

PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 09

SERII DE TIMP - MODELE ARMA

Cristian Rusu

CUPRINS

- mediere exponențială
- modele MA
- modele ARMA

MODELUL MA

- modelul medie glisantă (moving average - MA)
 - ideea: trecutul afectează viitorul (combinații ale valorilor din trecut pot prezice valori din viitor)
 - la momentul i vom face o combinație liniară de erori anterioare
 - cât de mult mergem în trecut? un orizont p pe care îl alegem
- formularea matematică

$$\hat{y}[i] = \epsilon[i] + \theta_1\epsilon[i-1] + \theta_2\epsilon[i-2] + \dots + \theta_p\epsilon[i-p] + \mu = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \dots & \theta_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon[i] \\ \epsilon[i-1] \\ \vdots \\ \epsilon[i-p] \\ \mu \end{bmatrix}$$

- ce este operația de mai sus?

MODELUL MA

- modelul medie glisantă (moving average - MA)
 - ideea: trecutul afectează viitorul (combinații ale valorilor din trecut pot prezice valori din viitor)
 - la momentul i vom face o combinație liniară de erori anterioare
 - cât de mult mergem în trecut? un orizont p pe care îl alegem
- formularea matematică

$$\hat{y}[i] = \epsilon[i] + \theta_1\epsilon[i-1] + \theta_2\epsilon[i-2] + \dots + \theta_p\epsilon[i-p] + \mu = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \dots & \theta_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon[i] \\ \epsilon[i-1] \\ \vdots \\ \epsilon[i-p] \\ \mu \end{bmatrix}$$

- ce este operația de mai sus?
- produs scalar, deci din nou cele mai mici pătrate pentru a estima parametrii θ ai modelului
- eroarea la fiecare pas poate să fie estimată ca zgomot gaussian
- media μ se poate calcula per total sau doar pe ultimii p pași

MODELUL MA

- un exemplu
- estimăm media unei serii să fie 12, apoi la fiecare moment de timp avem și presupunem că am estimat $\theta_1 = \frac{1}{2}$

ziua	predicția	valoarea reală	eroarea
1	12	14	2
2	$13 = 12 + 2/2$	13	0
3	$12 = 12 + 0/2$	8	-4
4	$10 = 12 - 4/2$	14	4
5
6

- Presupunerea implicită este că valorile reale fluctuează în jurul mediei

COMBINAȚIA: ARMA

- $\text{ARMA} = \text{AR}(p) + \text{MA}(q)$

$$y[t] = \sum_{i=1}^p x_i y[t-i] + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon[t-i] + \epsilon[t]$$

- parametrii sunt:
 - p parametrii auto-regresivi
 - q parametrii de mediere
 - media μ
- problema: din cauza MA, optimizarea parametrilor devine foarte dificilă aici

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- funcțiile de mediere glisantă atribuie aceeași pondere elementelor și folosește un număr finit de elemente din trecut
- o idee nouă: contribuția pe care o are fiecare termen în medie descrește pe măsură ce trece timpul
- primim o serie de timp cu N elemente: $x[0], x[2], \dots, x[N - 1]$
- creăm o nouă serie de timp:
$$s[0] = x[0]$$
$$s[t] = \alpha x[t] + (1 - \alpha)s[t - 1], t \geq 1$$
- α se numește factorul de uitare (sau de netezire), $0 \leq \alpha \leq 1$
- α trebuie ales

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- de ce se numește mediere exponențială?

$$\begin{aligned}s[t] &= \alpha x[t] + (1 - \alpha)s[t - 1] \\&= \alpha x[t] + \alpha(1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2 s[t - 2] \\&= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1]) + (1 - \alpha)^2 s[t - 2] \\&= \dots\end{aligned}$$

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- de ce se numește mediere exponențială?

$$\begin{aligned}s[t] &= \alpha x[t] + (1 - \alpha)s[t - 1] \\&= \alpha x[t] + \alpha(1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2 s[t - 2] \\&= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1]) + (1 - \alpha)^2 s[t - 2] \\&= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2 x[t - 2] + \dots + (1 - \alpha)^{t-1} x[1]) + (1 - \alpha)^t x[0] \\&= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^i x[t - i] + (1 - \alpha)^t x[0]\end{aligned}$$

