

1. 아래와 같이 A 행렬을 입력했을 경우 각 물음의 python code 결과를 행렬로 써라 (각 2 점, 10 점)

$A = \text{np.array}([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])$

- (1) $A[1,:]$ (2) $A[:,2]$ (3) $A[1:2,2:3]$ (4) $A[2,3]$ (5) $A.T$

(1) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$ (4) index error
(5) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

2. 다음 동차방정식이 자명하지 않은 해 $x = (1, -2, 1)$ 를 가짐을 보여라 (5 점)

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1$ 대입

$\hookrightarrow 4 - 2 - 2 = 0 \quad // \quad 5 - 4 - 1 = 0$ 으로 성립한다

3. 다음 연립방정식에 대하여 답하여라 (10 점)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

- (1) 첨가행렬을 구하여라 (3점) (2) 기약행사다리꼴을 구하시오 (5점) (3) 해를 구하시오 (2점)

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $x_1 = 1, x_2 = 1$

① $r_2 = r_2 - r_1$
② $r_2 = r_2 / 3$
③ $r_1 = r_1 - r_2$

4. 다음은 기본 행렬들이다. 각 행렬의 역행렬을 구하시오 (각 2 점, 10 점)

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. 다음 행렬 A 가 대칭행렬이 되도록 실수 a, b 를 구하여라 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (5점)

a 는 모든 실수, $b = 1$

6. $|A| = 5, |B| = -2$ 일 때 다음을 구하여라 (각 2 점, 10 점) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \det(A^T) = \det(A)$

(1) $|A^{-1}|$ (2) $|A^2|$ (3) $|2A|$ (4) $|ABA^{-1}|$ (5) $|A^T A|$

$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$

$\det(kA) = k^n \times \det(A)$, A 는 n 차 행렬

(1) $\frac{1}{5}$ (2) 25 (3) $2^n \times 5$ (4) -2 (5) 25

7. 다음 연립방정식을 Cramer 공식을 이용하여 구하시오 (5점)

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-2-0}{-2} = 1, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{0-2}{-2} = 1$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = 1$$

8. 다음중 선형방정식을 모두 고르시오 (5점)

(1) $x + 5y - 3z = 0$ (2) $2x + 3y + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)z = 0$ (3) $3x - 3\sin y = 1$ (4) $5x - xy = \sqrt{5}$

(1), (2)

9. 다음 행렬 중에서 기약 행사다리꼴인 것을 모두 고르시오 (5점)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A, C

10. 다음 행렬 A 와 AB 가 다음과 같을 때 행렬 B 의 크기를 구하시오 (5점)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

A 는 2×3 행렬, AB 는 2×1 행렬 이기 때문에
 B 는 3×1 행렬

11. 다음 중 행사다리꼴이 아닌 것을 모두 고르시오 (5점)

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c), (e)

12. 계수 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 의 자유도는 '0'이다. 이 행렬을 기약행사다리꼴로 바꾸시오 (5점)

자유도가 0 이기 때문에 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이 된다.

13. 다음 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ 의 행렬식이 $|A| = -3$ 일 때 물음에 답하시오 (10점)

$$B = \begin{bmatrix} d & g & a \\ e & h & b \\ f & i & c \end{bmatrix}$$

변환방법 = {(a)Transpose, (b)두열의 교환, (c)두행의 교환, (d)한행에 실수를 곱함, (e)한열에 실수를 곱함}

(1) B 를 구하기 위하여 A 변형하는 과정을 상기의 변환방법들 중에서 중복을 허용하여 골라서 나열하시오 (4점)

(2) 위에서 고른 각 변환 방법에 의하여 변환된 행렬의 행렬식은 얼마인지 쓰시오 (3점)

(3) 결과적으로 B 의 행렬식은 얼마인가? (3점)

(1) (a) \rightarrow (b) \rightarrow (b) / (c) \rightarrow (c) \rightarrow (a)

(2) (a): -3, (b): 3, (b): 3 / (c): 3 (c): -3 (a): -3

(3) -3

14. 다음 방정식에서 선도변수와 자유변수를 구하고 (5점), 일반해를 구하여라 (5점), (총 10점).

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 3 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = 5 \\ 2x_1 & +5x_2 & +4x_3 & = 9 \end{array}$$

$$Aug = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{기약행렬} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

선도 변수 : x_1, x_2 자유 변수 : x_3

일반 해 : $\{x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = 2+3t, x_2 = 1-2t, x_3 = t, \text{ } t \text{는 임의의 실수}\}$