a) Teniendo en cuenta que la función $g(\eta) = \frac{1}{1+\eta}$, donde $\eta \in \mathbb{C} - (-\infty, -1]$, por lo que es una función analítica en todos los puntos interiores, el teorema de Cauchy-Goursat (cabe destacar también que el contorno es cerrado simple);

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

implica que independientemente del camino escogido, toda integral de un punto 0 hasta un ~~camino~~ punto $z \in \Delta$ será igual a 0, ~~~~ por lo que todas las integrales serán iguales entre sí y sólo dependerán de los puntos iniciales y finales

$-3{,}5 \quad \int x$

b) $f(z) = \int_C g(\eta)\,d\eta \quad (z \in \Delta);$

$$= \int_C \frac{1}{1+\eta}\,d\eta = \ln|1+\eta| + C$$

Si C es uno de los caminos desde 0 hasta el valor arbitrario z_1;

$$f(z) = \int_C \frac{1}{1+\eta}\,d\eta = \ln|1+\eta|\Big|_0^{z_1} = \ln|1+z_1| - \ln 1 = \ln|1+z_1|$$

c) La función $f(z) = \ln|1+z|$ es analítica en $|z+1| < 1$. Aplicando Taylor en 0:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)z^2}{2!} + \frac{f'''(0)z^3}{3!} + \dots;$$

d) $f(z) = \ln 1 + z$

$$\ln 1+z = \ln|1+x+iy|$$

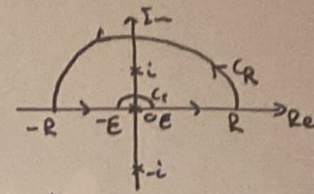
$$\ln|e^0 + re^{i0}| = \ln$$

$$x+1-\sqrt{1-y^2} = 0 \;\; x; \;\; x = \sqrt{1-y^2} - 1$$

$$w = \ln|1+x+iy| = \ln|\cancel{1+}\sqrt{1-y^2} + iy|$$

Problema 2 : $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{3/5}(x^2+1)^2} \simeq 2{,}6724$, usando teorema de recursos

Sea $f(z) = \int_0^\infty \frac{z^{-3/5}}{(z^2+1)^2}\, dz$



↳ La función tiene como polos de orden 2 los puntos $z=\pm i$, y como polo de orden 1 el punto $z=0$.

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R + \cancel{\int_{C_r}}^{\,0} + \int_{-R}^{-\varepsilon} + \cancel{\int_{C_R}}^{\,0} = 2\pi i \,\mathrm{Res}(z)$$

Analizando primero el Res(z) y sea $\alpha = -3/5$ por comodidad:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{\partial}{\partial z} \cancel{(z-i)^2} \frac{z^\alpha}{(z+i)^2\cancel{(z-i)^2}} = \lim_{z\to i} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z^\alpha}{(z+i)^2} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{\alpha z^{\alpha-1}(z+i)^2 - z^\alpha\, 2\cancel{(z+i)}}{(z+i)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{\alpha i^{\alpha-1}\, 2i - 2i^\alpha}{-8i} =$$

$$= \frac{2\alpha i^\alpha - 2i^\alpha}{-8i} = \frac{2i^\alpha(\alpha-1)}{-8i} = \frac{2e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}(\alpha-1)}{-8i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{\partial}{\partial z} (z+i)^2 \frac{z^\alpha}{(z+i)^2(z-i)^2} = \lim_{z\to -i} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z^\alpha}{(z-i)^2} =$$

$$= \frac{\alpha(-i)^{\alpha-1}(-2i) - 2(-i)^\alpha}{(-2i)^3} = \frac{2(-i)^\alpha(\alpha-1)}{8i}$$

Analizando ahora las integrales que conforman $\oint_C f(z)\,dz$:

$$\oint_{C_0} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R + \int_{-R}^{-\varepsilon} = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\alpha(\log|z|+i\pi)}}{(z^2+1)^2}\,dz + \int_0^\infty \frac{e^{\alpha(\log|z|)}}{(z^2+1)^2}\,dz =$$

$$= 1+e^{\alpha\pi i}\int_0^\infty \frac{z^\alpha}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i\left[\frac{2e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}(1-\alpha)}{8i} + \frac{2e^{i\alpha\frac{3\pi}{2}}(\alpha-1)}{8i}\right]$$

Donde usando la función $\Gamma(x)$:

$$\oint_C f(z)\,dz = \frac{\pi(1-\alpha)}{4\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} + \frac{\pi(1+\alpha)}{4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\alpha\right)} = \frac{\pi(1-3/5)}{4\cos\left|\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{5}\right|} + \frac{\pi\left|1+3/5\right|}{4\cos\left|-\frac{\pi}{2}\frac{3}{5}\right|} = 2{,}672398$$