- progresia matematică de puteri ale lui $(1 - \alpha)$ este o versiune discretă a funcției exponențiale
- de ce se numește mediere?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- de ce se numește mediere?

$$\alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^i = \alpha \frac{1 - (1 - \alpha)^t}{1 - (1 - \alpha)} = 1 - (1 - \alpha)^t$$

- deci avem că:

$$\alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^i - (1 - \alpha)^t = 1$$

- adică avem o mediere ponderată

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- cum îl calculăm pe α ?

$$\begin{aligned}s[t] &= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2x[t - 2] + \dots + (1 - \alpha)^{t-1}x[1]) + (1 - \alpha)^tx[0] \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^i x[t - i] + (1 - \alpha)^t x[0]\end{aligned}$$

- avem două opțiuni:
 - îl alegem
 - îl calculăm
- dacă vrem să îl calculăm cum facem?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- cum îl calculăm pe α ?

$$\begin{aligned} s[t] &= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2x[t - 2] + \dots + (1 - \alpha)^{t-1}x[1]) + (1 - \alpha)^tx[0] \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^i x[t - i] + (1 - \alpha)^t x[0] \end{aligned}$$

- avem două opțiuni:
 - îl alegem
 - îl calculăm
- dacă vrem să îl calculăm cum facem?

- minimizăm $\sum_{t=0}^{N-1} (s[t] - x[t])^2$?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- cum îl calculăm pe α ?

$$\begin{aligned}s[t] &= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2x[t - 2] + \dots + (1 - \alpha)^{t-1}x[1]) + (1 - \alpha)^tx[0] \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^i x[t - i] + (1 - \alpha)^t x[0]\end{aligned}$$

- avem două opțiuni:
 - îl alegem
 - îl calculăm

- dacă vrem să îl calculăm cum facem?

- minimizăm $\sum_{t=0}^{N-2} (s[t] - x[t + 1])^2$, nu $\sum_{t=0}^{N-1} (s[t] - x[t])^2$ care are o soluție banală⁰
- putem să folosim cele mai mici pătrate ca să rezolvăm pentru α ?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- cum îl calculăm pe α ?

$$\begin{aligned}s[t] &= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2x[t - 2] + \dots + (1 - \alpha)^{t-1}x[1]) + (1 - \alpha)^tx[0] \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^ix[t - i] + (1 - \alpha)^tx[0]\end{aligned}$$

- avem două opțiuni:
 - îl alegem
 - îl calculăm

- dacă vrem să îl calculăm cum facem?

- minimizăm $\sum_{t=0}^{N-2} (s[t] - x[t + 1])^2$, nu $\sum_{t=0}^{N-1} (s[t] - x[t])^2$ care are o soluție banală⁰
 - putem să folosim cele mai mici pătrate ca să rezolvăm pentru α ?
 - NU, pentru că problema nu este liniară în α
 - atunci, cum găsim α ?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- un calcul greșit pentru α

$$(s[t] - x[t + 1])^2 = (\alpha(x[t] - s[t - 1]) + s[t - 1] - x[t + 1])^2$$

- adică avem nevoie de

$$\alpha(x[t] - s[t - 1]) \approx x[t + 1] - s[t - 1]$$

- cum rezolvăm acum?

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- un calcul greșit pentru α

$$(s[t] - x[t + 1])^2 = (\alpha(x[t] - s[t - 1]) + s[t - 1] - x[t + 1])^2$$

- adică avem nevoie de

$$\alpha(x[t] - s[t - 1]) \approx x[t + 1] - s[t - 1]$$

- cum rezolvăm acum?

$$\begin{bmatrix} x[t] - s[t - 1] \\ x[t - 1] - s[t - 2] \\ x[t - 2] - s[t - 3] \\ \vdots \\ x[2] - s[1] \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} x[t + 1] - s[t - 1] \\ x[t] - s[t - 2] \\ x[t - 1] - s[t - 3] \\ \vdots \\ x[3] - s[1] \end{bmatrix}$$

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- un calcul greșit pentru α

$$(s[t] - x[t + 1])^2 = (\alpha(x[t] - s[t - 1]) + s[t - 1] - x[t + 1])^2$$

- adică avem nevoie de

$$\alpha(x[t] - s[t - 1]) \approx x[t + 1] - s[t - 1]$$

- cum rezolvăm acum?

