Sujet de Grand Oral - Simulation de l'atterrissage de Apollo 11 sur la Lune

Elliot Jullier

12 mai 2021

Table des matières

0.1 - Introduction

Après les multiples victoires technologiques de l'URSS dans la course des étoiles, premièrement le satellite de Spoutnik 1 en 1957 choque le monde ainsi que Laika, ensuite avec Yuri Gagarin, premier homme dans l'espace ; les victoires consécutives tel que la premiere sortie extravéhiculaire.

Le Président Kennedy annonca la participation des Etats-Unis de cette compétition spatiale en Septembre 1962 qui promet de mettre un homme sur la Lune avant la fin de la décennie. Le 16 Juillet 1969, Apollo 11, contenant les astronautes Neil Armstrong, Edwin “Buzz” Aldrin et Michael Collins part de la Terre, l'orbite plusieurs fois et puis envoie une petite navette contenant ces trois astronautes vers la Lune. En arrivant dans la sphère d'influence (région de l'espace ou un certain corps céleste est la force dominante) de la Lune trois jours plus tard, la vitesse est bien trop grande et le vaisseau n'orbite pas la Lune, il faut effectuer un premier ajustement pour permettre aux astronautes de se situer à une orbite de 111 km au dessus de la surface lunaire.

On a construit une simulation qui cherche à mieux comprendre comment l'atterissage sur la Lune s'est produite, cette mission a été choisie grâce à sa signification historique et les données importantes récoltées.

1 - Etapes de l'Atterissage

1.1 - Parametres initiaux : Orbite Circulaire

Nous cherchons à modeliser la mission de Apollo 11 du 20-21 Juillet 1969 comme exemple d'atterissage de fusée sur la Lune car cela donne un modèle avec beaucoups de statistiques grace à sa sigificance historique.

Il y a deux capsules en orbite a 111 km d'altitude au-dessus de la surface de la Lune : la *Command and Service Module* - CSM, partie qui reste en orbite avec l'astronaut Michael Collins, et le *Lunar Module* - LM, avec Neil Armstrong et Edwin ‘Buzz’ Aldrin. En sachant que les deux parties attachés sont en orbite circulaire a une altitude de 111 km on peut calculer la vitesse initiale $\|\overrightarrow{v}\| = 1628,9\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

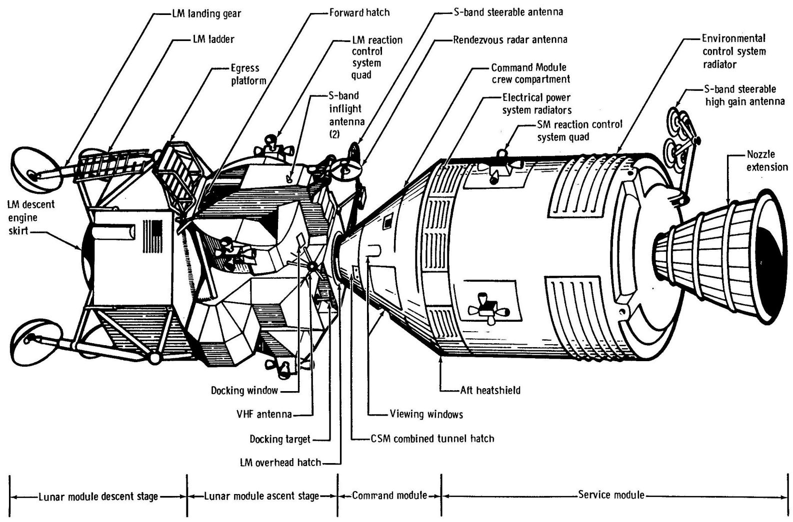
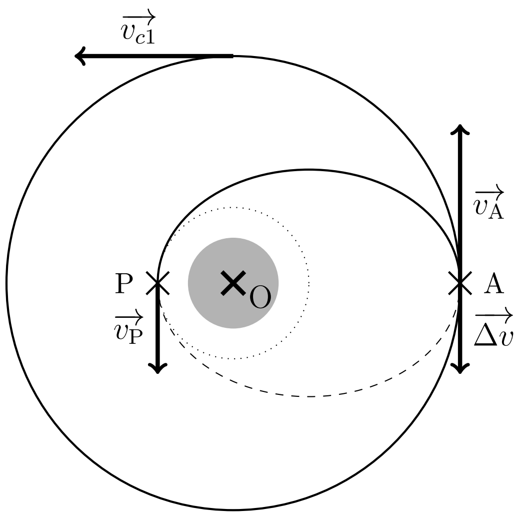


