1

Préparation

On considère l'espace $\mathcal{L}^2([-1\,,1],\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable définies sur $[-1\,,1]$ à valeurs réelles.

1) Vérifier que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{L}^2([-1\,,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{L}^2([-1\,,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^2([-1\,,1],\mathbb{R}),$$

définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2([-1\,,1],\mathbb{R})$.

2) On appelle *polynômes de Legendre* la famille polynomiale $(L_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation suivante :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\Big((x^2-1)^n\Big), \quad \forall n \geqslant 0.$$

Vérifier que les éléments de cette famille font bien partie de $\mathcal{L}^2([-1\,,1],\mathbb{R})$ et expliciter ses quatre premiers élements.

3) Admettons que la famille $(L_n)_{n\geqslant 0}$ forme une "famille génératrice" de $\mathcal{L}^2([-1\,,1],\mathbb{R})$ ainsi que la relation suivante est vraie

$$\langle L_n, L_m\rangle = \frac{1}{2n+1}\delta_{nm}, \quad \forall\, n,m \geqslant 0,$$

que peut-on dire de cette famille.

4) Soit $L = Vect(L_0, L_1, L_2, L_3)$. Calculer $\Pi_L(exp)$ la projection orthogonale de la fonction exponentielle sur l'espace L.

5) calculer la distance entre la fonction exp et l'espace L.

2

Polynômes orthogonaux

Polynômes de Legendre

On considère l'espace $\mathcal{L}^2([-1\,,1])$ des fonctions de carré intégrable définies sur $[-1\,,1]$ à valeurs réelles, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Question 1. — Créer une fonction **produitScalaire** de deux arguments permettant de calculer ce produit scalaire.

Question 2. — À l'aide de la fonction **Table**, créer la liste **baseCanonique** représentant la base usuelle de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 10.

Question 3. — Calculer la matrice de Gram de la famille **baseCanonique** pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Les polynômes de **baseCanonique** sont-ils orthogonaux ?

Question 4. — Utiliser la fonction **Orthogonalize** pour construire à partir de **baseCanonique** une base orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Vérifier que cette nouvelle base est bien orthonormée.

Question 5. — Calculer la liste des valeurs de ces polynômes en $x = 1$. En déduire les polynômes de Legendre $L_n(x)$ obtenus en normalisant les éléments de la base orthonormée de telle sorte que $L_n(1) = 1$.

Question 6. — Vérifier que les polynômes ainsi obtenus correspondent bien aux polynômes de Legendre de *Mathematica*.

Question 7. — Tracer à l'aide de **Plot** les polynômes de Legendre de dégrée 10, puis 20, sur l'intervalle $[-1\,,1]$. Que se passe-t-il au bord de l'intervalle ?

Approximation polynomiale de la fonction exponentielle

Question 8. — Calculer la projection orthogonale de la fonction exponentielle exp sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 10 en utilisant la base orthonormée, puis la base des polynômes de Legendre.

Question 9. — Comparer graphiquement la fonction exponentielle et sa projection sur l'intervalle $[-1\,,1]$.

Question 10. — Représenter graphiquement l'écart entre la fonction exponentielle et sa projection. Commenter vos résultats.

On souhaite comparer la projection orthogonale avec le développement limité à l'ordre 10.

QUESTION 11. — Regarder la documentation de la fonction **Series**, notamment le premier exemple. À quoi sert la fonction **Normal** ? Calculer le développement limité à l'ordre 10 de la fonction exponentielle, puis représenter sur le même graphique d'une part l'écart entre exp et son développement limité, d'autre part l'écart entre exp et la projection calculée précédemment. Interpréter les résultats (vous pouvez éventuellement reproduire le même graphique sur l'intervalle $[-1/5\,, 1/5]$).

Polynômes de Tchébychev

QUESTION 12. — Refaire les questions précédentes pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Les polynômes obtenus en normalisant la base orthonormée pour le nouveau produit scalaire sont appelés polynômes de Tchébychev. Comparer la nouvelle projection orthogonale de la fonction exp (en utilisant la base des polynômes de Tchébychev) aux résultats précédents.