$$\begin{bmatrix} x[t] - s[t - 1] \\ x[t - 1] - s[t - 2] \\ x[t - 2] - s[t - 3] \\ \vdots \\ x[2] - s[1] \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} x[t + 1] - s[t - 1] \\ x[t] - s[t - 2] \\ x[t - 1] - s[t - 3] \\ \vdots \\ x[3] - s[1] \end{bmatrix}$$

- $$\alpha = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|_2^2}$$

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- de ce se numește mediere exponențială?

$$\begin{aligned}s[t] &= \alpha x[t] + (1 - \alpha)s[t - 1] \\&= \alpha x[t] + \alpha(1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2 s[t - 2] \\&= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1]) + (1 - \alpha)^2 s[t - 2] \\&= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2 x[t - 2] + \dots + (1 - \alpha)^{t-1} x[1]) + (1 - \alpha)^t x[0] \\&= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^i x[t - i] + (1 - \alpha)^t x[0]\end{aligned}$$

- găsiți o serie de timp pentru care medierea exponențială merge foarte rău

MEDIERE EXPONENȚIALĂ

- de ce se numește mediere exponențială?

$$\begin{aligned}s[t] &= \alpha x[t] + (1 - \alpha)s[t - 1] \\&= \alpha x[t] + \alpha(1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2 s[t - 2] \\&= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1]) + (1 - \alpha)^2 s[t - 2] \\&= \alpha(x[t] + (1 - \alpha)x[t - 1] + (1 - \alpha)^2 x[t - 2] + \dots + (1 - \alpha)^{t-1} x[1]) + (1 - \alpha)^t x[0] \\&= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^i x[t - i] + (1 - \alpha)^t x[0]\end{aligned}$$

- găsiți o serie de timp pentru care medierea exponențială merge foarte rău
 - $s[t] = t$

MEDIERE EXPONENȚIALĂ DUBLĂ

- pentru a remedia problema de trend
- pornind de la $x[t]$ vom defini
 - $s[0] = x[0]$
 - $b[0] = x[1] - x[0]$
- pentru oricare $t > 0$ avem formulele
 - $s[t] = \alpha x[t] + (1 - \alpha)(s[t - 1] + b[t - 1])$
 - $b[t] = \beta(s[t] - s[t - 1]) + (1 - \beta)b[t - 1]$
- estimarea este calculată ca fiind
 - $\hat{x}[t + m] = s[t] + m \cdot b[t], m \geq 1$
- acum, avem doi parametri de estimat: α, β

MEDIERE EXPONENȚIALĂ TRIPLĂ

- pentru a remedia problema de trend și cea de sezonality aditivă
- pornind de la $x[t]$ pentru oricare $t > 0$ avem formulele
 - $s[0] = x[0]$
 - $s[t] = \alpha(x[t] - c[t - L]) + (1 - \alpha)(s[t - 1] + b[t - 1])$
 - $b[t] = \beta(s[t] - s[t - 1]) + (1 - \beta)b[t - 1]$
 - $c[t] = \gamma(x[t] - s[t] - b[t - 1]) + (1 - \gamma)c[t - L]$
- estimarea este calculată ca fiind
 - $\hat{x}[t + m] = s[t] + m \cdot b[t] + c[t - L + 1 + (m - 1) \bmod L], m \geq 1$
- acum, avem trei parametri de estimat: α, β, γ (L este cunoscut)

MEDIERE EXPONENȚIALĂ TRIPLĂ

- pentru a remedia problema de trend și cea de sezonalitate multiplicativă
- pornind de la $x[t]$ pentru oricare $t > 0$ avem formulele
 - $s[0] = x[0]$
 - $s[t] = \alpha \frac{x[t]}{c[t-L]} + (1 - \alpha)(s[t-1] + b[t-1])$
 - $b[t] = \beta(s[t] - s[t-1]) + (1 - \beta)b[t-1]$
 - $c[t] = \gamma \frac{x[t]}{s[t]} + (1 - \gamma)c[t-L]$
- estimarea este calculată ca fiind
 - $\hat{x}[t+m] = (s[t] + m \cdot b[t])c[t-L+1+(m-1) \bmod L], m \geq 1$
- acum, avem trei parametri de estimat: α, β, γ (L este cunoscut)

DATA VIITOARE

- modele mai avansate pentru serii de timp