Figure 1 - Schéma du CSM et LM

1.2 - Transfer de Hohmann : Ellipse Intermédiaire

On sépare ensuite les deux modules et on assure une distance d'au moins 10 m entre eux, puis on pointe le moteur de la LM dans la direction du vecteur vitesse mais dans le sens opposé. On effectue un changement $\Delta\overrightarrow{v} = -21,81\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ appelé injection trans-lunaire, qui met la fusée en une orbite elliptique avec un aposélene (point où l'altitude est maximale) à la location du changement (à 111 km) et avec un perisélene (point où l'altitude est minimale) à 180° de rotation autour du corps céleste et une altitude de $15,2$ km.



A - L'aposélene pour l'orbite elliptique

P - Le périsélene pour l'orbite elliptique

$\overrightarrow{v_{c1}}$ - La vitesse pour une orbite circulaire

$\overrightarrow{v_\mathrm{A}}$ - La vitesse à A pour l'orbite elliptique

$\overrightarrow{v_\mathrm{P}}$ - La vitesse à P pour l'orbite elliptique

$\overrightarrow{\Delta v}$ - Le Δv nécesaire pour passer de l'orbite circulaire à l'orbite elliptique

Figure 2 - Transfer de Hohmann (partiel) pour approcher la Lune

Normalement, en arrivant au périsélene, on effectue une rotation pour pouvoir ralentir de nouveau le vaisseau et circulariser l'orbite (pour que l'eccentricité soit de 0 et de garder l'altitude du périsélene).

1.3 - Phases de Descente

La phase de déscente est plus dur à modeliser car elle varie dépendant des circonstances, peut changer a tout moment, et surtout n'a pas de bonnes equations pour modeliser la vitesse mais plutôt des lignes directrices à suivre - il ne faut pas oublier que seuls les meilleurs pilotes pouvaient devenir astronautes et donc leur capacité surpasser de loins les ordinateurs de l'époque.

1.3.1 - Phase de Freinage

On commence a une altitude de $15,2$ km avec une vitesse de $\overrightarrow{v_\mathrm{P}} = 1694,6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ qui est entierement horizontale (seulement au périsélene) et qui a une vitesse verticale négligeable. On se situe environ 480 km (à vol d'oiseau) du site d'atterisage.

Cette phase a comme but de ralentir majoritairement la vitesse horizontale, mais en ralentissant, la gravité commence à avoir plus d'emprise et la vitesse est trop basse pour pouvoir 'dépasser' la Lune (cf. Le Canon de Newton)

1.3.2 - Phase de Repérage

Une fois qu'on atteint environ $2,95$ km d'altitude (on situe maintenant à 10 km du site d'atterissage à vol d'oiseau), il faut être au alentours de $150\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ horizontalement, et $45\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ verticale, ce qui donne une vitesse totale de $156,6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

Cette phase a comme but de finir de ralentir la vitesse horizontale, mais aussi d'eviter une trop forte accéleration vers le corps céleste. Elle sert aussi de trouver le lieu d'atterissage, notamment pendant la mission d'Apollo 11, Neil Armstrong a du survoler le lieu d'atterissage prévu à cause d'un champ de rochers.

1.3.3 - Phase d'atterissage

En arrivant a 150 m d'altitude et jusqu'à 600 m de distance horizontale du site d'atterisage, il faut $20 - 0\ \mathrm{m\,s^{-}1}$ de vitesse horizontale et $8 - 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ verticalement.
Comme règle générale, il faut que la vitesse verticale soit un dixième de l'altitude, sauf les derniers mètres ou il faut s'assurer un atterisage qui n'endommage des parties importantes tel que le moteur de remonté, les expériences et evidemment les astronautes.

