INSA GM3
Probabilités – projets de deuxième vague

Paul Lescot

16 Novembre 2013

Pour toute précision, merci de me contacter à l'adresse électronique suivante :

paul.lescot@univ-rouen.fr

Projet 1

Problème du collectionneur et estimation de la constante d'Euler.

Un collectionneur reçoit chaque semaine un coupon. Il existe en tout N types de coupons. Chaque semaine, le coupon est tiré au sort, le N types étant équiprobables. On note T le nombre de semaines nécessaires pour obtenir au moins un exemplaire de chaque type de coupons, et

$$H_N := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} = 1 + ... + \frac{1}{N} \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{E}(T) = NH_N$.
2. Etablir que $H_N - \ln(N)$ a une limite finie $\gamma \in]0, 1[$ (*constante d'Euler*) lorsque $N \to +\infty$.
3. Au moyen de 1., estimer γ par simulation.

Projet 2

Méthode de Monte-Carlo et calcul d'une intégrale..

Soit Y une variable aléatoire continue de loi

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \ .$$

1. Expliquer comment simuler Y.
2. On pose
$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x|}}{1+x^2} dx \ .$$
Trouver une fonction g telle que $I = \mathcal{E}(g(Y))$.
3. Au moyen de 2., estimer I par simulation.
4. Calculer rigoureusement I .
5. Que donne la comparaison entre 3. et 4. ?

Projet 3

Permutations sans point fixe et nombre e.

On se donne un entier $N \geq 1$, et on note Σ_N le groupe des permutations de $\{1, ..., N\}$.

1. Expliquer comment simuler la loi uniforme sur Σ_N.
2. Soit $\mathcal{F}_N$ l'ensemble des permutations $\sigma \in \Sigma_N$ *sans point fixe*, c'est–à–dire telles que

$$\forall m \in \{1, ..., N\} \;\; \sigma(m) \neq m \; .$$

   On pose $a_N := \dfrac{|\mathcal{F}_N|}{N!}$ et $b_N := \dfrac{1}{a_N}$. Estimer par simulation a_N et b_N (par exemple pour $N = 1000$ puis $N = 100000$).
3. Trouver une formule exprimant a_N.
4. En déduire la valeur de $\lim_{N\to+\infty} a_N$.
5. A partir de 2. et 4., estimer la valeur de e.

Projet 4

Processus de Poisson et temps d'atteinte.

Toutes les durées sont exprimées en minutes. On pose $T_0 = 0$.

Un passager se rend à un arrêt d'autobus. On suppose que les temps de passage T_1, ..., T_n des autobus à cet arrêt sont tels que les $(T_j - T_{j-1})_{j\geq 1}$ forment une suite de variables exponentielles de paramètre λ, indépendantes dans leur ensemble, et que le délai moyen entre deux passages est de 15mn. On fixe $t > 0$, et on appelle A_t le temps d'attente nécessaire à un passager arrivé au temps t pour voir s'arrêter un autobus.

1. Déterminer λ.
2. Au moyen d'une simulation, estimer $\mathcal{E}(A_t)$.
3. Calculer rigoureusement $\mathcal{E}(A_t)$.
4. En quoi le résultat de 3. pourrait-il paraître paradoxal ? Commenter.