собственное значение (можно брать, например λ_1, если $1 - \lambda_1 \geq \lambda_{n-1} - 1$

За счет оценивания λ, можно получить:

$$D \leq \left(\frac{log(n-1)}{log(\frac{\lambda_{n-1}+\lambda_1}{\lambda_{n-1}-\lambda_1})} \right).$$

Оценку можно улучшить, взяв в качестве многочлена многочлен Чебышева степени k, тогда:

$$D \leq \left(\frac{cosh^{-1}(n-1)}{cosh^{-1}(\frac{\lambda_{n-1}+\lambda_1}{\lambda_{n-1}-\lambda_1})} \right).$$

Для матрицы смежности A мы можем считать диаметром минимальное такое число k, что все элементы матрицы M^k ненулевые, где $M = A + I$, I - единичная матрица. Для этого потребуется $O(logN)$ операций матричного умножения, каждая из которых, как мы упомянули выше, занимает $O(N^{2.373})$.

Поэтому в итоге мы и получаем оценку $O(N^{2.373}log(N))$.