2 - La méchanique dans le modèle

2.1 - Implementation de la position, vitesse et acceleration

2.1.1 - Relations physique

Dans le chapitre de la méchanique, on a vu la relation entre les vecteurs de position, vitesse et acceleration :

$$\vec{a}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \frac{d\vec{v}}{dt}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.1.2 - Implementation par approximation

La manière dont on a implémenté cette relation dans le programme est d'approximer la continuité et l'evolution des vecteurs en les approximants en valeurs discretes.

Pour Unity le programme qu'on a utilisé pour la simulation, la valeur de temps entre chaque 'update' est de $\frac{1}{50}$ de seconde.

On calcule l'acceleration et on 'ajoute' ce vecteur a celui de la vitesse. Cela est comme faire : $v_{\text{future}} = v_{\text{courante}} + \Delta v$, cette action est répété toute les $50^{\text{ième}}$ de seconde. On peut donc assimiler ajouter l'acceleration au vecteur vitesse comme ajoutant le Δv, les unités de l'acceleration en $\mathrm{m\,s^{-2}}$ multiplié par des s donne des $\mathrm{m\,s^{-1}}$. En ajoutant le vecteur acceleration toute les $50^{\text{ième}}$ de seconde, on calcule le nouveau vecteur vitesse.

Similairement, pour la position, on prends la vitesse et on calcul la nouvelle position apres que la fusée ait bougée pendant $\frac{1}{50}$ s.

2.2 - Evolution de l'acceleration

Le moteur d'une fusée à un pourcentage de la 'puissance' maximale fourni une force constante.
De plus :

$$F = ma$$

Par ailleur, le moteur d'une fusée brule la masse d'essence proportionellement a la 'puissance' fournie. Cela a pour consequence que la fusée a une augmentation d'acceleration au fur et à mesure qu'elle utilise son carburant.

2.3 - Force Appliqués sur la Fusée

2.3.1 - Orbite Circulaire

Dans une orbite circulaire uniforme, il y a seul la force de gravité qui agit sur la fusée. On a :

$$\overrightarrow{F} = \frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \frac{GM}{r^2}\overrightarrow{n}$$

Avec G : la constante gravitationelle en $\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$, M : la masse de la Lune en kg, m : la masse de la fusée, r : le rayon de l'orbite ($R_{\text{Lune}} + d_{\text{hauteur}}\text{enm}$), $\overrightarrow{n}$: le vecteur unitaire qui pointe vers le centre d'inertie de la Lune.

De plus on est dans un mouvement circulaire donc : $\overrightarrow{a} = \frac{v^2}{r}\overrightarrow{n}$
Ce qui donne :

$$\frac{v^2}{r}\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} = \frac{GM}{r^2}\overrightarrow{n} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Avec la direction de la vitesse étant tangantielle à la trajectoire circulaire à prendre.

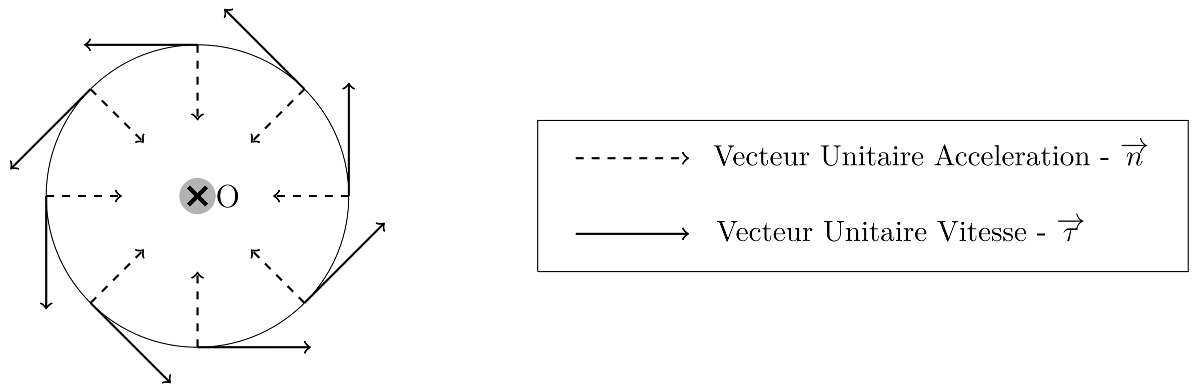


Figure 3 - Vecteurs Vitesses et Accelerations dans une Orbite Circulaire

2.3.2 - Orbite Intermediaire d'Hohmann

Pendant que la fusée est en orbite circulaire, la vitesse $\overrightarrow{v_{c1}}$ reste constante. La vitesse à l'aposélene pour l'orbite elliptique n'est pas la meme que pour l'orbite circulaire, on la nomme $\overrightarrow{v_\alpha}$.
On a donc :

$$\overrightarrow{v_{c1}} = \overrightarrow{v_\alpha} + \overrightarrow{\Delta v_\alpha}$$

et donc, si l'on connait la vitesse qu'il faut avoir pour l'orbite elliptique, on peut calculer $\overrightarrow{\Delta v_\alpha} = \overrightarrow{v_{c1}} - \overrightarrow{v_\alpha}$.

On peut calculer la vitesse d'un objet en orbite en sachant la demi-longueur du grand axe et la distance entre le corps céleste et le corps qui orbite en utilisant l'équation vis-viva :

$$v^2 = GM(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}) = 2\mu(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2})$$

Avec : v en $\mathrm{m\,s^{-1}}$, $GM = \mu$, r la distance entre les centres d'interties du corp céleste et du corp orbitant en m et $a = \frac{1}{2}\ r_1 + r_2$ en m.

Dans le cas de l'orbite d'Hohmann r_1 est l'altitude du aposélene en m (sans oublier le rayon du corps céleste) et r_2 la distance du périsélene en m (sans oublier le rayon du corps céleste).

Preuve pour orbites elliptiques (et circulaires) :

On part de la formule d'énergie specifique orbitale qui reste constante pendant toute l'orbite. On note α l'aposélene, π le périsélene.

$$\epsilon = \frac{v_\alpha^2}{2} - \frac{GM}{r_\alpha} = \frac{v_\pi^2}{2} - \frac{GM}{r_\pi} \Leftrightarrow \frac{v_\alpha^2}{2} - \frac{v_\pi^2}{2} = \frac{GM}{r_\alpha} - \frac{GM}{r_\pi}$$

Dans une orbite elliptique, le vecteur vitesse et le vecteur position (avec l'origine étant le centre d'inertie du corps céleste) sont orthogonaux au périsélene et l'aposélene. Donc la conservation du moment cinétique nécessite la conservation du moment cinetique spécifique (par unité du masse) implique $h = r_p\pi h_\pi = r_\alpha h_\alpha =$ constante ce qui implique que $v_\pi = \frac{r_\alpha}{v_\pi} v_\alpha$

$$\begin{aligned}
\frac{v_\alpha^2}{2} - \frac{v_\pi^2}{2} = \frac{GM}{r_\alpha} - \frac{GM}{r_\pi} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_\alpha^2}{r_\pi^2}\right) v_\alpha^2 = \frac{GM}{r_\alpha} - \frac{GM}{r_\pi} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{r_\pi^2 - r_\alpha^2}{r_\pi^2}\right) v_\alpha^2 = \frac{GM}{r_\alpha} - \frac{GM}{r_\pi} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} v_\alpha^2 = \left(\frac{GM}{r_\alpha} - \frac{GM}{r_\pi}\right) \cdot \frac{r_\pi^2}{r_\pi^2 - r_\pi^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} v_\alpha^2 = GM\left(\frac{r_\pi - r_\alpha}{r_\alpha r_\pi}\right) \frac{r_\pi^2}{r_\pi^2 - r_\alpha^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} v_\alpha^2 = \frac{r_\pi}{r_\alpha(r_\pi - r_\alpha)}
\end{aligned}$$

De plus $2a = r_\alpha + r_\pi$ avec a la demi-longueur du grand axe.
Donc :

$$\frac{1}{2} v_\alpha^2 = GM\frac{2a - r_\alpha}{r_\alpha(2a)} = GM\left(\frac{1}{r_\alpha} - \frac{1}{2a}\right) = \frac{GM}{r_\alpha} - \frac{GM}{2a}$$

En remplaceant dans l'équation originale :

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{v_\pi^2}{2} - \frac{GM}{r_\pi} = \frac{v_\alpha^2}{2} - \frac{GM}{r_\alpha} = -\frac{GM}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a} \Leftrightarrow v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$